MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DI

SCIENZE, LETTERE ED ARTI

IN MODENA

SERIE III - VOLUME X - PARTE SECONDA

Tavole 14 - Figure 3 intercalate al testo

MODENA
COI TIPI DELLA SOCIETÀ TIPOGRAFICA
ANTICA TIPOGRAFIA SOLIANI

1913.

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DI

SCIENZE, LETTERE ED ARTI

IN MODENA

SERIE III - VOLUME X - PARTE SECONDA

Tavole 14 - Figure 3 intercalate al testo

MODENA

COI TIPI DELLA SOCIETÀ TIPOGRAFICA

ANTICA TIPOGRAFIA SOLIANI

1913

ALBO ACCADEMICO

Giugno

ELENCO DELLE CARICHE

PRESIDENTE
NICOLI prof. cav. uff. FRANCESCO

Segretario Generale
FERRARI MORENI conte dott. cav. GIORGIO

Vice Segretario Generale ed Archivista
SANTI prof. cav. VENCESLAO

Bibliotecario
SOLI prof. cav. GUSMANO

Tesoriere ed Economo
CESARI prof. comm. GIUSEPPE

CARICHE DELLE SEZIONI

Direttori

SEZIONE I. — *Di Scienze fisiche matematiche e naturali*
N. N.

SEZIONE II. — *Di Scienze morali giuridiche e sociali*
SABBATINI prof. cav. PIO

SEZIONE III. — *Di Storia, Lettere ed Arti*
CASINI prof. comm. TOMMASO

Segretari

SEZIONE I. — BONACINI prof. cav. CARLO
» II. — SOLAZZI prof. SIRO
» III. — MARTINOZZI prof. MARIO

ELENCO DEI SOCI

SOCI EFFETTIVI (già permanenti)

Albertotti prof. cav. Giuseppe
Bonacini prof. cav. Carlo
Bortolotti prof. Ettore
Casini prof. cav. uff. Tommaso
Chistoni prof. cav. Ciro
Cuoghi Costantini prof. Antonio
Ferrari Moreni dott. cav. co. Giorgio
Maggiora prof. comm. Arnaldo
Magnanini prof. Gaetano
Nicoli ing. prof. cav. uff. Francesco
Pantanelli prof. cav. uff. Dante
Patetta prof. cav. Federico
Patrizi prof. Mariano Luigi
Riccardi prof. Paolo
Santi prof. cav. Venceslao

SOCI EFFETTIVI (già attuali)

Alimena prof. cav. uff. Bernardino
Amaldi prof. Ugo
Arangio Ruiz prof. cav. Gaetano
Arnò prof. cav. Carlo
Bariola dott. Giulio
Boccolari dott. cav. Antonio
Calori-Cesis march. Ferdinando
Campori march. cav. Matteo

Cesari prof. comm. Giuseppe
Coggi prof. Alessandro
Colombini prof. Pio
Daccomo prof. cav. uff. Girolamo
Dallari dott. cav. Umberto
De Toni prof. cav. Gio. Battista
Donaggio prof. Arturo
Dusi prof. Bartolomeo
Fabbri prof. cav. Ercole Federico
Franchi prof. cav. Luigi
Generali prof. cav. Francesco
Generali prof. gr. uff. Giovanni
Hugues prof. cav. uff. Chiaffredo
Magnanimi prof. Roberto
Malagoli prof. cav. Riccardo
Martinozzi prof. Mario
Mazzotto prof. Domenico
Pes Orlando
Remedi prof. Vittorio
Sabbatini prof. cav. Pio
Sandonnini dott. cav. Tommaso
Sanfelice prof. Orlando.
Solazzi prof. Siro
Soli ing. prof. cav. Gusmano
Sperino prof. cav. Giuseppe
Tarozzi prof. Giulio
Triani avv. prof. comm. Giuseppe
Vanni prof. Luigi
Vicini dott. Emilio Paolo
Zagari prof. Giuseppe

SOCI SOPRANNUMERARI

Bertoni prof. cav. Giulio, *Friburgo* (Svizzera)
Bonasi prof. co: comm. sen. Adeodato, *Roma*
Borri prof. cav. Lorenzo, *Firenze*
Camus prof. cav. Giulio, *Torino*

Carruccio prof. cav. uff. Antonio, *Roma*
Carta avv. cav. uff. Francesco, *Milano*
Ciampolini dott. cav. Ermanno, *Pisa*
Cogliolo prof. comm. Pietro, *Genova*
Della Valle prof. cav. Antonio, *Napoli*
Del Re prof. cav. uff. Alfonso, *Napoli*
Dionisi prof. Antonio, *Palermo*
Ferrai, prof. Carlo, *Parma*
Foà prof. comm. sen. Pio, *Torino*
Galassini prof. Adolfo, *Alessandria*
Lattes prof. Alessandro, *Parma*
Lugaro prof. Ernesto, *Torino*
Manfredi prof. comm. Nicolò, *Pisa*
Mazza prof. cav. Giuseppe, *Pisa*
Melucci prof. sen. Pasquale, *Napoli*
Ovio prof. Giuseppe, *Genova*
Ricci dott. comm. Corrado, *Roma*
Romano prof. Santi, *Pisa*
Roncaglia prof. cav. Emilio, *Bologna*
Rosa prof. Daniele, *Firenze*
Schiff prof. cav. Roberto, *Pisa*
Serafini prof. comm. Enrico, *Pisa*
Tansini prof. cav. Iginio, *Pavia*
Valeri ing. prof. cav. Demetrio, *Piacenza*

SOCI CORRISPONDENTI

Alfani prof. cav. Augusto, *Firenze*
Barera cav. Carlo, *Milano*
Bentivoglio conte prof. Tito, *Lucca*
Berchet dott. comm. Guglielmo, *Venezia*
Bertolini prof. cav. Cesare, *Torino*
Betocchi prof. comm. Alessandro, *Roma*
Billia prof. dott. Michelangelo, *Torino*
Bindoni dott. prof. Giuseppe, *Treviso*
Bormann dott. prof. Eugenio, *Vienna*
Caldarera comm. Francesco, *Palermo*

Canevazzi prof. ing. comm. Silvio, *Bologna*
Cardani prof. cav. Pietro. Dep. al Parlamento, *Parma*
Cavani prof. comm. Francesco, *Bologna*
Ceretti sac. cav. Felice, *Mirandola*
Ciamician prof. comm. sen. Giacomo, *Bologna*
Copeland prof. Rodolfo, *Edimburgo*
Dalla Vedova prof. Riccardo, *Roma*
Dallari prof. Gino, *Pavia*
Davis di Schetton Bernardo, *Londra*
Didion gen. Isidoro, *Parigi*
Ellero prof. comm. sen. Pietro, *Roma*
Faccioli ing. prof. cav. Raffaele, *Bologna*
Favaro prof. comm. Antonio, *Padova*
Fedozzi prof. Prospero, *Genova*
Ficalbi prof. Eugenio, *Pisa*
Gabiani cav. Nicola, *Alessandria*
Gallenga prof. cav. uff. Camillo, *Parma*
Graziani prof. cav. Augusto, *Napoli*
Lindsay Johnson dott. Giorgio, *Londra*
Loria prof. Gino, *Genova*
Luzzatti prof. gr. cordone dep. Luigi, *Roma*
Masi dott. comm. Vincenzo, *Roma*
Messina prof. Pietro, *Palazzolo*
Micheli comm. Vincenzo, *Firenze*
Morelli prof. cav. uff. Alberto, *Padova*
Nasini prof. comm. Raffaello, *Pisa*
Nernst prof. Walter, *Gottinga*
Nicolas dott. prof. A., *Parigi*
Pacchioni prof. cav. Giovanni, *Torino*
Petrone prof. Igino, *Napoli*
Pirondini prof. Geminiano, *Roma*
Pullè prof. co. Francesco Lorenzo, *Bologna*
Ragazzi dott. cav. Vincenzo, *Taranto*
Rohault de Fleury Giorgio, *Parigi*
Roncaglia dott. prof. Giuseppe, *Mantova*
Salvioli prof. comm. Giuseppe, *Napoli*
Sarasin Edoardo, *Ginevra*
Sforza co. comm. Giovanni, *Torino*

Sforza dott. prof. nob. Giuseppe, *Reggio-Emilia*
Solmi prof. cav. Arrigo, *Parma*
Tamburini prof. comm. Augusto, *Roma*
Tarducci prof. cav. Francesco, *Mantova*
Testut prof. Leo, *Lione*
Toschi Giambattista, *Baiso* (Reggio-Emilia)
Vaccari dott. Antonio Maggiore Medico della Regia Marina, *Napoli*
Venturi prof. comm. Adolfo, *Roma*
Volterra prof. cav. senatore Vito, *Roma*
Zoccoli dott. prof. Ettore, *Roma*

SOCI ONORARI

Abbot Charles G., *Washington*
Baccelli prof. gr. cord. dep. Guido, *Roma*
Bianchi prof. cav. uff. Luigi, *Pisa*
Blaserna prof. comm. sen. Pietro, *Roma*
Caetani Lovatelli contessa Ersilia, *Roma*
Cagni contrammiraglio cav. uff. Umberto, *Spezia*
Cipolla co: comm. Carlo, *Firenze*
Dini prof. comm. sen. Ulisse, *Pisa*
Doria march. comm. sen. Giacomo, *Genova*
D' Ovidio prof. comm. sen. Enrico, *Torino*
Emery prof. Carlo, *Bologna*
Fischer prof. Emilio, *Berlino*
Gabba prof. comm. sen. Carlo Francesco, *Pisa*
Grassi prof. sen. Gio. Battista, *Roma*
Guccia prof. Gio. Battista, *Palermo*
Hann prof. Giulio, *Vienna*
Hirschberg dott. Giulio, *Berlino*
Iordao Levy cav. Maria, *Lisbona*
Lorenzoni prof. comm. Giuseppe, *Padova*
Mascart prof. Emilio, *Parigi*
Neuburger dott. Max, *Vienna*
Pfeffer prof. Guglielmo, *Lipsia*
Pirotta prof. cav. uff. Romualdo, *Roma*

Riccò prof. comm. Annibale, *Catania*
Righi prof. comm. sen. Augusto, *Bologna*
Roiti prof. comm. Antonio, *Firenze*
Savoia (di) Principe Luigi Duca degli Abruzzi, *Venezia*
Scialoia prof. comm. sen. Vittorio, *Roma*
Vidari prof. gr. uff. sen. Ercole, *Pavia*
Villari prof. gr. uff. sen. Pasquale, *Firenze*

RELAZIONI DEGLI ATTI ACCADEMICI

Anno 1909-1910

ADUNANZE GENERALI

20 novembre 1909.

Avendosi motivo di apportare qualche modificazione allo statuto accademico vigente (approvato dall' assemblea generale il 18 marzo 1860) dietro proposta del presidente prof. cav. uff. FRANCESCO NICOLI, accolta dai Soci presenti, viene nominata una commissione composta dai seguenti Accademici:

PANTANELLI prof. cav. uff. DANTE

On. FERRARINI avv. LODOVICO

SABBATINI avv. prof. cav. PIO

FRANCHI prof. cav. LUIGI

SANTI prof. cav. VENCESLAO

con incarico di redigere un nuovo statuto e presentarne entro il dicembre p. v. lo schema, da sottoporsi poi all' approvazione del Corpo accademico nel gennaio 1910.

9 dicembre 1909.

Presiede il Direttore della Sezione Arti cav. dott. TOMMASO SANDONNINI, il quale apre la seduta comunicando una lettera con cui il presidente dell'Accademia cav. uff. prof. ing. FRANCESCO NICOLI scusa la sua involontaria assenza e manda ai colleghi, nella ripresa dei lavori accademici, un affettuoso saluto augurale.

Il segretario generale conte cav. GIORGIO FERRARI MORENI, letta una accurata ed applaudita relazione dei lavori e del movimento accademico durante l' ultimo passato anno, espone il bilancio consuntivo 1908-1909 ed il preventivo 1909-1910, che vengono approvati dall' assemblea ad unanimità.

Indi i convenuti nominano:

Direttore della Sezione Scienze, il cav. prof. GIULIO VASSALE.

Direttore della Sezione Lettere, il cav. prof. PIO SABBATINI.

Da ultimo gli accademici eleggono soci attuali i signori:

Dott. GIULIO BARIOLA.

Prof. CARLO FERRAI.

Prof. SIRO SOLAZZI.

Socio corrispondente il prof. GIUSEPPE SFORZA; socio onorario il professore LUIGI BIANCHI.

18, 20, 25 e 28 gennaio 1910.

In queste quattro adunanze l'Assemblea dei soci, udita la relazione della Commissione incaricata di redigere il progetto di un nuovo Statuto accademico, lo prese in accurato esame; e dopo larga discussione ne approvò ad unanimità di voti il testo.

Incaricò poi la Presidenza a trasmetterlo al R. Ministero della Istruzione Pubblica affinchè ne promova la Sovrana approvazione.

ADUNANZE DELLE SEZIONI

27 gennaio 1910.

Presiede il Direttore di Sezione prof. GIULIO VASSALE.

Il socio permanente prof. M. L. PATRIZI presenta, con tracciati annessi, una nota dal titolo « Un nuovo risultato nella tecnica dei riflessi vascolari e l'ipotesi somatica delle emozioni ». Espone come mediante perfezionati accorgimenti tecnici possa oggi venir contestato il fatto, comunemente ammesso dai fisiologi, della lentezza dei movimenti vasomotorii nell'uomo: lenta sarebbe la reazione pletismografica o volumetrica; ma la reazione vascolare propria, il riflesso sfigmico è breve e può iniziarsi in meno di un minuto secondo in seguito a stimoli sensoriali, emotivi e intellettivi. Dice che in base a tale nuovo risultato può essere ripresa la discussione sui rapporti tra fatto vasomotorio e fatto psichico; e la critica alla dottrina Lange James sulla natura vasomotoria o fisiologica delle emozioni ha bisogno di essere riveduta.

Il socio prof. U. AMALDI presenta la Parte I di un suo lavoro su « I gruppi continui infiniti di trasformazioni puntuali dello spazio ordinario ». L'A. ha determinato tutti i gruppi indicati. In questa prima parte determina i gruppi imprimitivi che permutano fra loro un numero semplicemente infinito di superficie.

Lo stesso prof. AMALDI presenta poi, a nome del prof. ITALO AMALDI una nota « Sul quadrangolo piano ». L'A. assegna una notevole espressione delle diagonali di un quadrangolo in funzione dei lati e dell'area. Esse, fissati i lati, sono funzioni irrazionali quadratiche, dell'area, talchè i quadrangoli, aventi dati lati risultano distribuiti in due schiere. L'A. studia come in codeste schiere la forma del quadrangolo varii col variare dell'area.

Il socio prof. C. FERRAI riferisce i risultati di « Ricerche sullo stato del sangue nell'avvelenamento da acido pirogallico ». L'A. studiò il comportamento della pressione osmotica, della conducibilità elettrica della viscosità e della densità del sangue e del siero di sangue negli avvelenamenti acuti mortali e in quelli non mortali; riscontrando nei primi come fenomeno principale un aumento notevole della viscosità del sangue. Negli avvelenamenti, non mortali si ha una notevole progressiva diminuzione della viscosità, del peso specifico, ed aumento della conducibilità elettrica; fatti che raggiungono il loro massimo quando esiste metemoglobinemia ed ematuria, per attenuarsi col progressivo ristabilirsi in salute degli animali in esperimento.

19 febbraio 1910.

Presiede il Direttore di Sezione prof. cav. PIO SABATTINI.

Aperta l'udienza il Direttore cav. PIO SABBATINI da comunicazione di una epigrafe in memoria del matematico Giuseppe Tramontini e di alcune lettere inedite dell' insigne latinista e archeologo Michele Ferrucci scritte al padre del disserente, dal quale il Ferrucci ebbe l' incarico di dettare l' iscrizione. Narra le vicende per cui l' epigrafe che doveva essere incisa in una lapide da collocarsi nella Chiesa di S. Biagio in Modena, rimase inedita, e illustra pure alcuni particolari risultanti dalle lettere.

Indi il socio dott. E. P. VICINI presenta una sua monografia sopra antichi statuti Notarili Modenesi, contenuti in un prezioso codice miniato del secolo XIV che si custodisce presso l' Archivio Notarile di questa città. Dopo una sobria descrizione del codice l' A. tratteggia la storia di questi Statuti e ne espone in ordinata sintesi la vasta materia confusamente sparsa in ben 59 rubriche; offrendo per tal modo una vera e viva dipintura degli usi e delle costumanze ed un' esatta nozione dei diritti e dei doveri dei notai d' allora, di una cioè fra le più elette classi di persone che per la coltura di cui andavano fornite, in tempi nei quali essa era ancora scarsa, ebbero molta parte nel reggimento popolare della nostra città, occupandone sempre i principali uffici.

L'A. rileva ancora che questi Statuti Notarili valgono talvolta mirabilmente ad integrare gli Statuti Municipali promulgati pochi anni prima e termina formulando la speranza che dalla pubblicazione di essi se ne possano avvantaggiare tanto la storia politica e giuridica quanto la storia dei costumi.

Infine il socio VENCESLAO SANTI presenta una nota del prof. Umberto Renda su *Le Rime volgari di Antonio Tebaldeo* contenute nei Codici Estensi. In essa l'A. studia dapprima nella loro costituzione e sotto diversi aspetti gli 8 codici della Biblioteca Estense e del fondo Campori che contengono rime volgari di Antonio Tebaldeo soffermandosi particolarmente a dimostrare l' autografia del codice L. M. 715 che comprende pure il noto rifacimento dell' *Orfeo* polizianesco: di guisa che verrebbe tolto ogni dubbio nell' attribuzione di questo scritto al poeta ferrarese. Inoltre il prof. Renda fa l' elenco alfabetico, illustrato da sobrie note di tutti i componimenti del T. contenuti nei citati codici, distinguendo gli inediti dagli editi.

Onde riassumendo i suoi risultati, si ha che i codici estensi contengono 322 componimenti poetici del T. dei quali ben 248 sono inediti così ripartiti: 241 sonetti, 5 capitoli, 2 strambotti.

26 febbraio 1910.

Presiede il Direttore di Sezione prof. G. VASSALE.

Il socio permanente prof. D. PANTANELLI riferisce di sue « Ricerche sul petrolio emiliano ». Tali ricerche riguardano i petroli dell' Emilia, dal Comune di Rivanazzano (nel circondario di Voghera) ad Imola.

Esse comprendono la determinazione delle loro proprietà e della proporzione dei prodotti principali che si possono ricavare dal prezioso liquido, e che effettivamente si ottengono dove questo è sistematicamente raccolto. L'A. presenta alcune delle disposizioni prese per i suoi studi, limitandosi a quelle che sono nuove fra gli studiosi dello stesso argomento.

Il socio permanente prof. E. BORTOLOTTI legge una « Commemorazione di Valentino Cerruti » che fu socio onorario della nostra Accademia, Senatore del Regno, professore ordinario di meccanica razionale ed incaricato del corso di matematiche superiori nella Università di Roma, direttore della R. Scuola di Applicazione degli ingegneri di Roma, uomo insigne per sapere, per servizi resi alle scienze, alla scuola, alla nazione, morto il 20 agosto 1909 a Croce Mosso (Biella).

Il socio attuale prof. G. CESARI legge quindi una « Commemorazione di Giovanni Bezzi » che fu socio attuale della nostra Accademia e professore emerito della Università di Modena, nella quale tenne l' insegnamento e la direzione della clinica chirurgica per oltre 30 anni. Ben meritò l' illustre medico le solenni onoranze tributategli il 2 marzo 1902 in occasione dell' 80.° genetliaco. Il suo busto marmoreo fu poi inaugurato nell' atrio dell' Ospedale l' 11 giugno 1903. Venne a morte in Reggio Emilia il 10 febbraio del corr. anno.

10 marzo 1910.

Presiede il Direttore di Sezione prof. G. VASSALE.

Il socio attuale prof. GIUSEPPE OVIO presenta un suo lavoro sopra « La formola di ingrandimento dato dal foro stenopeico ».

L'A. stabilisce che l' ingrandimento dato dal foro stenopeico, quando questo sia posto al fuoco anteriore dell' occhio, corrisponde al rapporto fra la lunghezza coniugata posteriore e la lunghezza dell' asse ottico.

Di qui una formula semplicissima che mette nei giusti limiti questa proprietà del foro stenopeico e ne stabilisce esattamente le leggi.

Senza questa formula, sulla base unicamente di ragionamenti approssimativi, s' era dato finora all' ingrandimento un potere eccessivo. Sul dato di questa formula trovasi per questo ingrandimento un massimo pratico minore di 1.5 quale presso a poco dà una lente positiva di quattro diottrie.

Lo stesso socio prof. G. Ovio presenta un' altra sua Nota « Sulla proiezione delle imagini ». L'A. vi dimostra con opportune considerazioni che l'atto psico-fisico della proiezione delle imagini si compie correttamente quando l'occhio è accomodato e non intervengono perturbamenti nell'apparecchio motore estrinseco; ma si compie falsamente quando intervengono questi perturbamenti o quando l'occhio non è accomodato. E ne conclude che la legge della proiezione da un punto di vista generale, può quindi venire così espressa:

« La proiezione delle imagini avviene secondo una retta che dal punto retinale colpito passa per il luogo dove è o si crede essere il punto nodale ».

Infine lo stesso socio prof. G. Ovio dà relazione di un terzo suo lavoro « Sull'angolo visivo ». Con opportuna analisi della formazione delle imagini nell'occhio, l'A. mostra la necessità di identificare l'« angolo visivo coll'angolo principale ».

Nell'occhio accomodato, la verificazione delle leggi sui rapporti di grandezza e di distanza tra imagini e oggetti fatta sulla base dell'« angolo nodale », riuscirebbe complicata perchè il vertice di quest'angolo muta di posto per ogni grado di accomodazione.

Nell'occhio non accomodato, si è nel campo delle imagini diffuse, e queste sulla retina si devono misurare sulle « linee principali » e non sulle « linee nodali ».

L'A. osserva poi che la visione con occhio non accomodato non è una condizione eccezionale, ma fa parte della visione comune, perchè quando vogliamo confrontare più oggetti, l'occhio in un dato istante è accomodato soltanto per uno di essi, mentre per tutti gli altri non è accomodato.

22 giugno 1910.

Presiede il Direttore della Sezione di Lettere prof. P. Sabbatini.

Aperta l'Adunanza, il Presidente dell'Accademia, prof. F. Nicoli commemora il socio On. **Lodovico Ferrarini**, ed a nome di tutti gli Accademici porge alla memoria di Lui un tributo di rimpianto e di onore.

Lo stesso prof. F. Nicoli comunica poi una sua nota intitolata: « Rappresentazione intuitiva degli spazi punteggiati dell'ennesimo grado.

Il socio prof. U. Amaldi presenta la seconda parte del suo lavoro su « I gruppi continui infiniti di trasformazioni puntuali dello spazio a tre dimensioni ».

Il socio prof. G. Ovio riferisce su di un suo « Secondo contributo allo studio della prospettiva dal lato oculistico ». L'A. ritiene che le leggi della prospettiva non debbano uscire dai limiti di approssimazione che hanno in generale le leggi ottiche. Uscendone, si può incorrere in contraddizioni ed in conclusioni teoriche.

Stando nei limiti di queste approssimazioni, non si impongono, come potrebbe credersi, restrizioni all'atto visivo perchè la visione comune non esce mai da questi limiti.

Ritiene inoltre troppo grande l' angolo prospettivo, comunemente ammesso, e non pratica la supposta e necessaria immobilità dello sguardo.

La « veduta d' insieme » non è efficace che se contenuta entro un angolo di 1-2 gradi, i « movimenti dello sguardo » sono necessari per la « veduta dei particolari ».

Con questi movimenti si ottengono errori prospettivi così minimi che vanno completamente trascurati.

29 giugno 1910.

L' adunanza ha luogo nell'Aula Magna del Collegio S. Carlo.

Presiede il Direttore della Sezione di Scienze, Prof. G. VASSALE.

Aperta l' adunanza il socio prof. B. DUSI commemora l' accademico on. prof. **Lodovico Ferrarini,** illustrando ampiamente l' opera di Lui, come uomo, come insegnante, come scienziato.

Il socio prof. M. L. PATRIZI presenta i grafici originali delle esperienze istituite nel Laboratorio di Fisiologia e di Psicologia sperimentale sul tema: « Nuovo testo mentale ». « Un indice autografico ed incosciente del potere inibitore ». Dice d' aver proposto già un altro metodo indiretto per la misura della capacità inibitrice d' un soggetto e si riferisce alla « curva autografica e psicometrica dell' attenzione », curva la quale si distingue per piccolissime oscillazioni negli individui a forte potere inibitore e per grandi oscillazioni nei deficienti, negli indeboliti, nei malati di volontà (bambini, isteriche, nevrastenici ecc.).

Col metodo presente si propone di misurare approssimativamente la forza di inibizione spiegata sopra quei fenomeni somatici che accompagnano una impressione semplice od emotiva: e precisamente sopra le reazioni vascolari.

Il soggetto, con applicato a una mano un apparecchio pletismografico (*guanto volumetrico*), è, insieme allo sperimentatore, in una camera quasi buia, lontano e libero, per quanto è possibile, da stimoli, che, dal di dentro o dal di fuori, possano destare la reagibilità vasomotrice. In momenti opportunamente scelti il soggetto è avvisato che, a pochi secondi di distanza, si produrrà un fenomeno ben distinto e di discreta intensità (rintocco di campana p. e.) ed è esortato ora ad accogliere il fenomeno indifferentemente, ora ad aspettarlo con una rappresentazione il più possibile perspicua, a non lasciarsi affatto sorprendere, *a frenarsi,* fermamente, ma intimamente, cioè senza far intervenire movimenti o accentuazioni consapevoli di tonicità muscolare. I tracciati esibiti dall'A. dimostrano che un atto energico di volontà può riuscire a scemare o a inibire del tutto la involontaria ed incosciente reazione vascolare; che quest' effetto è quasi sempre raggiunto da individui adulti e normali con saldo potere inibitore; che meno facilmente esso ottiensi nelle donne, quasi mai nei bambini, negli alcoolizzati, negli individui altrimenti insufficienti rispetto ai propri poteri inibitori. L' A. ri-

chiama l' attenzione sull' utilità che siffatto procedimento, aggiunto agli altri della così detta « psicologia individuale » potrà avere nell' esame psicologico d' un soggetto.

Lo stesso socio prof. PATRIZI mostra i tracciati di altre ricerche pletismografiche compiute col suo *guanto volumetrico*: « Sul punto di mira dell' attenzione e sulla localizzazione dell' espressione motrice ». Il soggetto d' esperienza tiene l' una e l' altra mano nei guanti volumetrici, uguali perfettamente di forma e di volume, e in rapporto con leve scriventi di identica sensibilità e lunghezza. A un dato segnale è invitato a portare l' attenzione vivissima alle dita della mano destra o a quelle della mano sinistra, sulle quali vengono in precedenza disegnate cifre, lettere o figure geometriche, allo scopo che riesca facile pel soggetto stesso la rappresentazione di una data parte del corpo e la concentrazione dell' attenzione. La reazione pletismografica si palesa più spiccata in quella delle due regioni simmetriche che è mèta del conato attentivo: se l' individuo fissa il pensiero sulla mano destra, il riflesso vascolare è qui più profondo che a sinistra: se — frapposto il tempo necessario a che l' oscillazione volumetrica sia calmata — l' individuo muta direzione al suo pensiero e lo fissa sulla mano sinistra, si inverte anche la proporzione dei due riflessi sanguigni. Sarebbe in certo modo verificato il detto comune d' un trasporto di pensiero su questo o su quel punto del corpo, purchè il concetto di pensiero sia ristretto alla realtà della propagazione di un' onda vasomotrice dei centri cerebrali alla zona periferica, ove l' atto dell' attenzione si localizza.

Infine lo stesso socio prof. L. M. PATRIZI, presenta, a nome del laureando G. MANNI del laboratorio di fisiologia una nota sul tema: « La simultaneità del lavoro mentale e del lavoro muscolare volontario, unilaterale o simmetrico (Ricerche ergografiche) » che viene corredata, in seduta, dalla dimostrazione sperimentale.

Su un tavolo sono disposti due ergografi del Mosso, le cui penne scrivono su di un unico cilindro registratore; e, mediante essi, il soggetto di esperienza traccia la curva del lavoro muscolare, talora isolatamente, colla destra o colla sinistra, tal altra simultaneamente con le due braccia. Lo stesso metronomo (in rapporto con un circuito elettrico) che dà il ritmo delle contrazioni volontarie, allontana ogni due secondi uno schermo da un finestrino a cui si affacciano collo stesso intervallo singole iniziali, non disposte con ordine alfabetico. Dopo un certo numero di impulsi volontari massimi, il soggetto è obbligato ad associare rapidamente delle parole, che comincino per le lettere successivamente apparse, senza ch' egli venga meno al ritmo e all' impulso massimo del lavoro muscolare. Nella maggior parte dei soggetti il congiungimento del lavoro mentale col lavoro muscolare cagiona un sensibile avvallamento della curva della fatica, avvallamento susseguito da una ascesa, dopo la fine del lavoro mentale; in altri soggetti il lavoro mentale ha una distinta influenza dinamogenica sul lavoro muscolare (eccitatazione dei centri psico-motorî), e gli ergogrammi di costoro si riconoscono

per una elevazione corrispondente al breve periodo dell' associazione verbale. Nelle curve di fatica della mano sinistra (emisfero cerebrale destro) l' effetto, sia dinamogenico che inibitore, del lavorìo d' associazione verbale è più accentuato che nelle curve della mano destra (emisfero cerebrale sinistro); e l'A., circa sifatto risultato, che dichiara inatteso, si riserva di formulare la interpretazione.

Il socio G. B. De Toni presenta una memoria dal titolo: « Il carteggio degli italiani col botanico Carlo Clusio nella Biblioteca Leidense » e ne riassume brevemente il contenuto; ponendo in rilievo l' importanza che le lettere dei corrispondenti del Clusio hanno, sia per il fatto che esse arrecano inattese notizie biografiche su alcuni semplicisti, quali Luigi Anguillara ed Evangellista Quattrami che finirono nella Corte Estense a Ferrara, sia per il fatto che esse informano sopra la introduzione di piante esotiche in Italia ed altre cose interessanti per la storia della botanica. L' autore insiste sulla utilità della edizione degli antichi epistolarii, i quali costituiscono una fonte sicura per la storia della Botanica.

Il socio prof. Arnaldo Maggiora, riferendosi ad una dimostrazione fatta a nome proprio e del dott. Giulio Garofani, nella VI Riunione dei Patologi italiani in Modena, il 29 settembre 1909, comunica che, avendo proseguito, insieme con lo stesso dott. Garofani, le indagini tendenti a stabilire « la natura morfologica del *virus* del tifo essudativo » potè riscontrare nei preparati di cervello dei polli morti di questa malattia, la presenza pressochè costante dei corpuscoli descritti dal Prowezek, ma su la specificità di questi crede opportuno di riserbare qualsiasi giudizio, perchè, sebbene in numero molto minore, corpuscoli, da questi non differenziabili per le note morfologiche e per il modo di comportarsi di fronte alle sostanze coloranti, si riscontrano anche nei preparati di cervello normale degli stessi animali.

Lo stesso socio prof. Arnaldo Maggiora, a nome proprio e del dottore Mario Tirelli, riferisce intorno ad « Alcune proprietà biologiche del *virus* del tifo essudativo ».

Il *virus* inoculato alle oche non sempre scompare dal sangue per localizzarsi nel sistema nervoso centrale; allorchè si tratta di animali giovani può darsi che permanga tuttavia nel sangue, pur riuscendo virulento il sistema nervoso centrale.

Altre volte il *virus* permane nel sangue uno, due, tre giorni per localizzarsi poscia solamente nel cervello; oppure, se si tratta di animali più resistenti, dopo che il *virus* è rimasto qualche giorno nel sangue riesce neutralizzato.

La resistenza vitale del *virus* contenuto nel sangue conservato all' oscuro ed in ambiente fresco in tubetti di vetro può spiegarsi anche sino a 664 giorni, e quella del *virus* localizzato nel sistema nervoso conservato in essiccatore va anche oltre; in vero in un caso essa risultò di giorni 749 ed in altro di giorni 1294.

Infine lo stesso socio prof. A. MAGGIORA, a nome proprio e del dottore CARLO FERRARINI, comunica la descrizione di una « Nuova forma morbosa del tifo essudativo, la *forma nervosa cronica* », caratterizzata da fenomeni convulsivi segnalatamente nei muscoli del collo, da scoordinamento dei movimenti e da una quasi completa cecità; e descrive un caso della detta malattia che data da oltre 18 mesi.

Il socio prof. C. BONACINI riferisce su « Alcuni lanci di palloni-piloti eseguiti nell'Osservatorio Geofisico dell'Università ». Dopo accennato all'impianto di una sezione aereologica nell'Osservatorio stesso, dice della prima serie di lanci fatti in accordo con altri Osservatorî dell'alta Italia nella seconda decade di maggio, ed espone i risultati di questa serie.

Il socio prof. C. FERRAI presenta quindi una nota del dott. P. ROSSI « Sul contenuto in adrenalina delle capsule surrenali in alcuni avvelenamenti sperimentali.

L'A. ha studiato il comportamento dell'adrenalina nelle capsule surrenali negli avvelenamenti sperimentali da fosforo, da sublimato corrosivo e da arsenico.

Con ricerche preliminari su varii metodi colorimetrici di dosaggio dell'adrenalina (Battelli, Abelay, Zanfrognini, Commessalti) egli ha potuto stabilire: che il metodo Battelli è poco sensibile e poco costante nei risultati; che gli altri tre metodi sono abbastanza concordi per quel che riguarda i risultati ottenuti dosando l'adrenalina del paraganglio surrenale del bue; che il metodo Zanfrognini accoppia alla massima sensibilità una maggior semplicità di tecnica. Con questo metodo, dosando l'adrenalina delle capsule surrenali di cani intossicati acutamente, l'A. ha trovato che l'adrenalina, negli avvelenamenti citati, diminuisce rapidamente fino a scomparire totalmente: ciò, con particolare intensità, avviene negli avvelenamenti da fosforo e arsenico.

Opportuni controlli furono stabiliti dosando l'adrenalina delle capsule di cani uccisi con la puntura del bulbo.

L'A. ritiene che questa scomparsa dell'adrenalina non sia dovuta a distruzione diretta dell'adrenalina stessa, ma ad un esaurimento funzionale del paraganglio, dovuto al superlavoro ad esso richiesto, come organo di difesa contro l'azione tossica.

Lo stesso socio prof. C. FERRAI presenta un lavoro del dott. BRUNETTO BAECCHI sulle « Variazioni delle proprietà biologiche del siero di sangue in alcune intossicazioni sperimentali ».

L'A. ha studiato il modo di comportarsi nei cani avvelenati acutamente con fosforo e con arsenico di diverse proprietà biologiche del siero di sangue rappresentate dalla eventuale azione anticomplementare, dal contenuto in ambocettore emolitico naturale, in complemento e in emolisina naturale.

I risultati principali a cui l'A. è pervenuto sono i seguenti:

1.° Nel siero normale dei cani esiste frequentemente un'azione anticomplementare, la quale sotto l'influenza dell'avvelenamento sia da fosforo

che da arsenico va diminuendo fino a scomparire totalmente del tutto negli ultimi momenti. Nei rari casi in cui un' azione anticomplementare manca a condizioni normali, essa non compare sotto l' influenza dell' avvelenamento.

2.° Il comportamento dell' embocettore emolitico naturale è difficile a stabilire almeno nei cani per la presenza frequente dell' anticomplemento che indubbiamente assorbe del complemento riattivante; tuttavia nei casi in cui azione anticomplementare manca all' inizio dell' esperimento, anche la quantità di ambocettore emolitico naturale va incontro a diminuzione.

3.° Il complemento subisce una rapida e considerevole riduzione fino alla scomparsa negli ultimi momenti.

4.° L' emolisina naturale va pure diminuendo progressivamente fino alla scomparsa.

Come conclusione generale è da ritenere che le diverse proprietà biologiche del siero di sangue surriferite, qualunque esse sieno a condizioni normali, subiscono tutte quante una diminuzione quantitativa più o meno marcata sotto l' influenza dell' avvelenamento acuto sia da fosforo che da arsenico.

Infine lo stesso socio prof. C. Ferrai presenta una nota del dottore C. Ragazzi « Sulle variazioni del potere opsonico del siero di sangue in alcune intossicazioni sperimentali ». L'A. porta un contributo sperimentale allo studio della questione delle concause, trattata coi metodi della moderna biologia: ha saggiato il potere opsonico del siero di sangue in cani intossicati con alcuni veleni minerali: fosforo, arsenico, acetato di piombo e sublimato corrosivo.

La misura del potere opsonico fu eseguita con un metodo speciale, particolarmente idoneo alla ricerca sperimentale. Le caratteristiche sue precipue sono: l' uso di una emulsione costante di microrganismi morti e la esecuzione contemporanea su due porzioni del siero saggiato, l' una attiva e l' altra inattivata.

Con tale metodo, che si è rivelato di notevole esattezza e praticità, l'A. è giunto alle seguenti conclusioni:

a) Nel corso di avvelenamento da fosforo e da sublimato il potere opsonico del siero si abbassa rapidamente per annullarsi o quasi, quando l' animale è in fin di vita.

b) Negli avvelenamenti da composti arsenicali il potere opsonico del siero segue le alternative di miglioramento e peggioramento dello stato generale dell' animale: in prossimità della morte si abbassa rapidamente.

c) Nell' avvelenamento da acetato di piombo il potere opsonico non assume valori notevolmente divergenti dai normali.

Con opportuni controlli l'A. ha potuto inoltre stabilire che il potere opsonico ha, nelle dette intossicazioni, un comportamento differente da quello di alcune proprietà fisico-chimiche del siero, ed uno analogo ma non identico a quello di altre proprietà biologiche del siero (contenuto in complemento ecc.).

RELAZIONI DEGLI ATTI ACCADEMICI

Anno 1910-1911

ADUNANZE GENERALI

29 novembre 1910.

Presiede il prof. cav. uff. FRANCESCO NICOLI.

Udita la relazione del segretario generale sul lavori e sul movimento del personale accademico durante l' ultimo passato anno, e dopo l' esposizione ed approvazione del consuntivo 1909-1910 e del preventivo 1910-1911, l' assemblea ha proceduto alla rinnovazione delle cariche accademiche resasi necessaria per le riforme statutarie recentemente approvate da apposito sovrano decreto.

Sono risultati eletti:

Presidente cav. uff. prof ing. FRANCESCO NICOLI.

Segretario generale conte cav. GIORGIO FERRARI MORENI.

Vice segretario generale cav. prof. VENCESLAO SANTI.

Bibliotecario cav. prof. ing. GUSMANO SOLI.

Tesoriere economo comm. prof. GIUSEPPE CESARI.

Direttori:

Sezione di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali: cav. prof. GIULIO VASSALE.

Sezione di Scienze Morali, Giuridiche e Sociali: cav. prof. LUIGI FRANCHI.

Sezione di Storia, Lettere ed Arti: comm. prof. TOMMASO CASINI.

Segretari:

Prof. CARLO BONACINI (I Sezione). — Prof. SIRO SOLAZZI (II Sezione). — Prof. MARIO MARTINOZZI (III Sezione).

A sopperire nella Commissione incaricata della compilazione del Regolamento Accademico, alla perdita del defunto on. LODOVICO FERRARINI, è stato nominato il prof. BARTOLOMEO DUSI.

8 febbraio 1911.

Presiede il presidente dell'Accademia prof. cav. uff. FRANCESCO NICOLI.

Il socio prof. C. BONACINI, direttore del locale Osservatorio, legge la « Commemorazione di Giovanni Schiapparelli » che fino dal 1867 era stato

eletto per acclamazione socio onorario della nostra Accademia. L'oratore rievoca sommariamente la vastissima e meravigliosa opera del compianto astronomo milanese, salito in fama di uno dei più grandi scienziati del mondo, e nel quale l'Italia ha perduta una delle sue glorie più pure. Ricorda particolarmente i rapporti che l'illustre Estinto ebbe col nostro Osservatorio, a proposito delle misure della latitudine di Modena, fatte dal Bianchi e dal Ragona.

È poi approvata la proposta di domandare la rettificazione di un errore materiale di citazione di un articolo del vecchio Statuto nell' art. 27 dello Statuto nuovo.

In fine si procede alla nomina per votazione a schede segrete del direttore della Sezione di Scienze morali, giuridiche e sociali, e riesce eletto il prof. avv. cav. PIO SABBATINI.

13 maggio 1911.

Presiede il prof. cav. uff. FRANCESCO NICOLI.

Il socio avv. cav. prof. PIO SABBATTINI commemora il socio defunto prof. cav. **Luigi Olivi.**

Esamina l'opera scientifica di lui come insigne cultore del Diritto Internazionale, che per oltre un trentennio insegnò con plauso nella R. Università di Modena.

Pone in evidenza i pregi delle molteplici monografie da lui in diversi tempi pubblicate in Riviste italiane e straniere, raggruppandole per affinità di argomenti, e si sofferma sopratutto sul Manuale di diritto Internazionale Pubblico e Privato, edito dalla Società Editrice Libraria di Milano nel 1902, di cui stava curando la seconda edizione, essendo la prima già esaurita.

Parla ancora del prof. Olivi come uomo di azione, avendo egli sentito il bisogno di rendere fattiva, produttrice di bene l'opera sua di scienziato, e dimostra come nei molteplici uffici, da lui disimpegnati con instancabile operosità, portasse sempre la nota della bontà e serenità dell' animo suo, la tolleranza e benevolenza verso coloro che dissentivano dalle sue opinioni scientifiche e religiose.

Da ultimo vien data comunicazione agli Accademici di una lettera ministeriale in data del 22 aprile 1911, colla quale a proposito di una correzione da farsi all'articolo 27 del nuovo Statuto accademico, viene richiesta una nuova formula del detto articolo, e una relazione illustrativa della proposta modificazione. E l'assemblea udita l'accurata relazione del collega prof. L. FRANCHI ad unanimità approva la narrativa nonchè la proposta di insistere sulla già domandata rettificazione ed incarica la Presidenza di promuovere la sanzione reale della rettificazione stessa.

ADUNANZE DELLE SEZIONI

25 gennaio 1911.

Presiede il Direttore della 1.ª Sezione prof. G. VASSALE.

Il professore stesso comunica una lettera del Presidente dell'Accademia, in cui questi, giustificata la sua assenza, commemora il centenne patriota **Francesco Prampolini,** la cui morte ha recato vivo dolore a tutti coloro che sono animati da sentimenti di ammirazione e riconoscenza verso gli Eroi, che efficacemente contribuirono a rendere la nostra patria indipendente ed una, ed aggiunge di esser sicuro di aver interpretato i sensi dei Colleghi, intervenendo, come rappresentante dell'Accademia, ai funerali di Lui, che furono come dovevano essere, una ben meritata apoteosi.

Il socio prof. S. SOLAZZI presenta un suo lavoro sul tema: « Di alcuni punti controversi nella dottrina romana dell' acquisto del possesso per mezzo di rappresentanti ». L'A. si propone di dimostrare che non è fondata la dottrina, per primo sostenuta dall'Alibrandi e divenuta poi dominante tra i romanisti italiani, secondo cui il diritto classico non avrebbe riconosciuto la rappresentanza del tutore e dei magistrati municipali nell' acquisto del possesso. A tal uopo egli imprende una minuta critica degli argomenti di ordine generale addotti dall'Alibrandi, e tratta varie questioni interessanti tanto il tema della rappresentanza quanto quello del possesso. Tra l' altro, l'A. dimostra che il diritto classico non esigeva il mandato speciale nel procuratore e che i testi, contrapponendo il procuratore munito del mandato (*verus procurator*) al gestore negozi (*falsus procurator*) per cui occorre la ratifica, sono, contrariamente all' avviso del Bonfante, genuini; che il diritto classico ammetteva il pupillo *infantia maior* ad acquistare il possesso senza l' *auctoritas* del tutore; che l' acquisto del possesso (*tutore auctore*) in favore dell' infante è stato riconosciuto, perchè, essendo incapace di nutrire l' *animus possidendi,* egli non avrebbe potuto acquistare nemmeno per mezzo di rappresentanti.

Passando ad esaminare le fonti giustinianee in cui la rappresentanza del tutore è positivamente riconosciuta, il Solazzi nega che i seguaci della dottrina dominante ne abbiano sufficientemente dimostrata l' interpolazione mentre non hanno tenuto nel debito conto altri testi contrari alla loro tesi.

Per i municipi si studia il trasferimento delle azioni, l' ammissione della rappresentanza diretta, il graduale riconoscimento della loro capacità ad ottenere la *bonorum possessio,* per venire a trattare del possesso il cui acquisto

era necessario si operasse per mezzo di qualche organo. L'A. si domanda se questo potesse essere il servo e critica i recenti studi sull'acquisto del possesso per mezzo degli schiavi. Infine dopo aver rilevato che, anche a proposito dei municipii, la dottrina dominante non ha utilizzato tutte le testimonianze delle fonti e ha troppo facilmente ritenuto degli emblemi nei passi esaminati, l'A. si ferma sulla l. 27 D. 12.1 e su altri argomenti, dai quali desume che già nell'epoca classica, almeno ad avviso di alcuni giureconsulti, i *municipes* potevano essere rappresentati nell'acquisto del possesso.

Lo stesso socio prof. S. Solazzi presenta una sua Nota sul tema: « L'errore del procuratore e il concetto giustinianeo della rappresentanza ». L'A. studia alcuni passi del Digesto relativi all'errore del procuratore e del *dominus* nei negozi giuridici conclusi dal rappresentante; e rilevandovi varie interpolazioni, osserva che nelle fonti giustinianee la rappresentanza diretta è largamente e sistematicamente riconosciuta.

Il socio prof. Arnaldo Maggiora a nome del dott. Romano Maggiora, assistente nei laboratori della Sanità, riferisce intorno a « Ricerche batteriologiche ed epidemiologiche su l'infezione pestosa nell'uomo e nei ratti ».

Nell'intendimento di portare un contributo al riconoscimento pronto e sicuro del bacillo pestoso, il dott. R. Maggiora studiò le proprietà morfologiche e biologiche di 15 stipiti di bacilli pestosi, dei quali 4 isolati dall'uomo, 11 dai ratti e per termine di confronto estese le sue indagini a 10 bacilli pestisimili.

Di ciascuno stipite, oltre ai caratteri microscopici ed al modo di comportarsi in un grande numero di substrati nutritivi comuni e speciali, studiò il fenomeno dell'agglutinazione con sieri specifici da lui preparati e con il siero Pasteur.

Con tali ricerche il dott. Maggiora dimostra che il bacillo della peste, per i suoi caratteri morfologici e biologici, è sempre differenziabile da tutti i microrganismi ad esso simili, finora studiati, e che lo stesso bacillo della *pseudotuberculosis rodentium* (il quale più degli altri rassomiglia al bacillo della peste), per i suoi caratteri nelle culture in brodo, per non crescere sui terreni nutritivi contenenti caffeina e per il modo di comportarsi all'agglutinazione, si differenzia molto bene dal bacillo pestoso.

In base alle indagini da lui eseguite pone in rilievo la grande importanza, che contrariamente a quanto osservarono altri batteriologi, presenta il fenomeno dell'agglutinazione per la diagnosi differenziale del bacillo pestoso. Dimostra inoltre che in quei casi in cui per le misure sanitarie da adottare per navi con topi morti urge accertare se trattasi o no di peste e quindi non è possibile ricorrere ad uno studio morfologico completo, ma bisogna limitare le ricerche alle proprietà più caratteristiche del microorganismo; con l'osservazione accurata delle lesioni anatomopatologiche riscontrate negli animali catturati, con il sussidio di un diligente esame microscopico degli striscii ottenuti con gli organi malati, con il saggio dell'ag-

glutinazione praticata non appena ottenute le culture pure, si riesce nel maggior numero dei casi ad un diagnostico sufficientemente rapido e sicuro.

Nell' ultima parte del suo lavoro il dott. R. Maggiora porta un contributo di osservazioni epidemiologiche personali al fatto già noto che la peste può serpeggiare fra i topi dei porti e delle navi senza dar luogo a grande moria, mentre il virus possiede sufficiente virulenza, oltrechè per i topi, anche per infettare l' uomo, e conchiude alla necessità di una vigilanza continua ed attiva, a base di indagini batteriologiche sistematiche sugli anzidetti roditori, tanto delle navi quanto nei porti, onde evitare il pericolo che questa infezione si stabilisca endemica fra i topi dei porti d' Europa, ed in considerazione della grande importanza di questi animali per la diffusione della malattia all' uomo.

Infine il socio prof. G. VASSALE, a nome dei dottori A. MASSAGLIA e M. TIRELLI presenta una relazione su « L' epidemia colerica di Cerignola nell' anno 1910 », illustrata da fotografie e diagrammi.

30 maggio 1911.

Presiede il Direttore della Sezione prof. G. VASSALE.

Il socio prof. GIUSEPPE OVIO presenta uno suo studio su « L' immagine ciclopica nello specchio piano ». Lo studio riguarda un fenomeno dovuto a fatti di diplopia e di astrazione, pel quale quando ci guardiamo nello specchio apparisce l' immagine della nostra faccia, con un occhio solo.

L'A. che rilevò questo fenomeno, avverte che per vederlo è necessario fissare un punto dello specchio, anzichè un punto dell' immagine, e ne dà una chiara dimostrazione ottico-fisiologica.

Il socio prof. G. SPERINO presenta poi un lavoro del prof. RICCARDO SIMONINI sul tema: « Radiografia dello scheletro nell' atrofia muscolare idiopatica infantile ».

L'A. espone le ricerche radiografiche fatte in cinque casi di miopatia, tipo Duchenne (pseudo-ipertrofica), di cui analoghe ricerche furono fatte solo nell' adulto (Merle, Roulot).

Riferiti i diversi caratteri particolari presentati dai singoli infermi illustra le molte radiografie di parti diverse dello scheletro di ciascun soggetto; dalle quali risulta evidente ipotrofia delle ossa, rarefazione, allontanamento dei capi articolari ed altre alterazioni sopratutto costanti in alcune ossa. Considerando l' età differente dei fanciulli, appare che dette alterazioni dello scheletro si accentuano col progredire della malattia.

Dunque nell' atrofia muscolare progressiva infantile la miopatia non può considerarsi l' unico fatto, l' unica localizzazione: i due elementi dell' apparato motore vengono colpiti alla stessa guisa, sebbene forse con maggior lentezza l' elemento osseo. Dette alterazioni ossee non rappresentano una rarità, ma un fatto costante, dovuto alla medesima causa che determina la miopatia. La loro importanza per la diagnosi differenziale potrà

risultare quando analoghe ricerche siano state ripetute nelle atrofie secondarie.

17 giugno 1911.

Presiede il Presidente dell'Accademia prof. F. NICOLI il quale comunica che l'Accademia ha preso parte con propri delegati alle feste onorarie e commemorative dei senatori Capellini e Pacinotti e di Carlo Matteucci testè celebrate a Bologna a Pisa a Forlì.

Il socio effettivo prof. G. ALBERTOTTI, Direttore della Clinica oculistica di Padova, legge una sua Memoria che ha per titolo « Micro e macrottalmo congeniti ». Essa è un contributo allo studio dell'anomalie congenite dell'occhio; e si riferisce ad ammalati che l'A. studiò ed enucleò nella Clinica oculistica di Modena (durante il ventennio in cui ne fu Direttore) e dei quali presenta la storia clinica, le preparazioni anatomiche con disegni colorati e le considerazioni relative.

Lo stesso prof. ALBERTOTTI presenta per la pubblicazione negli Atti una « corrispondenza inedita di Giulio Cesare Cordara a Francesco Cancellieri (1772-1784).

Legge alcune note riguardanti la vita di Giulio Cesare Cordara dei Conti di Calamandrana, ed espone sommariamente il contenuto di 500 lettere del Cordara al Cancellieri, che egli fece trascrivere recentemente dagli originali esistenti a Londra nel *British Museum.*

Queste lettere sono interessanti specialmente per la luce che portano sopra le opere letterarie del Cordara men conosciute ed in particolar modo sopra i suoi commentari scritti in Alessandria negli ultimi anni di sua vita.

L'A. notifica inoltre con precisione l'attuale presenza nel *British Museum* di 300 lettere del Tiraboschi al Cancellieri (add. Ms. 22887) di cui la prima è del 26 marzo 1776 e l'ultima del 13 maggio 1794; le quali completerebbero la corrispondenza Cancellieri - Tiraboschi, poichè la Biblioteca Estense possiede 301 lettere del Cancellieri al Tiraboschi, di cui la prima è del 6 aprile 1776 e l'ultima del 7 maggio 1794.

L'A. aggiunge ancora come da informazione cortesemente avuta in questi giorni dal sig. G. F. Warner Conservatore dei Mss. nel Museo Britannico, quelle lettere del Tiraboschi furono vendute dal Cancellieri stesso nel 1825 (due anni prima della sua morte) a Dawson Turner di Ipswich, di cui la collezione dei Mss. fu messa in vendita a Londra dal 5 al 10 giugno 1859. A quella vendita il Museo Britannico acquistò le sovracennate lettere originali del Cordara e del Cancellieri.

Il socio effettivo prof. C. BONACINI descrive un « Eliofanometro a selezione da lui ideato, dove la registrazione è triplice, cioè avviene separatamente per la parte ultravioletta, per la luminosa e per la ultrarossa della radiazione solare.

OPERE PERVENUTE ALLA R. ACCADEMIA

nell' anno 1909-10.

I.

Istituti ecc.

AIX . . . . *Faculté de Droit.* — ***Annales:*** T. II, 1908.

» . . . . *Faculté de Lettres.* — ***Annales:*** I., II, 1908; T. III, 1909.

AMIENS . . . . . . *Société des Antiquaires des Picardie.* — ***Mémoires:*** Quatriéme Série, T. VI, 1910. — ***Bulettin trimestriel:*** Année 1908, Année 1909, 1-3 trimestre. — ***Album*** archéologique, 17^e fascicule, 1909.

» . . . . *Société des Antiquaires de Picardie.* Fondation Ledieu. — ***Dictionnaire*** historique et archéologique de la Picardie, I. Arrondissement d'Amiens Canton d'Amiens Boves et Conty (1909).

» . . . . *Société des Antiquaires de Picardie.* Fondation Edmond Soyez. La Picardie. Arrondissements d'Abbeville, 1909.

» . . . . *Société Linnéenne du Nord de la France.* — ***Mémoires:*** Tome Douzième 1905-1908 (1908).

AMSTERDAM . . . . *K. Akademie van Wetenschappen.* — ***Verhandelingen:*** Eerste Sectie, Deel X, N. 1 (1909); Tweede Sectie, Deel XIV, N. 2, 3, 4 (1908-1909); Deel XV, N. 1 (1909). Afdeeling Letterkunde. Nieuwe Reeks, N. 2 (1909). — ***Verslagen*** en Mededeelingen, afdeeling Letterkunde. Vierde Reekts, IX Deel (1909). — ***Verslagen*** Afdeeling naturkunde, Deel XVII (1908-1909) — ***Proceedings*** of the Section of Sciences, Vol. XI (1908-1909) — ***Sex Carmina*** in certamine poetico Hoeufftiano magna laude ornata MCMIX. (V. Autori: Pascoli J., Casoli A. M., Rocco J. A., D'Ales A., Reuss F. X., Zappala A., Tranquillini-Moltedo F. — Jaarboek, 1908 (1909).

AUXERRE. . . . . . *Société des Sciences historiques et naturelles de l' Yonne.* — ***Bullettin:*** Année 1907, 61^e Volume (11^e de la 4^me Serie) (1908). — Année 1908, 62^e Volume (12^e de la 4^me Serie)i

BALTIMORA . . . . *American Journal of Mathematics.* — Vol. XXIX, 1907; Vol. XXX, 1908; Vol. XXXI, 1909; Vol. XXXII, N. 1-2, 1910.

» . . . . *Johns Hopkins University.* — ***Circular:*** N. 10 December 1910; N. 1-9 January-November 1907; N. 1-9 January-November 1908; N. 1-9 January-November 1909; N. 1-4 January-April 1910.

» . . . . *Jhons Hopkins University.* — ***Studies*** in historical and political science, Series XXV, January-December 1907; Series XXVI, January-December 1908; Series XXVII, January-December 1909.

BARCELONA . . . . — *Real Academia de Ciencias y Artes.* — **Memorias:** Tercera època, Vol, VII, N. 6-17, 1909; Vol. VIII, 1-23, 1909-1910, — **Boletin:** Tercera època, Vol. II, N. 11, 1909; Vol. III: Tercera època, N. 12, 1910. — **Nomina** del Personal académico, 1909-1910,

BATAVIA . . . . . . *Bataviaasch Geneootschap van Kunsten en Wetenschappen.* — **Verandelingen:** Deel LVII 1909; Deel LVIII, 1-2, Stuk 1910. — **Notulen:** Deel XLVI Afl. 2-3-4, 1908; Deel XLVII Afl. 1-4 1909: Deel XLVIII afl. 1-2 1910. — **Tijdschrift** voor Indische Taal Land en Volkenkunde. Deel LI Afl. 2-6, 1908-1909; Deel LII Afl. 1-2. 1910. — **Rapporten** van de Commissie in Nederlandsch-Indie voor ondheidkurdig Onderzoek op Java en Madoera 1907 (1909). — **Dagh-Register** gehouden int Casteel Batavia vant passerende deer ter plaetse als over geheel Nederlandts India, Anno 1679 (1909). — **Ethnographica** in het Museum van het Bataviaasch Geneotschap 1910. — **Handleiding** bij-den Plattegrond van het Museum. — **Register** op artikelen voorhomende in het Tijdschrift en de Verhandelingen 1907-1908.

BERGEN . . . . . . *Bergens Museum* **Aarbog**: 1908; 1-2, Hefte 1909: 1-2, Hefte 1910. — Aarsberetning for 1907 (1908); for 1908 (1909), — An account of the Crustacea of Norway with short descriptions and figures of all the species by G. O. SARS, Vol, V, Parts XXI-XXX (1908-1910). — **Skrifter:** Ny Raekk, Bd. I, N. 1, 1909.

BERLINO . . . . . . *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.* — **Abhandlungen:** Physikalisck-Matematische Klasse, Jahrgang 1908; Jahrgang 1909. — Philosopisch-historiche Classe, Jargang 1908; Jargang 1909. — **Sitzungsberichte:** Jahrgang 1909. Erster Halbrand, Jannuar bis Juni; Jahrgang 1909; Zweiter Halbrand Juli bis december; Jarhgang 1910, Erster Halbrand Januar bis Juni; Jahrgang 1910, *Zweiter* Halbrand, Juli bis december. — **Jahrbuch** ueber die Fortschritte der Mathematik Band 37, Jahrgang 1906. Heft 2-3, 1908-1909; Band 38, Jahrgang 1907, 1909-1910.

BESANÇON . . . . . *Société d' émulation du Doubs.* — **Memoires:** Septiéme Serie, Dixième Volume 1905 (1906). — Table général recapitulative 1841-1905 (1907). — Huitiéme Serie, Premier Volume 1906 (1907); Deuxiéme Volume 1907 (1908); Troisiéme Volume 1908 (1909).

BOLOGNA . . . . . *R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.* — **Memorie:** Classe di Scienze Fiisiche, Serie VI, Tomo V, 1907-1908 (1908): Tomo VI, 1908-1909 (1909); Classe di Scienze Morali, Serie I, Tomo II, 1907-1908 (1908); Tomo III, 1908-1909 (1909). — **Rendiconto** delle Sessioni, Classe di Scienze Morali, Serie Prima, Vol. I, 1906-07 (1908); Vol. II, 1908-09 (1909); Classe di Scienze Fisiche, Nuova Serie, Vol. XII, 1907-08 (1908); Vol, XIII, 1908-09 (1909).

» . . . . *Società Medico-Chirurgica e Scuola Medica.* — **Bullettino** delle Scienze Mediche, Serie VIII, Vol. VIII, 1908; Vol. IX, 1909; Vol. X, 1910,

» . . . . *Osservatorio della R. Università* — Vedi Autori: Raina M.

BORDEAUX . . . . . *Société des Sciences Physiques et Naturelles.* — **Mémoires:** 6e Serie, Tome IV, 1908. — **Proces verbaux** des Séances, Année 1905-1906; Année 1906-1907; Année 1907-1908; Année 1908-1909.

BORDEAUX . . . . *Académie Nationale des Sciences, Belles Lettres et Arts.* — ***Actes:*** 3ᵉ Serie, 67ᵉ Année 1905; 68ᵉ Année 1906; 69ᵉ Année 1907.

» . . . . *Commission Météorologique de la Gironde.* — **Observations** pluviométriques et termométriques faites dans le Departement de la Gironde de Juin 1906 à Mai 1907 (1907). — ***Bullettin,*** Année 1907 (1908); Année 1908 (1909).

BOSTON . . . . . . *American Academy of Arts and Sciences.* — ***Proceedings:*** Vol. XLIII, N. 13 a 22, February a July 1908; Vol. XLIV, N. 1 a 26, November 1908 a Septembre 1909; Vol. LXV, N. 1 a 15 August 1909 a March 1910.

» . . . . *Boston Society of Natural Science.* — ***Proceedings:*** Vol. XXXIV, N, 1-8, December 1907 - February 1910. — ***Occasional Papers:*** VII, 8-11, April 1908 - June 1909.

BRUNSWICH . , . . *Verein für Naturwissenschaft.* — 15 Jahresbericht für die Vereinsjahre 1905-06 und 1906-07 (1908); 16 für die Vereinsjahre 1907-08 und. — 1908-09 (1910).

BRUXELLES . . . . *Academie Royale de Belgique.* — Classe des Sciences. — ***Mémoires:*** Collection in 4.°, Deuxième série, T. II, fasc. 1, 2, 3, Juillet 1908 - Juillet 1909. — Classe des Lettres et des Sciences morales et politiques et Classes des Beaux Arts. — ***Mémoires:*** Collection in-4.°, Deuxiéme série, T. III, 1908; T. IV, fasc. I, 1908. Collection in-8.° — ***Memoires:*** Classe des Sciences, Deuxiéme série, T. II, fasc. 3-6, Aout 1908 - December 1909. — ***Memoires:*** Classe des Lettres et des Sciences morales et politiques et Classe del Beaux Arts, Deuxiéme Série, T. IV, fasc. 2 et dernier, 1908; T. V, 1909; T. VI, fasc. 1, 2, 1909. — ***Bullettin:*** Classe des Sciences, 1908, 3-12; 1909, 1-12; 1910, 1-6; Classe des Lettres et des Sciences morales et politiques et de la ctasse des Beaux Arts 1908, N. 3-12; 1909, N. 1-12; 1910, N. 1-6. — ***Annuaire:*** 1909, 65ᵉ année; 1910, 66ᵉ annêe,

» . . . . *Academie Royale de Médicine de Belgique.* — ***Mémoires couronnés et autres Mémoires***: Collection in-8°, T. XX, fasc. 1-7, 1908-1909. — ***Bullettin:*** T. XXII, fasc. 9-11, 1908; T. XXIII, fasc. 1 - 11, 1909; T. XXIV, fasc. 1-8, 1910.

» . . . . *Société entomologique de Belgique.* — ***Annales:*** T. 52, 1908; T. 53; 1909. — ***Mémoires:*** T. XV, 1908; T. XVI, 1908; T. XVII, 1909.

» . . . . *Commissions Royales d'Art et Archéologie.* — ***Bullettin:*** 44ᵉ année 1905; 45ᵉ annéee 1906; 46ᵉ annèe 1907.

» . . , . *Observatoire Royal de Belgique.* — Nouvelle Sèrie. ***Annales*** astronomiques: T. XI, fasc. II, 1908; T. XII, fasc. I, 1909. — ***Annales.*** Physique du globe, T. IV, fasc I, 1908; T. IV, fasc. II, 1909. — ***Annuaire*** météorologique pour les années 1908, 1909, 1910. — ***Annuaire*** astronomique pour l'année 1908, 1909, 1910. — ***Liste*** des Observatoires magnetiques et des Observatoires séismologique, 1910.

BUCAREST . . . . . *Observatorul Astronomic si Meteorologie din Romania.* — ***Buletinul Lunar:*** Anul XVII, 1908 (1909); Anul XVIII, 1909 (1910).

BUDAPEST . . . . . *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte und Ungarn*, XXIV Bd. 1906 (1909); XXV Bd. 1907 (1909). Vedi Autori: Hegifoky I, Imre Lörenthey.

BUENOS AIRES. . . *Sociedad Cientifica Argentina.* — ***Anales:*** T. LXVI, Entrega II-VI, Agosto-Diciembre 1908; T. LXVII, Entrega I-VI, Euero-Junio 1909; T. LXVIII, Entrega I-VI, Julio a Diciembre 1909: T. LXIX, Entrega I-III, Enero-Abril 1910, — ***Centenaire*** de la Revolution de Mai 1810-1910. — ***Congrés*** scientifique international Américain. Bulletin N, 1, (1910). — ***Votos*** aprobados por el Congreso en sesión plena 1910.

BUFFALO. . . . . . *Society of Natural Sciences.* — ***Bulletin:*** Vol. VIII, N. 5-6, 1907; Vol. IX (1908-1909).

CAIRO . . . . *Institut Égiptien.* — ***Mémoires:*** T. V, fasc. III, 1908; T. VI, fasc. I-II, 1909. — ***Bulletin:*** Cinquième Série, T. I, II, III, 1907, 1908, 1909; T. IV, fasc. I, 1910.

CAMBRAI . . . . . . *Société d' Émulation.* — ***Mémoires***: T. LXI, 1907; T. LXII, 1908, T. LVIII, 1909.

CATANIA . . . . . . *Accademia Gioenia di Scienze naturali.* — ***Atti:*** Anno 85, 1908, Serie V; Vol. I; Anno 86, 1909, Vol. II; Anno 87, 1910, Vol. III. — ***Bollettino*** delle Sedute, Serie seconda, fasc, 5-13, Dicembre 1908 — Giugno 1910.

» . . . . *Società degli Spettroscopisti italiani.* — ***Memorie:*** Vol. XXXVII, 1908; Vol. XXXVIII, 1909; Vol, XXXIX, 1910.

» . . . . *Relazione dell'Amministrazione Comunale sull' opera compiuta in occasione del disastro di Messina,* Catania 1909. — Complemento documentato della Relazione suddetta, Catania 1909.

CHAMBERY. . . . . . *Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Savoie.* — Quatriéme Série, T. XI, 1909.

CHARBOURG . . . . . *Société Nationale des Siences naturelles et matématiques.* — ***Mémoires:*** T. XXXVI (Quatriéme Série, T. VI), 1906-1907.

COIMBRA . . . . . . *Academia polytechnica do Porto.* — ***Annaes*** scientificos, Vol. I, N. 2, 3, 4, 1906; Vol. II, 1907; Vol. III, 1908; Vol. IV, 1909: Vol. V, N. 1, 2, 3, 1909-1910. — ***Obras*** de Mathematica do Dr. F. GOMES TEIXEIRA, Vol. II, 1906; Vol. III, 1906; Vol. IV, 1908.

COPENHAGEN. . . . *Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark.* — ***Mémoires:*** 7^me Serie, Section des Sciences, T. V, N. 3, 4, 1909-1910; T. VI, N. 3, 4, 5, 1909-1910; T. VII, N. 1, 1909; T. VIII, N. 1-4, 1909-1910. Section des Lettres, T. I, N. 3, 1909. — ***Bulletin:*** 1908, N. 6, 1909; 1909, N. 1-6, 1909-10; 1910, N. 1-5, 1910.

» . . . . *Le temple Étrusco-Latin de l' Italie central* par L. FENGER 1909. Olai Roemeri Adversaria 1910.

CORDOBA . . . . . *Academia Nacional de Ciencias en Cordoba* (Repubblica Argentina). — ***Boletin:*** T. XVIII, entrega 3, 1906.

CRACOVIA . . . . . *Académie des Sciences.* — ***Bulletin*** international: Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Année 1908, N. 9-10, November-Decembre; Année 1909, Premier semestre; Deuxiéme semestre 1910. — Série A: Sciénces Mathématiques, N, 1-7, Janvier-Juillet 1910; Série B: Sciences Naturelles, N. 1 6, Janvier-Juin 1810. — Classe de Philologie, Classe d'Histoire et de Philosophie, Année 1908, N. 6-10, Juin-Decembre; Année 1909, Janvier-Decembre; Année 1910, N. 1 et 2 Janvier-Février. — ***Catalogue*** of Polish Scientific Literature, T. VIII, 1908; T. IX, 1909.

CRISTIANIA. . . . . *Norsk Folkmuseum Saerudstilling* 1-4, 1903-1007. — Foreningen Beretning om Foreningens virksomhet 1908, XIV (1909). — Kort Forer med Planes 1909.

DAVENPORT . . . . (Iowa U. S. A.) *Académie of Sciences.* — ***Proceedings:*** Vol. XII, May 1909, pages 95-222.

DELFT . . . . *Bibliothek der technische Hoogeschool.* — ***Lijst*** der Periodiechen, 2ᵉ Uitgave, Delft 1909. — Vedi Autori: Dogens P. N., Fontein F., Koomans N., Schmutzer J. Söhngen N. L., Tesch P., Van Dijk J. W., Van Gelder J. K., Van Hasselt J. F. B., Van Hoepen E. C. N., Wijnberg A.

DRESDA . . . . . . *Verein für Erdkunde en Dresden.* — ***Mitteilungen:*** Heft 7-10, 1908-1909; Mitglieder Verzeichnis, April 1907, April 1908.

DUBLINO. . . . . . *R. Dublin Society.* — ***Scientific Transactions:*** Vol. IX, Series II, N. VII, VIII, IX, 1908-1909. — ***Scientific Proceedings:*** Vol. XI, N. S., N. 29-32, July 1908-February 1909; Vol. XII, N. 1-36, January 1909-September 1910. — ***Index*** to the Scientific Proceedings and Transactions from 1898 to 1909 inclusive. Proceedings, Vol. IX-XI, Transactions, Vols. VIII-IX. — ***Economiec Proceedings:*** Vol. I, Part 13-16, August 1908-July 1909; Vol. II, N. 1, 2, Febraury-July 1910.

» . . . . *R. Irish Academy.* — ***Proceedings:*** Vol. XXVII, Section A, N. 9-12, March 1908-June 1909; Vol. XXVIII, N 1-3; February-October 1910, Vol. XXVII, Section B, N. 6-11, March-August 1909; Vol. XXVIII, N. 1-8, November 1909-July 1910; Vol. XXVII, Section C., N. 9-18, January-August 1909; Vol. XXVIII, N. 1-12, February-October 1910.

EDIMBURGO . . . . *Royal Society of Edinburg.* — ***Transactions:*** Vol. XLVI, Part II-III, Session 1908-9 (1909); Vol. XLVII, Part I e II, Session 1908-9 (1909-10). — ***Proceedings:*** Vol. XXIX, Session 1908-9; Vol. XXX, Session 1909-1910 (1909-1910).

» . . . . *Royal Observatory of Edinburg.* — ***Annals:*** Vol. III (1910).

FILADELFIA . . . . *American Philosophical Society.* — ***Transactions:*** Vol. XXI, New. Series, Part V, 1908. — ***Proceedings:*** Vol. XLVIII, 1908, N. 188, 189, 190; Vol. XLVIII, 1909, N. 191, 192, 193. — ***The List*** Officers, Members, February 1910.

» . . . . *Historical Society of Pennsylvania.* — ***The Pennsylvania Magazine*** of history and biography. Vol. XXXIII, N. 129-132, January-October 1909; Vol. XXXIV, N. 133-135, January-July 1910.

» . . . . *Academy of Natural Sciences.* — ***Proceedings:*** Vol. LX, 1908; Vol. LXI, 1909; Vol. LXII, Part I, January-March 1910.

» . . . . *Wagner Free Institute of Science.* — ***Transactions:*** Vol. VII, January 1910.

FIRENZE . . . . . . *R. Accademia della Crusca.* — ***Vocabolario:*** Quinta impressione, Vol. X, fasc. 2, 1909. — ***Atti:*** Anno accademico 1907-1908 (1909); Anno accademico 1908-1909 (1910); Adunanza pubblica del 30 gennaio 1910.

» . . . . *R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento.* — ***Pubblicazioni:*** Sezione di Scienze fisiche e naturali. Raccolte Planctoniche fatte dalla R. Nave « Liguria » nel viaggio di circonnavigazione

del 1903-05, sotto il comando di S. A. R. Luigi di Savoia Duca degli Abruzzi, di Daniele Rosa, Vol. I, fasc. V, 1908; Contributo allo studio fisico e chimico dei minerali che per riscaldamento sviluppano acqua. Memoria del prof. U. Panichi, Parte I, 1908; Storia della collezione centrale degli animali vertebrati italiani nel R. Museo zoologico di Firenze, 1876-1908 del prof. E. H. Giglioli; Osservazioni astronomiche fatte all'Equatoriale di Arcetri nel 1907, 1908 e dal 25 Gennaio 1909 al 20 Marzo 1910 da A. Abetti, Fasc., N. 25, 26 e 28, 1908-1910; Catalogo della Biblioteca dell'Osservatorio Astronomico di Arcetri per cura di V. Messeri, Fasc. N. 27,1909. — Sezione di filosofia e filologia: Ezio Levi, Francesco di Vannozzo e la Lirica nelle corti Lombarde durante la seconda metà del secolo XIV, 1908.

Firenze . . . . . . *Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.* — **Bollettino** delle Pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa, 1909, 1910.

» . . . . *Collegio degli Accademici della R. Accademia di Belle Arti in Firenze.* Anno 1907 (1908); Anno 1908 (1909); Anno 1909 (1910).

» . . . . *Edizione Nazionale delle Opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il Re d' Italia.* — Vol. XX ed ultimo, 1909,

Friburgo . . . . . *Naturforschende Gesellschaft zu Freiburg 1, BR.* — XVII, Band. II Heft, 1909; XVIII, Band. I Heft, 1910.

Genova . . . . . . *Società Ligure di Storia Patria.* — ***Atti:*** Vol. XXXVII, 1905; Vol. XXXIX, 1907; Vol. XL, 1908; Vol. XLI, 1908; Vol. XLII, 1908; Vol. XLIII, 1910.

» . . . . *Museo Civico di Storia Naturale.* — ***Annali:*** Serie 3ª, Vol. III (XLIII), 1907; Vol. IV (XLIV), 1908-1909.

Giessen . . . . . . *Oberhessische Geschichtsvereins.* — ***Mitteilungen:*** Neue Folge, XVI, Band 1908; XVII Band 1909.

» . . . . *Oberhessische Gesellschaft für Natur und Heilkunde.* — Neue Folge. ***Bericht***: Medizinische Abteilung, Band 3, 4, 5, 1908-1909; Naturwissenschaftliche Abteilung, Band 2 (1907-1908); Band 3 (1908-1909). — ***Register*** zu den Banden I, 34 (alte Folge jahrgang) 1849-1904 (1910).

Ginevra . . . . . *Institut National Genevois.* — ***Mémoires***: Tome XIX, 1901-1909. — ***Bulletin***: Tome XXXVIII 1909; Tome XXXIX, 1909.

Glasgow . . . . . *Geological Society.* — ***Transactions***: Vol. XIII, Part I, II-III, 1905-1909. ***History***: 1858-1908.

Gottinga . . . . . *K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.* — ***Nachrichten:*** Mathematisch-physikalische Klasse, aus dem Jahre 1908, Heft 1 4; Aus dem Jahre 1909 Heft 1-4; Aus dem Jahre 1910, Heft 1-4. Pilologisch-historiche Klasse aus dem Jahre 1908, Heft 1-6; Aus dem Jahre 1909; Aus dem Jahre 1910, Heft 1-2. — ***Geshäftliche Mitteilungen*** aus dem Jahre 1908; Aus dem Jahre 1909; Aus dem Jahre 1910.

Helsingfors . . . *Societas pro Fauna et Flora Fennica.* — ***Acta:*** Vol. 29, 1906-1908; 30, 1904-1906; 31, 1908-1909; 32, 1909. — ***Meddelanden:*** 33, 1906-1907; 34, 1907-1908; 35, 1908-1909. — ***Festschrift:*** Herrn Professor Dr. J. A. Palmèn zu *seinem* 60 Geburtstage am 7 November 1905 Gewidmet von Schülern und Kollegen, Band I-II, 1905-1907.

INNSBRUCK . . . . *Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg.* — Dritte Folge, 53 Heft 1909; 54 Heft 1910.

KANSAS . . . . . . *Kansas University.* — ***Science Bulletin:*** Vol. IV, 7-20, September 1808 Zoology Number.

» . . . . *The University Geological Survey.* — Vol. IX. Special report on oil and gas, 1908.

KÖNIGSBERG . . . . *Phisikalisch-oekonomische Gesellschaft.* — ***Schriften:*** Vol. XLVIII, Jahrgang 1907 (1908); XLIX, Jahrgang 1908 (1909).

LIEGI . . . . *Société Géologique de Belgique.* — ***Annales:*** Publication trimestrielle in-8°, T. XXXV, 3e et 4e livraison, 17 novembre 1908 — 15 mars 1909.

LIPSIA . . . . *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.* — ***Abhandlungen:*** der Mathematisch-Physische Klasse, XXX Band, N. V-VI, 1908-09; XXXI Band, 1909; XXXII Band, N. 1, 1909. — Abhandlungen der Philologisch-Historiche Klasse, XXVI Bd., N. III-V, 1909; XXVII Bd., 1909; XXVIII Bd. N. I-II, 1910. — ***Berichte*** über die Verhandlungen Mathem.-Phys. Klasse, LX Bd., VI-VIII, 1908; LXI Bd., I-V, 1909; LXII Bd.1, 1910. — ***Berichte*** über die Verhandlungen Philologisch-Historiche Klasse, LX Bd., IV-VIII, 1908; LXI Bd., I-III, 1909; LXII Bd., I-V, 1910.

LISBONA . . . . . . *Academia Real das Sciencias de Lisboa.* — ***Historia*** e ***Memorias:*** Nova Serie, 2a Classe Sciencias moraes e politicas, bellas lettras, Tomo XI, Parte II (Volume LX do Collecçào, 1909. — ***Boletim*** do 2a Classe, Actas e parceres estudos documentos e noticias, Vol. III, Fasc. n. 1. Janeiro, 2 Favereiro, 1910. — ***Actos*** des Sessões de primeira classe, Vol. I, 1899-1904 (1908). — Sessào publica Em 19 de fevereiro de 1905, Em 25 de março de 1906, Em 16 de juno de 1907. — (Vedi Autori: Aranha, Cabreira, Leite de Vasconcellos, Moraes de Almeida.

LONDRA . . . . . . *London Mathematical Society.* — ***Proceedings:*** Ser. 2, Vol. 6, part. 7, 1908; Vol. 7, 1909; Vol, 8, 1910; Vol. 9, Part. 1, 1910. — ***List*** of Members, 12 November 1908.

» . . . . *Britisch Association for the Advancement of Science.* — ***Report*** of the seventy-seventh meeting, Leicester 31 july — 7 august 1907. — ***Report*** of the seventy-eighth Meeting, Dublin september 1908. — ***Report*** of the seventy-ninth Meeting, Winnipeg 1909, August 25 September 1.

LUSSEMBURGO . . . *Institut Grand-Ducal de Luxembourg.* — ***Publications*** de la Section historique, Vol. LIV 1909; Vol. LVI, 1909; Vol. LVII, 1909. — Section des Sciences naturelles, physiques et mathematiques. — ***Archives*** trimestrielles, Nouvelle Série, Tome II et III, Anneés 1907 et 1908.

MACON . . . . . . *Académie de Macon. — Société des Arts, Sciences, Belles Lettres et Agriculture et encouragement au bien de Saone-et-Loire.* — Troisiéme Série, Tome XII, 1907.

MADISON WIS . . . *Wiscosin Academy of Sciences, Arts and Letters.* — ***Transactions:*** Vol. XV, part II, 1907; Vol. XVI, Part. I, N. 1-6, 1908-1909.

MANCHESTER . . . *Literary and philosophical Society.* — ***Memoirs and Proceedings:*** Vol. 53, Part I, Part III, 1908-1909; Vol. 54, 1909-10.

MANTOVA . . . . . *R. Accademia Virgiliana di Scienze, Lettere ed Arti.* — **Atti** e **Memorie**: 1868; Biennio 1877-78 (1879); Anno 1882; Biennii 1882-83 e 1883-84; Bienni 1885-86 e 1886-87; Anno 1887-88 (1889); Bien-1891-92 (1893); Biennio 1893-94 (1895); Anno 1897; Nuova Serie, Vol. I, 1908 (1908-09); Vol. II, Anno 1909 (1909-10); Vol. III, 1910. — Codice 1865; Statuto 1869; Statuto 1909. — Prose e Versi nel giorno natalizio di Virgilio, 1797; Commemorazione funebre del conte Giovanni Arrivabene Prefetto, 1881; Album Virgiliano nel XIX Centenario settembre 1882; Primo saggio di Catalogo Virgiliano, 1882. Vedi Autori: Carli G. G., Guerrieri Gonzaga C., Sartoretti L.

MELBOURNE . . . . *Royal Society of Victoria.* — **Transactions**: Vol. V, Part 1, 1909. — **Proceedings**: New Series, Vol. XXI, Part II, 1909; Vol. XXII, 1909-10; Vol. XXIII, Part I, 1910.

MESSICO . . . . . . *Sociedad cientifica « Antonio Alzate ».* — **Memorias y Revista**: Tomo 25, N. 4-12, Octubre 1907 — Febrero 1909; Tomo 26, N. 6-12, Diciembre 1907 — Junio 1908; Tomo 27, N. 1-10, julio 1908 — Abril 1909.

» . . . . *Observatorio astronomico Nacional de Tacubaya.* — **Observaciones** meteorogicas practicadas durante el año de 1897 (1909). — **Anuario** para el año 1909. Año XXIX (1908); para el año 1910 (1909).

» . . . . *Instituto Geologico de Mexico.* — **Boletin**: N. 25. Texto, Atlas 1910; N. 26, 1908. — **Parergones**: Tomo II, N. 7-10, 1908-09; Tomo III, N. 1-5, 1909-10.

MILANO . . . . . . *R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.* — **Memorie**: Classe di Scienze Matematiche e Naturali, Vol. XXI-XII della Serie III, fasc. I-IV, 1909-1910. — Classe di lettere e Scienze morali e storiche, Vol. XXII-XIII della Serie III, fasc. I-IV, 1910. — **Rendiconti**: Serie II, Volume XLII, 1909, Vol. XLIII, 1910.

» . . . . *Fondazione scientifica Cagnola.* — **Atti**: Vol. Ventesimosecondo che abbraccia gli anni 1907-1908 (1909).

» . . . . *R. Osservatorio di Brera.* — **Pubblicazioni**: N. XLV. Differenze delle longitudini fra Milano e Crea, Osservazioni di G. Celoria e M. Rajna. Calcoli di L. Gabba, 1909. — **Articoli** generali del Calendario ed effemeridi del sole e della luna per l'orizzonte di Milano. Con Appendice, Anno 1909 (1908); Idem Anno 1910 (1909); Anno 1911 (1910).

» . . . . *Annuario Scientifico ed Industriale.* — Anno XLV, 1908; Anno XLVI, 1909.

MODENA . . . . . . *Municipio.* — **Bollettino** di statistica pubblicato per cura dell'Uffizio d'Igiene, Anno X, 1909; Anno XI, 1910.

» . . . . *Consiglio Provinciale.* — **Atti**: 1909 (1910).

» . . . . *R. Università.* — **Annuario**: Anno accademico 1908-1909; Anno accademico 1909-1910.

MONACO . . . . . . *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.* — **Abhandlungen**: Mathematische Klasse, XXIII Band, III Abteilung, 1909; XXIV Band, II Abteilung, 1909; XXV Band, I-III Abteilung, 1909. — I supplement Band, Abteilung, 1-8, 1909-1910. — II suppl. Band, Abt. 1, 1909. —

III suppl. Band, Abt. I, 1910. — ***Sitzungsberichte:*** XXXVIII, Band, Heft, II, 1909; XXXIX Band, Abh. 1-19, 1909-1910; XL Band, Abh. 1-14, 1910. — ***Abhandlungen:*** Philosophisch-Philologische Klasse, XXIII Band, III Abt. 1909; XXIV Band, III Abt. 1909; XXV Band, I Abt. 1909. — ***Sitzugsberinchte:*** Jahrgang, 1908, 7-11 Abhandlungen, 1908; Jahrgang, 1909, 1-9 Abhand. 1909; 1910, 1-2 Abhand. 1910. — ***Abhandlungen:*** Historische Klasse, III Abt. 1909. — Vedi Autori: Grauert Hermann, Heigel von Karl Theodor, Prutz-Hans, Wolters Paul. — ***Almanach:*** 1909.

MONACO . . . . . . *K. Sternwarte in Munchen.* — ***Neue Annalen:*** Band IV, 1909.

MONCALIERI . . . . *Osservatorio del Real Collegio Carlo Alberto.* — ***Bollettino*** Meteorologico e Geodinamico. Osservazioni meteorologiche, Dicembre 1908 ad Ottobre 1910. Osservazioni sismiche, Dicembre 1908 ad Ottobre 1910.

MONS . . . . *Société des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut.* — ***Mémoires et Publications:*** Serie VI, T. IX, 1908; T. X, 1909.

MONTPELLIER . . . *Académie des Sciences et Lettres.* — ***Mémoires:*** Section des Sciences, 2 Serie, T. IV, N. 1-2 (1908-1909). Section des Lettres, 2 Serie, T. V, N. 2, 1909. — ***Bulletin mensuel:*** Mars-Juillet, 1909, N. 3-7 — Janvier-Juillet, 1-7, 1910.

MOSCA . . . . *Société Impériale des Naturalistes de Moscou.* — ***Bullettin:*** T. XXI, Année 1907 (1908); T. XXII, Année 1908 (1909).

NANCY . . . . *Académie de Stanislas.* — ***Mémoires:*** 6ᵉ Serie, T. V (1908); T. VI (1909).

NAPOLI . . . . . . *Società Reale - R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche.* — ***Rendiconto:*** Ser. 3ª, Vol. XIV, Anno XLVII, fasc. 8-12, Agosto-Dicembre 1908; Vol. XV, Anno XLVIII, 1909; Vol. XVI, Anno XLIX, fasc. 1-9, gennaio a settembre 1910. — Accademia di Scienze morali e politiche. — ***Atti:*** Vol. XXXVII a XL, 1906-1910. — ***Rendiconto:*** Anno XLV-XLVIII, 1906-1909. — Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti. — ***Atti:*** N. S., Vol. I, 1910. — ***Rendiconto:*** N. S., Anni XXII-XXIII, 1908-1909. — R. Istituto d' Incoraggiamento, Serie 6, Vol. LX degli Atti 1908.

NEW-HAVEN . . . . *Connecticut Academy of Arts and Sciences.* — ***Transactions:*** Vol. XIII, pp. 299-548, 1908; Vol. XIV, 1908-1910; Vol. XV, July 1909; Vol. XVI, May-Oct. 1910. — ***Mémoires:*** Vol. II, July 1910.

» . . . . *Astronomical Observatory of Yale University.* — ***Transactions:*** Vol. II, Parte II, 1910. — ***Report*** for the Years 1905 to 1910. — Tho New Haven mathematical Colloquium, 1910.

NEW-YORK . . . . *American Mathematical Society.* — ***Transactions:*** Vol. 10, 1909. — ***Indices:*** Vol. 1-10, 1900-1909; Vol. II, 1910.

NIMES . . . . *Academie de Nimes.* — ***Memoires:*** VII Serie, T. XXX, 1907; T. XXXI, 1908.

ODESSA . . . . . . *Observatoire météorologique et magnetique de l' Université Imperiale à Odessa.* — ***Annuaire:*** 1908.

PADOVA . . . . . . *R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti.* — ***Atti*** e ***Memorie:*** N. S., Anno 1907-1908, Vol. XXIV; Anno 1908-1909, Vol. XXV; Anno 1909-1910; Volume XXVI.

PADOVA . . . . . . *Accademia Scientifica Veneto-Trentino-Istriana.* — ***Atti:*** Terza Serie, Anno II, 1909.

PALERMO . . . . . *Società Siciliana per la Storia Patria.* — ***Archivio*** Storico Siciliano; N. S., Anno XXXIII, 1909; Anno XXXIV, 1909; Anno XXXV, fascicolo 1°-2°, 1910. — ***Documenti*** per servire alla Storia di Sicilia. Prima Serie diplomatica, Vol. XVII, fasc. II, 1909; Vol. XX, fasc. I, 1909.

» . . . . *Circolo Matematico.* — ***Rendiconti:*** T. XXVII (1° Semestre 1909); T. XXVIII (2° Semestre 1909); T. XXIX (1° Semestre 1910); T. XXX (2° semestre 1910). — ***Supplemento*** ai Rendiconti: Anno 1909, Vol. IV; Anno 1910, Vol. V. — ***Annuario:*** 1909 e 1910. — ***Indici*** delle pubblicazioni: N. 2, 1909; N. 3, 1910.

PARIGI . . . . *Institut de France.* — ***Comptes rendus*** heldomadaires des séances de l'Académie des Sciences, T. CXLVIII, premier semestre, 1909; T. CXLIX, deuxiéme semestre, 1909; T. CL, premier semestre, 1910; T. CLI, deuxième semestre, 1910.

» . . . . *Société Nationale des Antiquaires de France.* — ***Mémoires:*** 1908, Septième Série, Tome huitième, 1909; Mémoires 1909; Tome neuviéme, 1910. — ***Bulletin:*** 4e trimestre 1908. — ***Mettensia:*** V, fasc. 2, 1907; VI, fasc. 1, 1909.

PIETROBURGO . . . *Académie Imperiale des Sciences de St. Pétersbourg.* — ***Memoires:*** VIII Série, Classe Physico-Mathematique, Vol. XVIII, N. 7-16, 1909; Vol. XXI, N. 1-3, 1906-1908; Vol. XXII, 1908; Vol. XXIII, 1909; Vol. XXIV, 1909. — Classe historico philologique, Vol. VIII, N. 7-14, 1908-1909; Vol. IX, N. 1, 1906; Vol. X, N. 1, 1909. — ***Bulletin:*** V Serie, T. XXV, N. 3-5, Octobre-Décembre 1906. — VI Serie, T. III, 1909, N. 1-11, Janvier-Juin, Premier demi volume; N. 12-18, Septembre-Decembre, Second demi volume; T. IV, 1910, N. 1-11, Janvier-Juin, Premier demi volume; N. 12-18, Septembre-Decembre, Second demi volume.

» . . . . *Musée Géologique Pierre le Grand prés l'Académie Impériale des Sciences di St. Petersbourg.* — ***Travaux:*** Vol. III, 1909, Vol. IV, Livr. 1-2, 1910.

» . . . . *Société physico-chimique russe à l' Université de St. Pétersbourg.* — ***Journal:*** T. XXXIX, N. 9, 1907; T. XL. N. 3, 5, 7, 1908; T. XLI, 1-6, 8, 9, 1909; T. XLII, N. 1-2, 4-5, 1910.

PISA . . . . *R. Scuola Normale Superiore.* — ***Annali:*** Scienze fisiche, matematiche naturali, Vol. X, 1908, Vol. XI, 1910. — Filosofia e Filologia. Vol. XXI, 1908.

» . . . . *Società Toscana di Scienze Naturali:* ***Atti: Memorie:*** Vol. XXV, 1909. ***Atti: Processi verbali:*** Vol. XVIII, 1908-1909; Vol. XIX, 1910.

PORTICI . . . . . . *R. Scuola Superiore di Agricoltura.* — ***Annali:*** Serie 2a, Vol. VII. Continuazione dell'Annuario della R. Scuola, 1875-1898 (1907); Vol. VIII, 1908.

PRAGA . . . . *Kgl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.* — ***Sitzungsberichte:*** Matematisch - Naturwissenschaftliche Classe, Jarhgang 1908 (1909); Jahrgang 1909 (1910). — Klasse für Philosophie und Philologie, Jahr. 1908 (1909); Jahr. 1909 (1910). — ***Jahresbericht*** für das Jahr. 1908 (1909); für dar Jahr. 1909 (1910). — Vedi Autori: Bidlo Jaroslav, Kybal Vlastimil, Navratil Bohumil.

PRESBURGO . . . . *Verein für Natur und Heilkunde zu Pozsony* (Presburg). — ***Verhandlungen:*** Neue Folge XVIII, der ganzen Reihe XXVII, Band Jahrgang 1906 (1908); XIX der ganzen Reihe XXVIII Band 1907 (1909); XX der ganzen Reihe, XXIX Band, 1908 (1909). — 1856-1906. Emlékmü Kiadja a Pozsony orvos-természettudomanyi egyesület fennállásanák ötvenedik éuforduloja alkalmábol, 1907.

RIO DE JANEIRO . . *Observatorio.* — ***Annuario:*** paro o anno de 1908, Anno XXIV.

ROMA . . . . *Ministero dell' Istruzione Pubblica.* — ***Bollettino Ufficiale:*** a. XXXVI, 1909; a. XXXVII, 1910. — ***Annuario:*** 1909; 1910. — Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia. — I. ***Relazione:*** 1909; II. ***Risposte*** al questionario diffuso con circolare 27 marzo 1906, 1909.

» . . . . *R. Accademia dei Lincei.* — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — ***Atti Memorie:*** Ser. V, Vol. VII, 1908; Vol. VIII, fasc. 1-6, 1910. — ***Rendiconti:*** Ser. V, Vol. XVIII, 1.° e 2.° Semestre 1909; Vol. XIX, 1.° e 2.° Sem. 1910. — Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. — ***Atti, Memorie:*** Ser. V, Vol. XII, 1906; Vol. XIII, parte 1910; Vol. XIV. N. 4, 1909-1910. — ***Rendiconti:*** Ser. V, Vol. XVII, fasc. 7-12; 1908; Vol. XVIII, 1909; Vol. XIX, fasc. 1-6, 1910. — ***Atti:*** Notizie degli scavi d'antichità, Vol. V, fasc. 9-12, 1908; Vol. VI, 1909; Vol. VII, fasc. 1-8, 1910. ***Rendiconto*** dell'adunanza solenne 6 giugno 1909; dell'adunanza solenne 5 giugno 1910. — ***Annuario:*** 1909 e 1910.

» . . . . *Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei.* — ***Memorie:*** Vol. XXVI, 1908; Vol. XXVII, 1909. — ***Atti:*** Anni LXII-LXIII, 1908-1909; 1909-1910.

» . . . . *Regio Comitato geologico d' Italia.* — ***Memorie:*** Vol. V, Parte I, 1909. — ***Bollettino:*** Vol. XXXIX, 9.° della IV Serie, N. 3, 4, 1908; Vol. XL, 10.° della IV Serie, 1909; Vol. XLI (1.° della 5.ª Série) fasc. 1, 2, 1910.

» . . . . *Giornale di medicina militare.* — Anno LVII, 1909; Anno LVIII, 1910.

» . . . . *Rivista d' artiglieria e genio.* — Anno XXVI, 1909; Anno XXVII, 1910.

» . . . . *Società Italiana delle Scienze.* — ***Memorie*** di matematica e di fisica, Serie III, T. XV, 1908; T, XVI, 1910.

» . . . . *Ministero di Agricoltura Industria e Commercio.* — Direzione generale della Statistica. — Movimento della Popolazione secondo gli atti dello Stato civile dell'anno 1907 (1909); dell'anno 1908 (1910). — Statistica delle cause di morte nell'anno 1907 (1909); Statistica della emigrazione italiana per l'estero negli anni 1906 e 1907 (1908); Negli anni 1908 e 1909 (1910); Statistica giudiziaria penale per l'anno 1904 (1907); per gli anni 1905 e 1906 (1909); Notizie complementari alle statistiche giudiziarie penali degli anni 1896-1900 (1909).

» . . . . *Ufficio centrale meteorologico e geodinamico italiano.* — ***Annali:*** Serie II, Vol. XVIII, Parte III, 1896 (1909); Vol. XIX, Parte I e III, 1907 (1907-1910); Vol. XXIV, Parte I, 1902 (1909); Vol. XXVII, Parte II, 1905 (1910); Vol. XXVIII, Parte I, 1906 (1909).

» . . . . *Ministero di Grazia e Giustizia e dei Culti.* — Statistica della criminalità per l'anno 1906. Notizie complementari alla Statistica giudiziaria penale (1909).

ROMA . . . . *Ministero degli Affari Esteri.* — Commissariato dell' emigrazione. — Raccolta di rapporti dei RR. Agenti diplomatici e consolari, Vol. III. America: Parte I. Brasile (1908); Parte II. Argentina (1908); Parte III. Stati Uniti, ecc. (1909).

» . . . . *Biblioteca Nazionale centrale Vittorio Emanuele.* — **Bollettino** delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del Regno d' Italia, Anno 1908, Serie III, Num. 14, 262 - 17, 135 (1909); Anno 1909, Num. 17, 136 - 19, 963 (1910).

» . . . . *Camera dei Deputati.* — Biblioteca. — **Catalogo** metodico degli scritti contenuti nelle pubblicazioni periodiche italiane e straniere. Parte I. Scritti bibliografici e critici. Indice generale a tutto l' anno 1906 (1909).

» . . . . *Osservatorio (R.) astronomico al Collegio Romano.* — **Memorie:** Serie III, Vol. V, Parte I, 1910.

» . . . . *R. Commissione Geodetica Italiana.* — **Pubblicazioni:** Venezia, Firenze, Milano, Bologna, 1907-1909.

» . . . . *Biblioteca Apostolica Vaticana.* — **Studi** e **Testi:** N. 1, 4, 10, 13, 14, 18 20, 21, 22, 1900-1909.

» . . . . *Congresso (VI) internazionale di chimica applicata.* — Vol. I-VII, 1907.

ROUEN . . . . *Académie des Sciences, Belles Lettres ed Arts.* — **Précis analytique** des travaux pendant l' année 1907-1908 (1909).

ROVERETO . . . . . *I. R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti degli Agiati.* — **Atti:** Serie III, Vol. XIII, fasc. III-IV, luglio-dicembre 1907; Vol. XIV, Anno 1908; Vol. XV, Anno 1909; Vol. XVI, fasc. I-II, gennaio-giugno 1910.

SAN FRANCISCO . . *California Academy of Sciences* — **Proceedings:** Fourth Series, Vol. III, pp. 41-48, December 31, 1908; pp. 49-56, December 20, 1909.

S.t LOUIS . . . . . *Academy of Sciences.* — **Transactions:** Vol. XVI, N. 8-9, 1906-1907; Vol. XVII, N. 1-11, 1907-1908; Vol. XVIII, N. 1, 1908.

» . . . . *Missouri botanical Garden.* — XVIII annual report 1907; XIX ann. report 1908; XX ann. report 1909.

SYDNEY . . . . . . *R. Society of New. South Wales.* — **Journal and Proceedings:** Vol. XXXVII, for. 1903; Vol. XXXVIII, for. 1904; Vol. XXXIX, for. 1905; Vol. XL, for. 1906; Vol. XLI, for. 1907; Vol. XLII, for. 1908; Vol. XLIII, for. 1909.

» . . . . *Australasian Association for the advancement of Science.* — Vol. VIII, — **Report** of the eighth meeting held at Melbourne, Victoria 1900 (1901); Vol. IX. Ninth meeting held at Hobart, Tasmania, 1902; Vol. X. Tenth meeting held at Dunedin, 1904; Vol. XI. Elevent meeting held at Adelaide, 1907; Vol. XII. Twélfth meeting held at Brisbane, 1909.

STRASBURGO . . . . *K. Universität und Landes Bibliothek.* — **Benntzungs** — Ordnung gittig vom 1. Juni 1909. V. Autori: Adrian H. — Ahreiner G. — Albertus J. — Amrheim A. — Ansorg E. — Arnold A. — Bauer F. — Beck J. B. — Berblinger W. — Birck P. — Bittong I. — Blaum K. — Blumenthal E, — Bolkert P. — Brand E. — Braun W. — Bresslau H. — Bührer E. — Clausen C. C. — Cohn L. — Coulon V. — Davidow E. — Ewald F. — Fischer C. — Frank E. — Frank K. — Gaertner A. — Goldschmidt H. — Goldschmidt T. — Gröber P. —

Güte J. — Haase P. — Hausmann E. — Heigel (von) K. T. — Hensler E. — Heeber K. — Hug J. — Huldschinsky K. — Huss R. — Jacobi F. — Jellinck W. — Jung. G. — Kasten F. — Katzenellenbogen A. — Keller R. — Kempf A. — Kintz L. — Kleffel H. — Klever H. — Kloos J. — Knoblock L. — Kraemer E. — Lattermann H. — Lünsmann C. — Melchior E. — Meyer A. — Mielck W. — Mücke M. — Müller O. — Neltner J. — Otto F. — Pauli R. — Preussen (A. W. Prinz von) — Pumpelly L. — Rathie A. — Rerilius W. — Röhrsheim L. — Rose Carl — Rothermundt M. — Samuel F. — Schereschewsky J. — Schlumberger E. — Schnütgen A. — Scholly F. L. — Seichter E. — Siebech A. — Simon T. — Spanke J. — Stadler H. P. — Steimmig G. — Sussnitzki J. — Tams E. — Thalheimer A. — Uhl G. — Urban E. — Voigt H. — Veil W. — Weil A. — Wentrup F. — Westermann F. — Wolf J. — Wolters P. — Wonner L. — Zickel E. — Ziesche K. — Zollner F.

TOKIO . . . . *Imperial Earthquake Investigation Committee in foreign languages.* — ***Publications:*** N. 22 A, 1908; N. 26 B, 1908. — ***Bulletin:*** Vol. 1, N. 4, 1907; Vol. II, N. 1-3, 1908; Vol. III, September, November 1909; Vol. IV, N. 1, June 1910.

» . . . . *Deutsche Gesellschaft für Natur und Volkerkunde Ostasiens.* — ***Mitteilungen:*** Band. XI, Teil 3-4, 1908-1909; Band. XII, Teil 1-2, 1909-1910.

TOLOSA . . . . . . *Académie des Sciences, Inscriptions et Belles Lettres* — ***Memoires:*** Dixième Série, Tomo VIII, 1908.

» . , . . *Faculté des Sciences de l' Université de Toulouse pour les Sciences mathematiques et les sciences physiques.* — ***Annales:*** Dexième Série, T. X, 1908; Troisiéme Série, T. I, Premier fascicule, 1909.

» . . . . *Société archéologique du Midi de la France.* — Nouvelle Série. — ***Bulletin:*** N. 38, 1908.

TORINO . . . . . . *R. Accademia delle Scienze.* — ***Memorie:*** Serie 2, T. LIX, 1909; T. LX, 1910. — ***Atti:*** Vol. XLIV, 1908-1909; Vol. XLV, 1909-1910.

» . . . . *R. Osservatorio della R. Università.* — Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1908 (1910); fatte nell' anno 1909 (1910).

» . . . . *R. Accademia di Medicina.* — ***Giornale:*** 1908, Anno LXXI, Ser. IV, Vol. 14.°, Settembre-Dicembre; 1909, Anno LXXII, Vol. 15.°; 1910, Anno LXXIII, Vol. 16.°

TRIESTE . . . . . . *I. R. Osservatorio Marittimo.* — ***Rapporto annuale*** contenente le osservazioni meteorologiche di Trieste e di alcune altre località Adriatiche per l' anno 1905, XXII Vol., 1909; per l' anno 1906, XXIII Vol., 1910.

UPSALA . . . . . . *Regia Societas Scientiarum Upsalienis.* — ***Nova Acta:*** Seriae Qnartae, Vol. II, fasc. I, 1907-1909.

VENEZIA . . . . . . *R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti.* — ***Memorie:*** Vol. XXVIII, N. 3, 4, 5, 1908-1910.

VERONA . . . . . . *Accademia d' Agricoltura, Scienze, Lettere, Arti e Commercio.* — ***Atti*** e ***Memorie:*** Ser. IV, Vol. VII, 1907; Vol. VIII, 1909; Vol. IX, 1909; Vol. X, 1910. — Osservazioni meteoriche degli anni 1906, 1907, 1908 e 1909. Appendici ai volumi VII, VIII, IX e X (1907-1910).

VICENZA . . . . . . *Accademia Olimpica.* — ***Atti:*** N. S. Vol. 1.º Annate 1907-1908.

VIENNA . . . . . . *K. Akademie der Wissenschaften.* - ***Denkschriften:*** Matematich-Naaurwissenschaftliche Klasse. LXXI Band, 1907, I. Halbrand; LXXIX Band 1908, I. Halbrand; LXXX Band, 1907; LXXXI Band, 1908; LXXXIV Band, 1909. — ***Sitzungsberichte:*** CXVI Band, 1907, Abtheilung I.; Abth. II. A; Abth. II. B; Abthl III. — CXVII Band, 1908, Abth. I.; Abth. II. A, Abth. II. B; Abth. III. — CXVIII Band, 1909, Abth. I.; Abth. II. A; Abth. II. B; Abth. III. — CXIX Band, 1910, Abth. I.; Heft. I-V; Abth. II. A, Hefl. I-V; Abth, II. B, Heft I-V; Abth. III, Hef, I-III. — ***Denkschriften:*** Philosopisch-historische Klasse LIII Band, 1910; LIV Band, 1911. – ***Sitzangsberichte:*** CLIV a CLVII Band, 1907-1908; CLVIII, CLIX Band, 1908; CLX-CLXIII Band, 1909. — ***Register*** zu der Bänden 141 bis, 150 XV, 1906; zu der Bänden 151 bis, 160, 1909. — ***Almanack*** LVII, 1907; LVIII, 1908; LIX, 1909. — ***Mitteilungen*** der erdbeben-Kommission, Neue Folge, N. XXXI-XXXIX, 1906-1910.

» . . . . *Archiv für osterreichische Geschichte.* — XCVI-XCVIII Band, 1907-1908; XCIX Band, Erste Hälfte, 1908; C Band, 1910; CI Band, Erste Hälfte, 1910.

» . . . . *K. K. Zentral-Anstalt für Meteorologie und Geodinamik.* — ***Jahrbucher:*** Officielle Publikation. Jahrgang, 1907. Neue Folge, XLIV Band, (1909). — Allgemeiner Bericht und Cronik der im Jahre 1907, N. IV (1909).

» . . . . *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.* — ***Verhandelungen:*** Jahrgang 1908, LVIII Band; LIX Band, Jahrgang 1909.

WASHINGTON . . . *United States Geological Survey.* — Twenty-Eight ***Annual Report*** 1907; Twent. Ninth A. R. 1908; Thirtieth A. R. 1909. — ***Monographs:*** Vol. XLIX, The Ceratopsia 1907. — ***Mineral Resources:*** of the U. S. Calendar Year, 1906, 1907, 1908. — ***Professional Papers:*** N. 56, 58, 59-67, 1907-1909. — Water Supply and irrigation and Papers, N. 207-209-236, 238, 242 (1907-1909). — ***Bulletin:*** 296, 309, 316, 319, 321, 323, 325-380, 382-397, 399-405, 408-414, 416, 418, 421, 423, 424 (1906-1910).

» . . . . *Coast and Geodetic Survey.* — ***Report*** of the Superitendent showing the progress of the Work, from July 1, 1906, to June 30, 1907; from July 1, 1907, to June 30, 1908: from July 1, to June 30, 1909. — Geodesy. The figure of the Earth and Isostasy from measurements in the U. S., 1909; Supplementary investigation in 1909 of figure of the Earth and Isostasy, 1910. — Hypsometry. Precise leveling in the U. S., 1903-1907 (1909).

» . . . . *U. S. Naval Observatory.* — ***Synopsis:*** of the Report of the Superintendent for the fiscal year ending, june 30, 1908; for the fiscal year ending june 30, 1909.

WELLINGTON . . . *New Zealand Institute.* — ***Transactions:*** 1908, Vol. XLI, New Issue (1909); 1909, Vol. XLII (1910). — ***Proceedings:*** 1908-1910. Part I-IV.

ZURIGO . . . . . . *Société Helvétique des Sciences Naturelles.* — ***Nouveaux Mémoires:*** Band XLIV, 1909. — ***Actes:*** 91.me Session in Glarus, Vol. 2, 1908; 92.me Session à Lausanne, Vol. 2, 1909.

Autori:

ABETTI A. — (V. Istituti, Firenze).

ADRIAN HEINRICH. — *Das alemanische Gedicht von Johannes dem Täufer und Maria Magdalena.* (Wiener Pap. Kod. 2841. Karlsruhér Pap. Kod. 66). Strassburg, 1908.

AHREINER GEORG. — *Ueber die Blutungen bei der sogenannten cronischen Metritis.* Berlin, 1908.

ALBANESE DI BOTERNO VINCENZO. — *Tu es Petrus.* Modica, 1910.

ALBERTUS JOSEF. — *Die* ΠΑΡΑΚΛΗΤΙΚΟΙ *in der Griechischen und Römischen literatur.* Strassburg, 1908.

AMREIHN AUGUST. — *Gotfrid IV. Sehenk von Limpurg, Bischof von Würzburg und Herzog zu Franken. 1442-1455.* Würzburg, 1908.

ANSORG ERNST. — *Die Konstruktion von Wandelung und Minderung im Bürgerlichen Gesetzbuche.* Schiltigheim, 1907. i. E.

ARNOLD ANTON. — *Die Aufschlusspfliecht von Vorstand und Aufsichtsrat gegenüber der Generalversammlung nach deutschem Aktienrecht.* Amorbach, 1907.

ARANHA BRITO. — *Nota acerca das invasôes francesas em Portugal* Lisboa, 1909.

BAUER FRIEDRICH. — *Ueber die Konstitution der Inosinsäure und die Muskelpentose.* Braunschweig, 1907.

BECK I. B. — *Die Melodien der Troubadours.* Strassburg, 1908.

BERBLINGER WALTHER. — *Ueber die sperebildung und Auskeimung des Bacillus mesenterius ruber. Beitrag zur Frage der fraktionirten Sterilisation.* Strassburg, 1908.

BIDLO JAROSLAV. — *Jednota bratrská v. prunim vyhnanstvì.* — Cast. III (1572-1586). Praze, 1909.

BILLIA LORENZO MICHELANGELO, — *A quoi servent les laboratoires de psychologie?* 1910. — *On the problem and method of psychology of Religion*, 1910.

BINDONI, TOROSSI, SPESSO, SERENA. — *Intorno a un' opinione di Bartolomeo Burchelletti.* — Lettere quattro. Treviso, 1909.

BINDONI GIUSEPPE. — *Studi di Cronologia intorno alla vita di Gesù Cristo.* — Traduzione della monografia del P. Van Etten. Treviso, 1910. — *Divagazioni e frammenti.* Treviso, 1910.

BIRCK PAUL. — *Literarische Anspielungen in den Werken Ben Jonson' L.* Strassburg, 1908.

BITTONG JOSEPH. — *Eingriff in die Erziehungsgewalt der Eltern.* Strassburg, 1907.

BLAUM KURT. — *Das Geldwesen der Schweiz. Seit 1798.* Strassburg, 1908.

BLUMENTAL ERNST. — *Alkaleszenz — und Ammoniak — Bestimmungen in menschlichen Fäces.* Halle, a. S., 1908.

BOLCHERT PAUL. — *Aristoteles Erdkunde von Asien und Lbyien Erstes Kapitel; Asien.* Wittenberg, 1908.

BRAND E. — *Ueber Tetraëder, deren Kanten eine Fläche zweiter Ordnung berühren.* Strassburg, 1908.

BRAUN WILHELM. — *Luthers Klostererlebnis.* Berlin, 1908.

BRENTANO LUJO. — *Die Malthussche Lehre und die Bevölkerung bewegung der letzten Dezennien.* Munchen, 1909.

BRESSLAU HERMANN. — *Dirichlets Satz von der arithmetischen Reihe für den Körper der dritten Einheistwurzeln.* Strassburg, 1907.

BRINI GIUSEPPE. — *Relazione dell' anno accademico 1907-08 e Memoria La proprietà del lavoro.* Bologna, 1909.

BRIOSCHI FRANCESCO. — *Opere Matematiche.* — Tomo V ed ultimo. Milano, 1909.

BRIOSI GIOVANNI. — *Atti dell' Istituto botanico dell' Università di Pavia.* Milano, 1908.

BÜHRER EDUARD. — *Der Einfluss von lebzeitigen Zuwendungen des Erblassers auf die Berechnung des Pflichtteils nach dem Bürgerlichen Gesetzbuch.* Strassburg, 1908.

CABREIRA ANTONIO — *Les Mathématiques en Portugal. Deuxième dèfense des travaux de Antonio Cabreira,* 1910.

CANEVAZZI SILVIO. — *La Matematica e l' Arte del costruttore in Italia.* Roma, 1909.

CARLI GIAN GIROLAMO. — *Dissertazione sopra un antico ritratto di Virgilio.* Mantova, 1907.

CASOLI ALPHONSI M. S. J. — *De Regicidio Ulyssiponensi.* Carmen in certamine poetico Hoeufftiano magna laude ornatum. Amstelodami, 1909.

CASSON HERBERT N. — *Cyrus Hall Mccormich. His life and work.* Chicago, 1909.

CAVACCINI ANGELINA. — *Tavole per la trasformazione dei gradi sessagesimali in gradi centesimali e viceversa.* Napoli, 1909.

CELORIA P. — (V. Istituti, Milano).

CERESOLE GIULIO. — *Le differenti indicazioni della Talassoterapia secondo la spiaggia, la stagione e l'ora del giorno.* Venezia, 1909. — *La Teleradiografia.* Venezia, 1909. — *L'oftalmo-reazione nelle malattie cutanee.* Venezia, 1909. *La cura dell' ulcera perforante colle scintille di Alta Tensione.* Venezia, 1909. *La cura delle artriti e delle miositi bienorragiche coi raggi Röntgen.* Venezia, 1910.

CLAUSEN CARL CONRAD. — *Ueber Eingeschaften des Chloral Hydrates und — Alkoholates in Erweiterung der Mauch'schen Studie (1898) und unter Beiziehung der entsprechenden Bromverbindungen.* Mülhausen, 1907.

COHN LOUIS. — *Encephalitis haemorrhagica acuta.* Strassburg, 1908.

COLLA AURELIO. — *Cenni sulle principali vicende dei corsi d' acqua e delle bonifiche nel Ferrarese.* Roma, 1878. — *Carmi nei parentali della Principessa di Mongiolino consorte già al Principe Don Giuseppe Borghese nelle idi del genuaio 1884.* — *Al Marchese Cesare Pizzardi epistola.* Ferrara, 1886. — *I principii filosofici della estetica segnatamente nel campo poetico.* Memoria. Ferrara, 1889. — *Annotazioni alla Bucolica e su le Georgiche di P. Virgilio.* Ferrara, 1889. — *Delle traduzioni e segnatamente delle opere di P. Virgilio e Q. Orazio Flacco.* Ferrara, 1890.

COULON VICTOR. — *Quaestiones Criticae in Aristophanis Fabulas (Teildruk).* Argentorati. 1907.

D'ALES ADHEMARUS. — *Puellae Aurelianensi in superos adscriptae.* Carmen in certamine poetico Hoeufftiano magna laude ornatum. Amstelodami, 1909.

DALGEDO D. G. — *Notes on the Climate of Mont' Estoril and the Riviera of Portugal.* Lisboa, 1908.

DAVIDOW ELKA. — *Beiträge zur Lehre von der Leyden'schen Schwangerschaftsniere.* Strassburg, 1908.

DEGENS P. N. — *Legeeringen van Tin en Lood.* Dordrech, 1908.

DE MARCHI MARCO. — *Introduzione allo studio biologico del Verbano.* — Relazione. Milano, 1910.

DURÉAULT A. — *Une Académie Italienne a Macon.* Macon, 1910.

EWALD FRANZ. — *Die schreibweise in der Autographischen handschrift des « Canzoniere » Petrarcas* (cod. vat. lat. 3195). Halle, a. S., 1907.

FENGER L. — (V. Istituti, Copenhagen).

FISCHER KARL. — *Das Verhältnis zweier lateinischer Texte Geilers von Kaiserberg zu ihren deutschen Bearbeitongen der « Navicula fatuorum » zu Paulis « Narrenschiff » und des « Peregrinus » zu otthers « Christenlich bilgerschafft » nebst einer Würdigung der lateinischen Texte Geilers.* Metz, 1908.

FONTEIN F. — *Onderzoekingen in Verband met de Afscheiding van Foezelolie uit alcoholische Vloeistoffen,* 1909.

FRANCESCHINI ANTONIO. — *L'emigrazione italiana nell'America del Sud, studi sulla espansione transatlantica.* Roma, 1908.

FRANK ERICH. — *Ueber den genuinen orthostatischen Typus.* (*Genuine orthostatische Albuminurie*). Strassburg, 1908.

FRANK KURT. — *Ueber die — Ausbreitung der Erkrankung des Zentralnerven — systems bei der Korsakow'schen Psychose.* Strassburgo, 1907.

FRITSCHE H. — *Die mittlere Temperatur der Luft im Meeresniveau.* Riga, 1909.

GABBA L. — (V. Istituti, Milano.

GAERTNER ALRED. — *Zollverhandlungen zweischen Österreich und Preussen von 1849 bis Olmütz.* Salzburg, 1908.

GIGLIOLI E. H. — (V. Istituti, Firenze).

GIUFFRIDA RUGGERO. — *La quistione dei pigmei e le variazioni morfologiche dei gruppi etnici.* Firenze, 1910.

GOLDSCHMIDT HANS. — *Ueber die Existenzbedingungen chinoder Kohlenwasserstoffe.* Strassburg, 1907.

GOLDSCHMIDT THEODOR. — *Ueber kathodische Metallzerstäubung in verdünnten Gasen.* Strassburg, 1908.

GRAUERT HERMANN. — *Dante und die Idee des Weltfriedens.* München, 1909.

GRÖBER PAUL. — *Ueber die Faunen — des — untercarbonischen Transgressionsmeeres des zentralen Tian-Schan, die in der Umgebung des Sart-dschol — Passes gefunden worden sind.* Stuttgart, 1908.

GUERRIERI GONZAGA sen. CARLO. — *Commemorazione di Luigi Sartoretti.* Mantova, 1896.

GÜTE JOHANNES. — *Die produktiven Suffixe der persönlichen Konkreta im Mittelenglishen.* Strassburg, 1908.

HAASE PAUL. — *Pharmacognostisch-chemische Untersuchung der Ipomoea fistulosa Mart.* Strassburg, 1908.

HAUSMANN EMMERICH. — *Anatomische Untersuchungen an Nolina recurvata Hemsley.* Dresden, 1907.

HEGYFOKY J. — *Regenangaben aus Ungarn für den Zeitraum 1851-1870.* Budapest, 1909. *Die järliche Periode der Niederschläge in Ungarn.* Budapest, 1909.

HEIGEL (von) KARL THEODOR. — *Die Müncher Akademie von 1759 bis 1909.* München, 1909.

HENSLER ERWIN. — *Verfassung von kurmainz um das Jahr 1600.* Strassburg, 1908.

HOEBER KARL. — *Beiträge zur Kenntnis des Sprachgebrauchs im Volksliede vornehmlich des XIV und XV Jahrhunderst.* Berlin, 1908.

HUG JOSEF. — *Sitz und Vorkommen überzähliger Brustdrüsen und Brustwarzen beim Weibe.* Strassburg, 1908.

HULDSCHINSKY KURT. — *Ueber die Herzhemmende digitalinwirkung.* Leipzig, 1908.

HUSS RICHARD. — *Vergleichende Lautlehre des Siebenbürgisch - Moselfrankisch - Ripuarischen mit den moselfranzösischen und wallonischen Mundarten.* Hermannstadt, 1908.

JACOBI FELIX. — *Geburtswerlauf und Therapie beim engen Becken.* Leipzig, 1908.

JACOLI FERDINANDO. — *Statuti di Fiumalbo nel Frignano.* Modena, 1909.

JELLINCK WALTER. — *Der fehlerhafte Staatsakt und seine Wirkungen.* Leipzig, 1908.

JUNG GABRIEL. — *Zur Diagnose und Histogenese des Ovarialkarzinoms.* Leipzig, 1908.

KASTEN FRIEDRICH. — *Ueber Händeasepsis.* Strassburg, 1908.

KATZENELLENBOGEN ABRAHAM. — *Ueber die Wirkung von Staubfiltern bei Ventilationsanlagen.* Strassburg, 1908.

KELLER RAIMUND. — *Zur Kenntnis der kongenitalen Hautdefekte am Kopfe des Neugeborenen.* Berlin, 1908.

KEMPF AUGUST. — *Tetraëder deren Kanten eine Fläche F^2 zweiter Ordnung berühren.* Strassburg, 1908.

KIBAL VLASTIMIL. — *Jindrrich IV a Europa V Létech 1609 a 1610.* Praze 1909.

KINTZ LUDWIG. — *Ueberbürdung in den Schulen.* Strassburg, 1908,

KLEFFEL HANS. — *Rupturierte Extrauteringravidität.* Strassburg, 1908.

KLEVER HELMUT. — *Ueber Dimethylketen.* Strassburg, 1907.

KLOOS JOSEF. — *Die Entwiklung der direkten Steuern in Elsass-Lothringen.* (*Ertrags-Objektsteuern*). Strassburg, 1908.

KNOBLOCH LUDWIG. — *Das Territorium der Stadt Strassburg bis zur Mitte des 16. Jahrhundert* (*nebst einer Karte*). Leipzig - Reudnitz, 1908.

KOOMANS N. — *Over den Invloed der Zelfinductie in Telefoongleidingen.* Delft, 1908.

KRAEMER ERNST. — *Die Verwendbarkeit der Konjunktivalreaktion zur Diagnose Chirurgischer Tuberkulose.* Tübingen, 1908.

LATTERMANN HEINRICH. — *Griechische Bauinschriften* (*Teildruck*). Strassburg, 1908.

LEITE DE VASCONCELLOS J. — *O Doutor Storck e a Litteratura Portuguesa.* Estudo historico-bibliographico, 1910.

LEVI EZIO. — (V. Istituti, Firenze).

LÜNSMANN CARL. — *Der Giro = und Scheckverkehr und die Frage seiner Organisation durch die deutsche Post.* Strassburg, 1908.

MACHADO VIRGILIO. — *Les applications directes et indirectes de l'Electricité à la Médicine et à la Chirurgie.* Lisbonne, 1908.

MALTESE E. — *L' intelletto d'Amore.* Città di Castello, 1908.

MASINI A. — (Vedi RAJNA M.).

MELCHIOR EDUARD. — *Ein Beitrag zur alkoholischen hypertrophischen Cirrhose* (*Hannot-Gilbert*) *mit besonderer Berücksichtigung der Regenerationsvorgange des Leberparenchyms.* Strassburg, 1907.

MESSERI V. — (V. Istituti, Firenze).

MEYER ARTUR. — *Ein Fall von Lungengangrän bei Typhus abdominalis nebst einer Uebersicht über die Bedeutung des Eberth' schen Bacillus bei komplikatorischen Erkrankungen des Respirationsapparates* Strassburg, 1908.

MIELCK WILHELM. — *Pharmakognostisch-Chemische Untersuchung des javanischen Lackharzes « Gala-Gala ».* Strassburg, 1908.

MORAES DE ALMEIDA C. A. — *Tratado elementar de Electricidade.* Tomo I, 1909.

MORANO GAETANO. — *Targisio* (poemetto). Mantova, 1908.

Mücke Manfred. — *Ueber den Bau und die Entwicklung der Früchte und über die Herkunft von Acorus Calamus L.* Leipzig, 1908.

Müller Otto. — *Beiträge zur Kenntnis der Lungengangrän.* Strassburg, 1908.

Navratil Bohumil. — *Biskupstvi Olomoucké 1576-1579 a volba stanislava Paulovského.* Praze, 1909.

Neltner Julius. — *Tuberkulose und Schwangerschaft.* Strassburg, 1907.

Otto Friedrich. — *Teobald Bacher ein elsässischer Diplomat im Dienste Frankreichs.* Strassbug, 1907.

Ovio Giuseppe. *Studi oftalmologici 1905.* Padova, 1905.

Panichi U. — (V. Istituti, Firenze).

Pascoli Johannes. — *Egloga XI. Sive Ovis peculiaris.* Carmen in certamine poetico Hoefftiano magna laude ornatum. Amstelodami, 1909.

Petho Gyula — *A Péterváradi hegység (Fruska Gora) Krétaidószaki (Hiperszenon) Faunaja.* Budapest, 1910.

Pauli R. — *Ueber Dauererfolge der Alexander-Adams' schen Operation bei Retroflexio uteri und bei Prolaps.* Landau, 1907.

Pirazzoli R. — (Vedi Raina M.)

Preussen (August Willhelm Prinz vón). — *Die Enturicklung, der Kommissariats — Behoerden, in Brandenburg — Preussen, bis zum, regierungs — antritt Friedrich Wilhelm. I.* Berlin, 1908.

Prutz Hans. — *Der Anteil der geistlichen Ritterorden an dem geistigen Leben ihrer Zeit.* München, 1908.

Pumpelly Laurence. — *Ueber o — Benzoylen — und o — Benzylenbenzimidazol.* Strassburg, 1907.

Rajna Michele. — *Osservazioni meteorologiche dell' annata 1907, eseguite e calcolate dagli astronomi aggiunti all' Osservatorio della R. Università di Bologna* R. Pirazzoli e A. Masini. Memoria. Bologna, 1908. — *Una discussione tra l' Osservatorio e un giornale politico quotidiano.* — Lettere e articoli. Bologna, 1909.

— *Osservazioni meteorologiche dell' annata 1908 eseguite e calcolate da* R. Pirazzoli e A. Masini. Bologna, 1909.

— *Osservazioni meteorologiche dell' annata 1909 eseguite e calcolate da* R. Pirazzoli e A. Masini. Bologna, 1910.

— (V. Istituti, Milano).

Rathie Arnold. — *Neuere Untersuchungen der Fette von Lycopodium, Secale cornutum, Semen Arecae und Semen Aleuritis cordatae, sowie der brasilianischen Pflanzenmilch Amapa.* Kiel, 1908.

Renda Umberto. — *Rime di Antonio Tebaldeo in un codice parmense.* Modena, 1909.

Rerilius Wilhelm. — *Zur Chirurgie des Ureters beim Weibe.* Strassburg, 1907.

Reuss Franciscus Xaverius. — *Diluvium.* Carmen in certamine poetico Hoefftiano magna laude ornatum. Amstelodami, 1909.

Rocco Januarius Asprenatis. — *Aeronavis.* Carmen in certamine poetico Hoeufftiano magna laude ornatum. Amstelodami, 1909.

Rochinger Ludwig. — *Kaiser Ludwigs erstes oberbaierische Land und Lebenrecht.* Munchen, 1909.

Röhrsheim Ludwig. — *Die Sprache des Fra Guittone von Arezzo (Lautthere).* Halle, a. S., 1907.

ROSA D. — (V. Istituti, Firenze).

ROSE CARL. — *Das Verhalten des grossen Netzes nach intraperitonealen Injektionen körniger Stoffe.* Strassburg, 1907.

ROSSI GUIDO FRANCESCO. — *Saggio d' una nuova versione poetica de' carmi di Q. Orazio Flacco.* Firenze, 1909.

ROTHERMUNDT MAX. — *Ueber das Verhalten der Bakterien an der Oberfläche fliessender Gervässer.* Münchén, 1908.

SABBATINI PIO. — *La nomenclatura delle vie.* Modena, 1909. — *La potestà regolamentare dei Comuni a proposito di pubbliche iscrizioni.* Milano, 1909.

SAMUEL FERDINAND. — *Ueber Angina ulcerosa bei dem Abdominaltyphus nach dem Material der medizinischen Klinik der Kaiser — Wilhelms — Universität Strassburg.* Strassburg, 1908.

SARS G. O. — (V. Istituti, Bergen).

SARTORETTI LUIGI. — *Anselmo Guerrieri Gonzaga.* Mantova, 1896.

SCHERESCHEWSKY JACOB. — *Experimentelle Beiträge zum Studium Syphilis.* Jena, 1908.

SCHIAPARELLI GIOVANNI. — *Orbite cometarie, Correnti sismiche, Meteoriti.* Pavia, 1908. — *Di alcune macchie osservate in Mercurio dal signor Jarry Desloges la mattina del 19 agosto 1907.* Annotazioni. Torino, 1909.

SCHLUMBERGER EDUARD. — *Vergleichende Beobachtungen uber den Einfluss des Crede' schen und des exspectativen Verfahrens auf die Nachgeburt und das Wochenbett.* Strassburg, 1907.

SCHMUTZER J. — *Bijdrage tot de Kennis der Postcenomane Hypoabyssische en effusieve Gesteenten van het Westelijk Müller-Gebergte in central — Borneo.* Amsterdam, 1910.

SCHNÜTGEN ALEX. — *Das Elsass und die Ernenerung des Katholischen Lebens in Deutschland von 1814 bis 1848.* Strassburg, 1908.

SCHOLLY FRANZ LUDWIG. — *Fünf Fälle von Polyhydramnion bei eineügen Zwillingen.* Lauterecken, 1907.

SEICHTER EMIL. — *Die « Gläubigerschaft » im Konkurse.* Schiltigheim, 1908.

SERENA AUGUSTO. — (Vedi BINDONI).

SFORZA GIOVANNI. — *Il Principe Eugenio Francesco di Savoia Conte di Soissons e il suo fidanzamento con Maria Teresa Duchessa di Massa.* Torino, 1909. — *L' Indennità ai Giacobini Piemontesi perseguitati e danneggiati.* Torino, 1908. — *L' amministrazione generale del Piemonte e Carlo Botta (1799).* Torino, 1909. — *Bibliografia storica della città di Luni e suoi dintorni.* Torino, 1910.

SIEBECH ADOLF. — *Ueber einige organische Einsensalze.* Wattenscheid, 1908.

SIMON THEODOR. — *Ueber die Reduktion aromatischer Nitroverbindungen in saurer Losung,* 1907.

SÖHNGEN N. L. — *Het onststaan en Verdwijnen van Waterstof en Methaan ónder den involed van het Organische Leven.* Delft, 1906.

SOLI GUSMANO. — *La Chiesa di S. Silvestro.* Modena, 1907.

SPANKE JOHANNES. — *Zwei Altfranzösische Minnesinger. Die gedichte Jehan's de Renti und oecde's de la couroierie.* Chemnitz. Leipzig, 1907.

SPESSA L. — (Vedi BINDONI).

STADLER HEINRICH PAUL. — *Die Morphologie und Anatomie von Cnicus benedictus L.* Strassburg, 1908.

STEIMMIG GERHARD. — *Ueber siebengliedrige Ringe aus β-Diketonen und o-Diaminen.* Strassburg, 1908.

SUSSNITZKI J. *Die Gesellschafts und Staatslehre David Humes.* Strassburg, 1907.

TAMS ERNST. — *Die geographische Verbreitung und erdwissenschafliche Bedeutung der aus den Erdbebenbeobachtungen des Jahres 1903 sich ergebenden Epizentren.* Leipzig, 1908.

TEIXEIRA F. GOMEZ. — *Obras de Mathematica.* Vol. 2-4, 1906-1908.

TESCH P. — *Der Niederländische Boden und die Ablagerungen des Rheines und der Maas aus der jüngeren Tertiär — und der älteren Diluvialzeit.* Amsterdam, 1908.

THALHEIMER AUGUST. — *Beitrag zur Kenntnis der Pronomina personalia und possessiva der Sprachen Mikronesiens.* Stuttgard, 1908.

TOROSSI G. B. — (Vedi BINDONI).

TRANQUILLINI MOLTEDO FRANCISCUS. — *Amico monita rebus novis adversanti.* Carmen in cértamine poetico Hoefftiano magna laude ornatum. Amstelodami, 1909.

UHL GEORG. — *Stumpfearcinome nach supravaginaler Amputation des myomatösen Uterus.* Mülhausen, 1908.

URBAN EDUARD. — *Das Selbstkontrahieren des Stellvertreters im B. G. B.* Schittigheim, 1907.

VAN DIJK J. W. — *Parallelbedrijf van Wissellstroom Machines.* Rotterdam, 1909.

VAN GELDER J. K. — *Over de Toepassing van centrifugaalkracht voor de Scheiding en Zuivering van Ertsen in Kolen.* S. Gravenage, 1908.

VAN HASSELT J. F. B. — *Bijdrage tot de Kennis der constitutie van het Bixine.* Haarlem, 1910.

VAN HOEPEN E. C. N. — *De Bouw van het Siluur van Gotland,* 1910.

VEIL WOLFGANG. — *Zur Kenntnis des Prostata-Sarkoms,* 1908.

VOIGT HERMANN. — *Gleichnisse und Metaphern in Shakespeare's Dramen und in seinen Quellenschriften.* Strassburg, 1908.

WEIL ARTHUR. — *Die Veziere Aegyptens zur zeit des « neuen Reiches »* (um 1600 — 1100 v. Ch.). Strassburg, 1908.

WENTRUP FRANZ. — *Beiträge zur Kenntnis der Saponine.* Strassburg, 1908.

WESTERMANN FANNY. — *Ueber das Häufigere Verkommen von Ovarialresten bei grösseren Ovarialtumoren.* Strassburg, 1908.

WIJNBERG A. — *Over rietwas en de Mogelijkheid zijner technische Gawinning.* Amsterdam, 1909.

WOLF JOHANN. — *Ueber Heilung der tuberkulösen Bauchfellentzündung mit und ohne Laparatomie.* Strassburg, 1907.

WOLTERS PAUL. — *Adolf Furtwäangler.* München, 1910.

WONNER LEO. — *Beitrag zur Kenntnis der nervösen Erkrankungen der Harnwege.* Strassburg, 1907.

ZAPPATA ANDREAS. — *Multum dimissus homo.* Carmen in certamine poetico Hoeufftiano magna laude ornatum, Amstelodami, 1909.

ZICKEL ERNST. — *Der Deutsche Reichstag unter Konig Ruprecht von der Pfälz.* Frankfurt A. M., 1908.

ZIESCHÉ K. — *Die Naturlehere Bonaventuras.* Fulda, 1908.

ZOLLNER FRIEDRICH. — *Ein Fall von tumor der Schädelbasis ausgehend von der Hypophyse.* Berlin, 1908.

OSSERVAZIONI METEOROLOGICHE

fatte nell' anno 1910

ALL' OSSERVATORIO GEOFISICO

DELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

Dal Settembre 1908 non avendo più avuto occasione di riferire sulla vita dell' Osservatorio che ho l' onore di dirigere, approfitto della pubblicazione delle presenti osservazioni annuali per esporre alcune notizie riguardanti questi ultimi quattro anni.

Nella mia nota su « L' Osservatorio di Modena nel biennio 1906-1907 », messa in testa alla pubblicazione N. 23 dell' Osservatorio, io potei cominciare coll' allietarmi per l' assestamento dell' organico e della dotazione stabilito con Decreto del 27 Dicembre 1906, finalmente ottenuto pei voti di questa Facoltà di Scienze come rispondente ai bisogni dell' Istituto. Ma questo ordinamento veniva purtroppo modificato assai presto, per effetto della nuova legge Universitaria 19 Luglio 1909, n. 496: — la quale, considerando l' Osservatorio *geofisico* di Modena alla pari di quelli *meteorologici* di altre Università, riduceva nuovamente il personale ai due posti di *Assistente* e di *Aiuto-tecnico*, sopprimendo il posto di *Aiuto*.

Benchè la Facoltà ed il Rettorato si adoperassero subito a far sì che nella stabilita revisione delle tabelle annesse alla legge suddetta si rimettessero le cose in quello stato, che una legge di poco precedente aveva riconosciuto opportuno di fissare, tuttavia la disposizione che colpiva il nostro Osservatorio non fu modificata.

Le conseguenze non tardarono a farsi sentire. Intanto l' Aiuto dott. U. Nicolis, abbandonava naturalmente l' Istituto, a cui aveva prestato per più di due anni un' opera veramente preziosa; mentre all' Assistente ing. A. Manzini, mancato ai vivi nel Marzo 911, ben tre altri assistenti si succedettero, e purtroppo con inevitabili periodi di vacanza fra l' uno e l' altro; perchè non è facile trovare oggi chi si presti, avendo titoli, ad assumere incarichi poco rimunerativi.

Così si è venuto a sconvolgere tutto il programma di lavoro che avevamo progettato: e non può far meraviglia che oggi noi non siamo giunti là, ove potevamo esser certi di essere senza la nuova legge detta di miglioramento

Particolarmente non è ancora raggiunto quel pareggio nella pubblicazione delle osservazioni, che noi trovammo in forte arretrato; benchè siamo certi ormai di raggiungerlo entro l'anno corrente.

Però, nonostante la inattesa situazione createci, non abbiamo mancato di perseguire, come meglio ci è stato possibile, quel programma; dirigendo magari l'attività dell' Istituto in campi a cui meglio si prestassero le mutate condizioni del personale.

Quanto si è fatto risulterà appunto dai cenni di cronaca che seguono.

* * *

Nel nostro programma di lavoro, esposto nel '908, era il proposito di sfruttare utilmente la suppellettile astronomica posseduta dall' Osservatorio (cerchio Meridiano di Reichembach — strumento dei passaggi di Amici — pendoli). Si era già istituito il servizio dell' ora: si era compiuta una lunga opera di preparazione per iniziare col C. M. una misura della latitudine, che valesse a controllare i valori anticamente determinati; e infine il Dott. Nicolis, particolarmente versato nelle osservazioni astronomiche, si riprometteva di fare studî di stelle in zone.

Colla situazione creata dalla nuova legge è rimasto sospeso ogni cosa.

Per riguardo al tempo, si fa di quando in quando qualche determinazione. — Ma sarebbe nostra intenzione ricevere l'ora da Parigi con un apparecchio di telegrafia senza fili. È già provveduto il materiale; e speriamo che il servizio si stabilirà non appena saranno concessi i permessi necessarî.

Per quel che riguarda la posizione dell' Osservatorio, se non è stato possibile un nostro contributo, possiamo avvertire che le coordinate sarebbero state di recente corrette, in sèguito alla revisione fatta dall' Istituto Geografico Militare degli elementi geografici delle triangolazioni fondamentali italiane.

In base a tale revisione, l' Istituto Geografico assegnerebbe alle coordinate del nostro Osservatorio i seguenti valori:

latitudine (boreale) . . . . 44° 38′ 51″, 36
longitudine (E. da Greenwich) 0ʰ 43ᵐ 43ˢ,396.

Questi valori abbiamo comunicato al Presidente della Commissione Geodetica Italiana, incaricato di controllare le posizioni degli Osservatorî italiani pubblicate nella *Connaissance des Temps*.

* * *

Il reparto meteorologico, che dal Ragona in poi è il più attivo e completo nell' Osservatorio di Modena, ha continuato ad essere oggetto della nostra attenzione.

Abbiamo aggiunto allo strumentario esistente (oltre alcuni apparecchi di secondaria importanza), uno *statoscopio registratore*, per seguire le brusche variazioni di pressione barometrica anche nei rapporti colle ricerche aerologiche (v. oltre), ed uno *psicrometro ad aspirazione* di Assmann, considerato ormai come strumento normale nelle misure dello stato igrometrico.

Si è poi particolarmente curata la misura della insolazione, che costituisce un dato così importante per la meteorologia agraria. Essa si compie regolarmente a Modena dal 1893 con un eliofanometro Campbell-Stokes: nel quale i cartoncini vengono esposti dopo una acconcia paraffinatura (secondo l' uso introdotto nel 1894 dal prof. Chistoni), ciò che aumenta la portata dello strumento, avvicinando i suoi dati assai più al vero. Ora noi abbiamo provveduto un eliofanometro di tipo fotografico, che si fa funzionare in parallelo al Campbell, sperimentando diversi preparati sensibili, che rispondano meglio della carta al prussiato abitualmente adoperata in simili strumenti. E abbiamo inoltre messo in esperimento un eliofanografo di tipo nuovo, da noi ideato.

Dei risultati di questi confronti sarà riferito in apposita nota.

A rendere più complete e significative (nei riguardi locali) certe osservazioni meteorologiche fatte nell' Osservatorio, serve la serie dei dati che si raccolgono in una capanna meteorica posta nel pubblico Giardino fino dal 1892.

Ora coi primi del Giugno 1909, quando furono abbattuti i bastioni a NE della città, e vennero di conseguenza sistemati diversamente il giardino pubblico e l' Orto Botanico dell' Università, la capanna meteorologica, che si trovava appunto in quella zona, dovette esser rimossa.

Durante il periodo dei lavori, gli strumenti furono provvisoriamente collocati in modo opportuno nell' ala sinistra della serra centrale. E nel contempo provvedemmo ad un rinnovamento della capanna, il cui scheletro era divenuto in buona parte inservibile. — Essa fu alquanto impiccolita rispetto al modello precedente, e fu provveduta di dispositivi per meglio evitare irraggiamenti, diretti o indiretti, sugli apparecchi; e precisamente di un tetto doppio, di una cassa d'aria nella parete a Sud, comunicante coll'infratetto, di persiane laterali scostate dai ritti principali, di persiane anteriori mobili etc.

Finalmente sistemati i nuovi viali potemmo ottenere dal Municipio di ricollocare la capanna in una nuova area erbosa; e gli apparecchi vi furono ritrasportati nella fine del Marzo del 1912.

In un prato del Giardino pubblico viene anche esposto, durante l' inverno, un nevometro.

Nell' area circostante alla capanna, cintata di rete metallica, è nostra intenzione di installare una serie di geotermometri.

* * *

Nell' Osservatorio di Modena le precipitazioni acquee hanno sempre formato largo oggetto di studio. — Vi funzionano da tempo tre pluviometri di tipo diverso: uno, tipo Tecnomasio, che dà il valore *globale* dell' acqua caduta; un altro, il più antico, istituito dal Bianchi, che permette la valutazione della pioggia *oraria*; infine un Richard *registratore*.

L' utilità pratica dei dati pluviometrici nei riguardi sopratutto del catasto delle acque, dei servizî idraulici etc. aumenta però notevolmente, se si raccolgono misure in *più* luoghi della stessa regione. Perciò noi curammo fino dal 1906 di riordinare e ampliare la rete delle stazioni udometriche, sparse nella provincia, portando subito al doppio il numero di esse. E in questi ultimi anni abbiamo continuamente atteso allo stesso scopo coll' incoraggiamento e l' appoggio dell' Ufficio Centrale di Meteorologia; sì che abbiamo potuto aggiun-

gere a quelle già esistenti altre cinque stazioni: Montombraro-Zocca, Piandelagotti, Carpi, Vignola e Finale-Emilia.

Cosicchè alla fine del 1912 la nostra rete udometrica provinciale era così costituita:

LUOGO	Altezza sul mare	DIRETTORE	
Campogalliano	43	Sig. Demetrio Mattioli . .	Segretario Comunale
Carpi	28	» Giuseppe Canevazzi . .	Addetto all' Uff. Tecn. Comunale.
Cavezzo	22	» Cav. Alessandro Rebucci	Possidente
Concordia	23	» Prof. Gaetano Barberini	Dirett. Scuole Comun.
Finale	15	» Angelo Fattorini . . .	Possidente
Fiumalbo	953	» Riva Mario	Possidente
Guiglia	485	» Ceretti Costantino . .	Vice segretario Com.
Modena (giardino) . .	35	» Vito Vellani	Dell' Osservatorio
Modena (Osservatorio)	76	Personale dell' Osservatorio	
Montese	841	Sig. Manzini Lino	Impiegato Comunale
Montombraro-Zocca . .	729	» Prof. Don G Ronchi .	Dell' Istituto Odorici
Nonantola	43	» Alessandrini Maurizio .	Impiegato Comunale
Pavullo	691	» Rag.e Carlo Caselgrandi	Ragioniere Comunale
Piandelagotti	130	» Lunardi Dott. D.n Adolfo	
Pievepelago	761	» Grandi Giov. Battista .	Ufficiale telegrafico
S. Felice sul Panaro .	21	» Bergamini Prof. Alberto	Dirett. Scuole Elem.
S. Martino in Spino . .	10	» Giovanni Rossi . . .	Impiegato Comunale
Sassuolo	121	» Prof. Vittorio Prandi .	Dirett. Scuole Elem.
Spilamberto	70	» Leopoldo Muratori . .	Impiegato Comunale.
Stuffione	21	» Alossandrini Giuseppe .	
Vignola	125	» Luigi Tognetti	Impiegato Comunale.

E così la rete pluviometrica provinciale di Modena, tiene con quelle di Milano e Como il primato fra le altre d' Italia: (Modena e Milano con 21 stazioni, Como con 25).

Io adempio al gradito dovere di ringraziare quì i Signori Direttori per la loro assidua, efficace e disinteressata cooperazione.

Il dato primo e più interessante a cui le Stazioni attendono è quello della pioggia: ma in quasi tutte si osserva anche la temperatura, e in talune anche la pressione e il vento: — si raccolgono poi anche notizie sui temporali.

Benchè i dati delle singole stazioni appaiano negli Annali dell' Ufficio Centrale, pure nell' interesse dei ricercatori noi stiamo preparando una pubblicazione riassuntiva di tutto quanto ci è stato possibile raccogliere sull' argomento, dal 1871 fino a tutto il 1912. — Possiamo sperare di far così una cosa utile, se dobbiamo giudicare dalle numerose richieste di dati udometrici che vengono continuamente rivolte a questo Osservatorio da diversi Ufficî, da Consorzî e da privati.

Questa pubblicazione appare tanto più opportuna, in quanto il servizio udometrico delle nostre regioni ha assunto col 1913 un altro ordinamento; pel quale i singoli contributi potranno *in avvenire* più rapidamente essere discussi e messi in valore.

Colla istituzione infatti dello speciale Ufficio Idrografico per lo studio del regime idraulico del Po, costituitosi nel Maggio 1912, con sede in Parma (presso il Corpo Reale del Genio Civile), la nostra rete provinciale si è anche aggregata alla rete interprovinciale che farà capo a detto Ufficio, e che comprende appunto tutte le stazioni pluviometriche funzionanti nel bacino imbrifero del Po. E col Settembre 912 le nostre stazioni inviano mensilmente i dati raccolti anche a Parma.

Possiamo dichiararci lieti che il lavoro di riorganizzazione da noi compiuto negli anni scorsi in questo ramo del servizio meteorologico, ci abbia permesso di portare subito un contributo non scarso al nuovo interessante ordine di studî, a cui è chiamato l' Ufficio Idrografico del Po.

Dal 1907 noi inviamo mensilmente i dati di pioggia anche all' Ufficio Centrale del Lavoro, pel tramite della locale Cattedra Ambulante di Agricoltura.

***

A parte questo contributo nelle misure udometriche, il nostro Osservatorio collabora cogli altri Osservatorî italiani in altri generi di servizî.

All' Ufficio Centrale di Meteorologia in Roma viene inviato quotidianamente (e questo dal 1876) il telegramma meteorico delle ore 7: alla fine di ogni decade si inviano le notizie meteoriche de-

cadiche, insieme alle notizie agrarie sullo stato delle campagne (1), che servono per la compilazione della « Rivista Meteorico-Agraria » del Ministero di A. I. e C.: e inoltre le schede analitiche per questo periodo. — Notizie speciali poi si trasmettono sui temporali, sui fenomeni sismici etc.

Dal 1.° Luglio 1911 il telegramma meteorico delle ore 7 viene pure inviato, ogni giorno, all' Ufficio Idrografico del R.° Magistrato alle acque di Venezia.

Lo stesso telegramma fu inviato anche alla direzione del Cantiere Aeronautico militare di Bosco Mantico (Verona), nel periodo dal Luglio 1911 al Maggio 1912.

In alcune circostanze viene richiesta anche la trasmissione telegrafica dei dati della osservazione delle 15^h: così ad esempio durante l' Ottobre 1911, per il servizio meteorico istituito durante le crociere speciali dei dirigibili militari sull' Adriatico.

In occasione del Raid Aereo Parigi-Roma, e precisamente per l' ultima tappa di esso (Torino-Roma), il nostro Osservatorio collaborò nel servizio aerologico organizzato per l' occasione dalla Commissione Naz. di Turismo Aereo.

Di altra collaborazione, ormai ordinaria, nel servizio aerologico nazionale sarà detto più oltre.

* * *

Una notevole miglioria abbiamo potuto recentemente portare al nostro Istituto nella sua struttura edilizia.

Infatti alla trasformazione dell' Osservatorio da *astronomico* (quale venne costruito nel 1827) in *meteorologico* (1876) col Ragona, e più comprensivamente in *geofisico* (1897) col Chistoni, non era andata di pari passo una trasformazione nella struttura dell' edificio: sicchè per molti ordini di ricerche ci si sentiva assai a disagio.

Particolarmente imbarazzante riusciva la mancanza di un terrazzo scoperto nella parte alta della torre; nella quale, inizialmente condizionata in modo da rispondere alle esigenze degli strumenti

(1) Queste ultime ci vengono gentilmente preparate (dal 1907) dal Direttore della locale Cattedra Ambulante di Agricoltura, al quale ci è grato rivolgere quì i nostri ringraziamenti.

astronomici fondamentali, non restavano accessibili che alcuni ritagli di spazio attorno alla cupola dell' equatoriale, e senza alcun riparo.

Tale mancanza, già rilevata nei riguardi delle ricerche di elettricità atmosferica da noi iniziate nel 1907, diventò addirittura impedente da quando, nel principio del '910, noi, convinti della opportunità della cosa, fondammo quì una stazione aerologica: — chè le operazioni di lancio e di inseguimento dei palloni-piloti, come le osservazioni nefoscopiche relative, non erano possibili che con molto stento; e mal si conciliava in ogni modo la situazione con un servizio metodico e regolare di tal genere.

E poichè al costituirsi nello scorso anno di una rete nazionale di stazioni aerologiche per cura del Comitato Talassografico, il nostro Osservatorio venne invitato a parteciparvi, non parve più ulteriormente differibile un provvedimento.

Formulammo quindi un progetto di riforma della parte alta della torre, che conciliasse i nuovi bisogni col rispetto della suppellettile astronomica, che è decoro dell' Osservatorio e può prestare ancora utili servizî. — Mercè il benevolo ed efficacissimo appoggio del Sig. Rettore furono accordati dal Ministero i fondi necessarî pei lavori: e durante i mesi di Agosto, Settembre e Ottobre u. s. si potè condurre a termine la desiderata trasformazione.

Ora l' Osservatorio è provvisto di un terrazzo scoperto, di circa 30 mq. di area, che risponde ai desiderati; senza che sia stato menomamente turbato il funzionamento del C. M. e dello strumento dei passaggi. È stata bensì levata la cupola (di rame) che copriva il pilastro dell' equatoriale (1): ma conservandone le parti, sì da lasciar possibile un eventuale ristabilimento di essa; e rispettando naturalmente il pilastro, che è un caposaldo della rete trigonometrica, e che può servire (come servì ad es. nello scorso anno) a misure geodetiche.

È riuscita così migliorata la disposione degli strumenti meteorologici (anemoscopio, anemometro, pluviometri, eliofanometri etc.); si è resa agevole la sorveglianza di essi, e si è resa possibile la eventuale esposizione di altri. Ed in particolare il lancio e l' inseguimento dei piloti, le osservazioni nefoscopiche, ed altre osservazioni

(1) Lo strumento (dell' Amici) era già stato ritirato da molto tempo. (v. Pubblicazione n. 23 dell' Osservatorio).

inerenti a ricerche aerologiche possono ora compiersi con tutta comodità.

*
* *

Lo sviluppo preso in questi ultimi tempi dagli studî di aerologia, ed il loro interesse ognora crescente nei riguardi della navigazione aerea, ci inducevano ad aggiungere nel programma di lavoro dell' Osservatorio le osservazioni aerologiche.

Ora nella primavera del '910 la Commissione Nazionale di Tourismo Aereo, istituita dal nostro Touring Club, deliberava d'accordo coll' Ufficio Centrale di Meteorologia di iniziare appunto fra noi esperienze di sondaggio dell' atmosfera a mezzo di palloni-piloti lanciati contemporaneamente da diverse stazioni; e il nostro Osservatorio riceveva invito (dal Prof. Gamba) di parteciparvi. Provvedemmo senz' altro il primo materiale necessario, e demmo subito la nostra collaborazione.

Nella pubblicazione speciale N. 174 del Touring, che riferisce su quella serie di lanci, figurano i nostri primi risultati.

Da allora la stazione aerologica presso il nostro Osservatorio ha continuato a funzionare.

Partecipammo in particolare alle serie di lanci pure indetti dalla Commissione di Tourismo aereo nella primavera del 1911; i cui risultati sono contenuti nella pubblicazione N. 194 del Touring. — E quando, durante il 1911, si andava a costituire, per cura del Comitato Talassografico, una rete di stazioni aerologiche stabilmente organizzata, la nostra si trovò pronta. E si aggregò, con materiale proprio e personale già addestrato.

Dalla primavera del 912 il servizio aerologico nazionale è già in funzione, e fa capo per ora al Battaglione specialisti del Genio in Roma. — Una larga serie di risultati sono già apparsi nella memoria XIV del Comitato Talassografico.

I lanci dei piloti si fanno in giorni e ore prestabiliti: talora dietro invito telegrafico, se l' occasione alle osservazioni ha carattere d' urgenza: e talora con trasmissione telegrafica dei risultati, se questi debbono servire a scopi immediati (come ad es. durante il periodo 1-21 aprile 1913, in cui si stavano attendendo le condizioni d' atmosfera propizie al viaggio del dirigibile militare P 5 da Bracciano a Bosco Mantico).

Lo strumentario della nostra stazione aerologica consta principalmente: di un *Teodolite Bunge* per l' inseguimento dei piloti: di una *bilancia De Quervain* per la misura della forza ascensionale: di un *anemometro Daloz* per la misura della velocità del vento all' istante: di un *rapportatore De Quervain* pel tracciamento grafico della traiettoria orizzontale: di *regoli calcolatori, cronometri*,, etc.

* * *

Nel reparto riguardante la radiazione solare si sono continuate regolarmente le osservazioni col piro-eliometro Angström: alle 9^h, alle 11^h, alle 12^h e alle 15^h. Nei giorni di eccezionale trasparenza dell' atmosfera si fanno osservazioni orarie.

I risultati si pubblicano a parte.

Nel biennio 1907-1908 noi istituimmo nell' Osservatorio una serie di osservazioni di elettricità atmosferica. E facemmo già, in proposito, due pubblicazioni (1). Ma, colla crisi del personale, non fu più possibile attendere a tutto il programma propostoci.

Si sono però continuate le osservazioni diurne della conducibilità elettrica dell' aria coll' apparecchio Gerdien: da cui ci proponiamo raccogliere elementi per un andamento annuo del fenomeno. Quando si sarà in possesso di sufficiente materiale, le misure in discorso saranno pubblicate.

Abbiamo pure alcune misure di potenziale atmosferico, ma discontinue. All' impianto di un apparato per registrazione continua, quale da tempo è progettato, si oppongono difficoltà locali non lievi, che speriamo però di superare.

Il nostro reparto sismico è sempre nello stato in cui lo trovammo, cioè ridotto a pochi sismoscopî, di cui si pubblicano le indicazioni (v. oltre nel volume). — Noi progettammo bensì l'impianto di un sismografo nel sotterraneo della torre dell' Osservatorio, ed eravamo già pronti a svolgere le pratiche necessarie; ma la riduzione del personale ha troncato ogni cosa .... almeno per ora.

(1) C. Bonacini e U. Nicolis, *Ricerche sulla conducibilità elettrica dell' aria*. Modena, 1908. — *Misure di conducibilità elettrica dell' aria eseguite sul Monte Cimone nell' estate del 908*. Modena, 1909.

*
* *

Nella cronaca dell' Osservatorio di questi ultimi anni possiamo anche registrare i seguenti fatti.

Nel Maggio 1910, quando si attendeva un contatto della coda della cometa di Halley colla nostra atmosfera, anche noi ci preparammo a raccogliere qualche eventuale fenomeno di geofisica. Nella notte dal 18 al 19 maggio si fecero osservazioni continue di potenziale atmosferico, di ionizzazione dell' aria, e di magnetismo: ed eravamo pronti anche per osservazioni ottiche e fotochimiche. — Ma la nostra veglia portò soltanto a constatare quì, come altrove, che la notte trascorse con una normalità .... indegna dell' aspettativa.

L' eclisse solare del 17 aprile 1912 ci trovò pure pronti. Ai dati degli attinometri registratori esposti, contavamo aggiungere osservazioni piro-eliometriche: e d' altra parte facemmo funzionare igrometri registratori e psicrometri, sia nella balconata dell' Osservatorio che nella capanna del Giardino. Una macchina telefotografica era infine predisposta per fotografare le fasi dell' eclisse. — Ma il maltempo mandò a monte ogni cosa.

Nel Febbraio 1911, per invito avutone dal Presidente della R. Accademia di Modena, io ebbi l' onore di commemorare lo Schiaparelli, che era Socio onorario dell' Accademia stessa fino dal 1867, e che nel periodo anteriore al 1866 ebbe ad occuparsi largamente di una questione sôrta sulle misure della latitudine del nostro Osservatorio.

La commemorazione figura fra le pubblicazioni distribuite dall' Osservatorio (1).

*
* *

Ci è grato segnalare infine gli incrementi verificatisi nella Biblioteca dell' Osservatorio.

Oltre i molti acquisti fatti di opere necessarie agli studî che quì si compiono, e delle pubblicazioni periodiche più urgenti, la

(1) C. Bonacini, *Commemorazione di Giovanni Schiaparelli,* letta alla R. Accad. di Scienze, Lettere ed Arti in Modena nell' adunanza 8 Febbraio 1911.

biblioteca si arricchì di copiosi doni pervenutici da Istituti Nazionali ed Esteri.

Ci piace ricordare fra l' altro la Direzione della *The Smithsonian Institution* per aver voluto completare la serie dei *Reports*, inviando i volumi dal 1895 al 1906, che mancavano nella collezione quì esistente; — il Dr. Willis L. Moore, capo dell' U. S. Weather Bureau di Washington, che ci ha inviato un gruppo importante di pubblicazioni, oltre quelle periodiche; — i Direttori degli Osservatorî di Greenwich, Cambridge, Uccle, Ebro, Melbourne per i loro invii straordinarî etc. — Fra le pubblicazioni italiane ricevute in dono siamo lieti di segnalare quelle del R.° Magistrato delle Acque di Venezia, dell' Ufficio Idrografico della R.ª Marina di Genova, del Comitato Talassografico Italiano.

A tutti i generosi offerenti siano quì ripetute le nostre grazie.

* * *

Nella mia sopracitata relazione del 1908 si dava anche notizia di un progetto proposto dal Rettorato e dalla Facoltà di Scienze dell' Università di Modena pel monumento scientifico che, com' è noto, dovrebbe sorgere in Reggio-Emlia ad onore del Padre Secchi, coi fondi che apposito Comitato raccolse a suo tempo (1883) da una sottoscrizione internazionale.

Ed invero c' era allora ragione per credere che le iniziative combinate del Comitato Reggiano e della Università Modenese, sorrette da affidamenti del Governo, dovessero condurre abbastanza prontamente a qualcosa di concreto.

Viceversa le pratiche iniziate subirono poi un incaglio: e ancor oggi nulla vi è di attuato in proposito.

Ci permettiamo di formulare quì l' augurio che il Comitato di Reggio, non tardando più oltre a sciogliere l' impegno assunto verso i sottoscrittori, sappia provvedere alla Scienza astronomica italiana nuovi e proficui mezzi di studio, in quella forma che meglio serva ad onorare il gran nome del Secchi.

Maggio del 913.

C. Bonacini.

Annata 1910

GENNAIO 1910

GIORNO	Pressione Barometrica a 0° mm. 700 +				Temperatura centigrada						Tensione del vapore millimetri				Umidità relativa			
	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	minima	mass.	Media	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media
1	56.4	56.8	60.2	57.8	0.2	3.2	2.6	-1.1	3.6	1.3	3.1	4.4	4.6	4.0	67	76	82	75
2	63.9	64.0	65.0	64.3	3.0	8.0	3.2	1.4	8.1	3.9	4.1	3.9	4.2	4.1	72	49	73	65
3	65.2	64.5	64.8	64.8	1.6	6.8	3.5	0.0	6.7	3.0	3.6	4.0	4.2	3.9	69	54	71	65
4	64.9	62.6	61.8	63.1	1.5	7.0	3.4	1.2	7.1	3.3	3.6	4.1	4.3	4.0	71	55	73	66
5	60.8	60.3	60.3	60.5	3.8	8.6	4.2	1.8	8.6	4.6	3.9	4.0	4.6	4.2	64	47	74	62
6	60.7	62.2	64.8	62.6	1.0	6.8	4.0	0.4	7.1	3.1	4.2	6.1	5.5	6.6	85	82	90	86
7	68.5	69.2	70.8	69.5	2.8	2.4	1.0	0.0	4.1	2.1	5.4	5.3	4.8	5.2	97	96	96	96
8	69.4	66.5	65.7	67.2	-0.6	1.2	0.2	-1.6	1.4	-0.2	4.2	4.8	4.5	4.5	96	96	96	96
9	65.6	65.6	67.5	65.9	-3.0	0.8	-0.8	-3.7	0.8	-1.7	3.6	4.7	4.2	4.2	98	96	98	97
10	69.9	69.9	71.0	70.3	-2.0	0.4	-1.0	-3.3	0.8	-1.4	3.8	4.6	4.1	4.2	96	96	96	96
I Decade	64.5	64.2	65.2	64.6	0.8	4.5	2.0	-0.5	4.8	1.8	4.0	5.1	4.5	4.5	82	75	85	80
11	70.5	68.2	66.4	68.4	-0.8	2.0	1.8	-2.1	2.1	0.3	4.2	4.7	4.8	4.6	96	89	93	93
12	58.8	52.1	50.1	53.7	1.2	2.8	2.6	0.9	3.1	2.0	4.8	5.4	5.3	5.2	96	97	96	93
13	49.5	53.8	58.2	53.8	2.8	2.6	1.6	0.9	3.6	2.2	5.2	5.0	4.6	4.9	93	91	89	91
14	63.5	64.8	66.3	64.9	-0.4	5.2	1.0	-1.1	5.2	1.2	3.1	3.8	3.2	3.4	70	56	65	60
15	63.8	61.7	61.1	62.2	0.4	5.6	2.6	-1.5	5.8	1.8	2.7	2.8	2.9	2.8	57	41	52	50
16	63.3	62.3	62.6	62.7	0.8	5.6	2.0	-0.6	5.6	2.0	3.0	4.1	4.0	3.7	61	61	75	66
17	60.8	59.2	58.9	59.6	2.4	3.2	2.4	0.8	3.5	2.3	4.1	4.8	5.1	4.7	75	83	93	84
18	56.6	52.6	49.8	53.0	2.2	3.8	1.4	0.9	5.6	2.5	4.8	5.4	4.9	5.0	89	90	96	92
19	42.7	40.8	43.1	42.2	4.6	16.2	2.4	-0.7	16.2	5.6	4.8	6.0	5.3	5.4	74	43	96	71
20	44.9	45.0	44.2	44.7	1.4	9.2	6.6	-1.6	9.5	4.0	4.9	6.4	6.6	6.0	96	73	90	86
II Decade	57.4	56.1	56.1	56.5	1.5	5.6	2.4	-0.4	6.0	2.4	4.2	4.8	4.7	4.6	80	72	85	79
21	42.4	42.2	43.2	42.6	3.0	6.6	1.8	1.4	7.0	3.3	5.5	6.4	6.7	6.2	97	88	89	91
22	39.2	39.2	41.2	39.9	1.2	2.2	0.8	0.4	2.5	1.2	4.8	4.8	4.7	4.8	96	89	96	94
23	46.3	49.1	51.9	49.1	2.0	3.8	0.4	-1.1	4.2	1.4	4.2	2.9	2.4	3.2	79	48	50	59
24	51.2	46.8	42.2	46.7	-2.6	0.8	-0.4	-4.2	1.4	-1.5	1.8	1.7	2.5	2.0	48	34	55	46
25	34.4	32.0	33.8	33.4	-1.4	2.0	-1.6	-2.6	2.4	-0.8	3.8	3.6	3.9	3.8	92	67	72	77
26	37.4	37.3	40.1	38.3	-2.0	2.2	0.3	-4.8	2.6	-0.9	3.0	2.8	3.7	3.2	75	51	75	67
27	41.9	42.9	47.1	44.0	1.0	1.6	2.0	-0.5	1.9	1.1	4.8	5.0	4.5	4.8	96	96	96	96
28	54.1	55.6	55.1	54.9	-2.2	0.8	-3.8	-4.1	2.2	-2.0	2.8	3.8	3.3	3.3	71	79	95	82
29	51.9	51.1	51.9	51.6	1.0	2.0	1.2	-2.6	2.1	0.4	4.8	4.7	4.6	4.7	96	89	92	92
30	52.9	51.8	53.1	52.6	2.4	3.4	3.0	0.8	3.6	2.5	4.9	5.1	5.1	5.0	89	86	89	88
31	53.7	53.3	54.7	53.9	3.0	4.2	3.0	1.5	4.2	2.9	5.5	6.0	5.5	5.7	97	97	97	97
III Decade	45.9	45.6	46.7	46.0	0.5	2.7	0.7	-1.4	3.1	0.7	4.2	4.3	4.3	4.2	85	75	82	81
Mese . . .	55.9	55.3	56.0	55.7	0.9	4.3	1.7	-0.8	4.6	1.6	4.1	4.7	4.5	4.4	82	74	84	80

Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle Nubi			Stato del Cielo			Evapor. in 24 ore	METEORE
9h		15h		21h		9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h - 9h	
NW	6.0	W	9.0	W	13.5	SSW	SSE	...	9 Cu, Ci	10 Ci, Cu	10	0.92	∨ ⌴ m. I; $\equiv^{0}$ c. m.-II.
W	10.0	E	9.5	SW	7.5	...	...	...	1 S, Ci	1 Cu, Ci	0	0.51	$\equiv^{0}$ c. m. I.
W	7.5	NW	1.5	W	12.0	E	E	...	5 S, Ci, Cu	8 S, Ci	0	0.67	∨ ⌴ m. I; $\equiv^{0}$ c. m. I; Tramonto rosso [bellissimo.
W	4.0	W	4.0	W	4.0	NE	...	...	4 S, Ci	0	0	0.62	∨ ⌴ m. I; $\equiv^{2}$ c. m. I.
W	10.5	N	2.0	S	6.0	N	...	...	4 S, Ci	1 S	0	0.62	$∨^{0}$ m. I; $\equiv^{0}$ c. m.-II.
E	11.0	E	1.0	W	8.5	NE	...	...	2 Ci, S	0	0	0.63	∨ ⌴ m. I; ≡ c. 0^{h} - 24^{h}.
SW	1.5	E	3.5	SE	1.0	...	...	...	10 $\equiv^{2}$	10 $\equiv^{2}$	10 $\equiv^{2}$	0.26	$\equiv^{2}$ int. 0^{h} - 24^{h}.
W	10.5	W	4.5	W	2.0	...	...	...	10 $\equiv^{2}$	10 $\equiv^{2}$	10 $\equiv^{2}$	gelato	∨ ⌴ m. I; $\equiv^{2}$ int. 0^{h} - 24^{h}, ≡ piov. 10^{h}-11^{h}.
W	1.0	W	0.0	W	1.0	...	...	...	10 $\equiv^{2}$	10 $\equiv^{2}$	10 $\equiv^{2}$	»	⌴ m. I; $\equiv^{2}$ int. 0^{h} - 24^{h}, ≡ piov. 11^{h} - 12^{h}.
W	2.0	N	2.0	N	2.0	NE	...	...	4 Ci, S	10 $\equiv^{2}$	10 $\equiv^{2}$	»	∨ ⌴ m. I; $\equiv^{2}$ int. n. e 13^{h} - 24^{h}, $\equiv^{2}$ c. m. [I; piov. 11^{h} - 12^{h}.
..	6.4	..	3.7	..	5.8	...	...	...	5.9	6.0	5.0	4.23	
N	1.5	N	2.0	N	0.5	...	...	...	10 $\equiv^{2}$	10 ≡	10 $\equiv^{2}$	gelato	⌴ m. I; $\equiv^{2}$ int. n.-I, $\equiv^{2}$ c. II-III.
N	2.5	E	8.0	N	6.5	...	...	...	10 $\equiv^{2}$	10 $\equiv^{2}$	10 $\equiv^{2}$	»	⌴ m. I; $\equiv^{2}$ c. 0^{h} - 24^{h}; $●^{0}$ 20^{h} - 24^{h}.
W	9.0	NE	13.5	W	9.5	...	W	...	10 $\equiv^{2}$	10 Ci, S	0	0.27	$\equiv^{2}$ c. n.-I; ● a ripr. 0^{h}-15^{h}, 13^{h}-16^{h}, ✳ 12^{h}-[13^{h}; ⚑ NE 13^{h}-14^{h}, 15^{h}-17^{h} Tram. rosso.
W	5.5	W	3.5	W	9.5	...	...	...	0	0	0	0.38	∨ ⌴ $\equiv^{0\,3}$ c. m. I.
W	9.5	W	2.0	S	4.5	N	N	...	7 S, Ci	8 S, Ci	1 S	0.66	⌴ $\equiv^{0}$ c. m. I.
E	7.0	E	0.0	W	12.0	N	...	N	5 S, Ci, Cu	0	7 Cu^{2}	0.88	∨ ⌴ $\equiv^{0}$ c. m. I; Tramonto rosso.
W	2.0	W	7.5	W	10.0	SW	NW	WSW	8 Cu, Ci	10 Cu	10 Cu	0.48	⌴ m. I; ≡ c. 0^{h} - 24^{h}; p. 10^{h} - 36^{h} - $10^{h}47^{m}$.
W	4.0	NE	1.0	N	0.5	...	NW	...	0	9 Ci	10 $\equiv^{2}$	0.28	∨ ⌴ m. I; $\equiv^{2}$ int. 17^{h}-24, $\equiv^{2}$ c. m.-II.
W	20.0	W	14.0	E	12.0	NW	...	...	8 S, Ci	2 S, Ci	10 $\equiv^{2}$	0.14	⌴ m.; $\equiv^{2}$ int. 0^{h}-4^{h}, $19^{h}30^{m}$-24^{h}, $\equiv^{0}$ c. m. [I; ⚑ W 7^{h}-9^{h}, 16^{h}-18^{h}; Tram. ross. bell.
E	1.5	E	11.0	E	6.0	W	W	W	2 S, Ci	3 S, Ci	9 Ci-S	0.69	∨ ⌴ m. I; $\equiv^{0}$ int. n. e 23^{h}-24^{h}, $\equiv^{2}$ c. m. I.
..	6.3	..	6.3	..	7.1	...	...	...	6.0	6.2	6.7	3.79	
NE	2.0	W	2.5	NE	14.0	...	NW	...	10 $\equiv^{2}$	10 Ci, Cu	10 S, Ci	0.31	$\equiv^{2}$ int. n.-I, $\equiv^{0}$ c. II; ● $17^{h}32^{m}$ - $21^{h}20^{m}$, [✳ $21^{h}20^{m}$ - 24^{h}; ⚑ NE 19^{h}-20^{h}.
W	14.0	W	13.5	NW	20.5	...	...	...	10	10	10	0.18	✳ 0^{h}-$14^{h}30^{m}$, $✳^{0}$ poi $●^{0}$ $15^{h}7^{m}$ - $18^{h}15^{m}$, [✳ $18^{h}15^{m}$ - 24^{h}; ⚑ NW 21^{h}-24^{h}.
W	14.5	W	13.5	W	17.5	...	...	...	10 Ci, S	6 Ci, S	0	1.18	⌴ o. chiaro III; ✳ 0^{h}-4^{h} (nei tre giorni [cm. 5.
W	2.0	NW	4.0	E	6.5	...	...	...	0	10 Ci, S	10 $\equiv^{2}$	gelato	⌴ n.-I. $\equiv^{0}$ c. m. I, $✳^{0}$ 22^{h}-$23^{h}45^{m}$.
W	17.5	W	11.0	SW	9.5	...	SSW	...	10 ≡	6 Ci, S	0	»	⌴ III; ✳ 2^{h} - 6^{h}, $7^{h}55^{m}$ - 10^{h} (cm. 4).
W	7.0	SW	5.5	NE	0.0	...	W	...	2 S, C	10 Ci, S	10	»	⌴ n.-I; ✳ $19^{h}20^{m}$ - $23^{h}15^{m}$.
W	0.5	NW	3.5	W	16.0	...	...	...	10 $\equiv^{2}$	10 $\equiv^{2}$	10 $\equiv^{2}$	»	⌴ n.-I; $\equiv^{2}$ int. 0^{h} - $21^{h}15^{h}$; $✳^{0}$ $7^{h}55^{m}$-[$9^{h}30^{m}$ (nei due giorni cm. 2,5).
SW	4.0	E	1.5	E	1.5	...	...	...	0	1 S-Ci	10 $\equiv^{2}$	»	⌴ m. I, III; $\equiv^{2}$ int. 21^{h} - 24^{h}.
W	1.0	W	7.0	W	7.5	...	...	...	10 ≡	10 ≡	10 ≡	»	⌴ n.-I; $\equiv^{2}$ c. 0^{h} - 24^{h}; ● a ripr. $3^{h}50^{m}$-24^{h}; [⇱ W 21^{h} - $21^{h}30^{m}$.
W	2.5	W	5.0	W	10.0	...	...	...	10 Ci, u $\equiv^{0}$	10	10	»	$\equiv^{2}$ c. m.-II; $●^{0}$ 0^{h} - 2^{h}, 13^{h} - $19^{h}47^{m}$.
W	10.5	NE	12.5	W	12.5	...	...	...	10 ≡	10 ≡	10	3.03	$\equiv^{2}$ c. n.-I, $\equiv^{0}$ c. II; ● $5^{h}30^{m}$ - 20^{h}; ⚑ [NE 13^{h} - 15^{h}.
..	6.9	..	7.2	..	10.5	...	...	...	7.4	8.1	8.1	3.70	
..	6.5	..	5.8	..	7.9	...	...	...	6.4	6.8	6.6	11.69	

FEBBRAIO 1910

GIORNO	Pressione Barometrica a 0° mm. 700 +				Temperatura centigrada						Tensione del vapore millimetri				Umidità relativa			
	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	minima	mass.	Media	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media
1	53.2	50.9	50.0	51.4	3.4	6.6	4.0	2.4	6.7	4.1	5.3	4.6	4.5	4.8	90	62	74	75
2	49.9	49.2	49.8	49.6	3.2	8.2	5.2	2.2	8.5	4.8	4.2	4.6	4.8	4.5	73	57	72	67
3	48.8	46.9	**42.4**	46.0	2.6	5.6	5.6	1.4	6.0	3.9	4.9	6.0	6.0	5.6	89	88	88	88
4	42.8	43.5	46.0	44.1	2.4	4.4	4.0	1.8	6.1	3.6	4.9	4.9	5.3	5.0	89	77	87	84
5	52.1	53.4	56.2	53.9	2.0	6.8	4.8	**1.3**	7.1	3.8	5.1	5.0	4.8	5.0	96	68	74	79
6	56.3	56.5	55.0	56.4	3.6	10.0	6.2	2.9	10.1	5.7	4.0	3.3	4.0	3.8	67	36	56	53
7	52.7	51.1	50.8	51.5	5.6	10.6	6.6	4.4	**10.6**	6.8	4.5	3.6	4.0	4.0	67	38	51	53
8	**47.7**	45.9	45.0	46.2	4.2	6.8	4.8	3.4	7.6	5.0	4.8	5.1	5.8	5.2	77	68	90	78
9	43.7	44.5	49.2	45.8	2.6	3.8	3.6	2.1	5.1	3.4	5.1	5.6	5.7	5.5	93	93	97	94
10	53.1	55.0	**59.1**	55.7	4.6	7.4	3.8	3.4	7.7	4.9	4.9	3.7	4.0	4.2	77	48	67	64
I Decade	50.2	49.7	50.4	50.1	3.4	7.0	4.9	2.5	7.6	4.6	4.8	4.6	4.9	4.8	82	64	76	74
11	61.4	58.9	59.1	59.8	2.2	6.2	2.8	0.9	6.3	3.1	4.6	2.5	3.5	3.5	86	37	62	62
12	57.8	56.1	56.3	56.7	1.4	6.0	3.2	**-0.7**	6.0	2.5	3.0	3.1	3.4	3.2	59	45	60	55
13	57.5	56.9	57.7	57.4	2.0	6.2	5.2	0.4	6.5	3.5	3.8	4.0	4.0	3.9	71	56	60	62
14	56.9	54.9	55.3	55.7	3.0	6.2	5.0	2.3	6.5	4.2	4.5	4.0	4.5	4.3	80	56	69	68
15	54.4	50.0	48.2	50.9	4.0	6.4	4.8	2.8	6.7	4.6	4.1	4.1	5.0	4.4	67	56	77	67
16	**46.4**	48.4	53.4	49.4	3.0	4.6	2.8	2.3	5.1	3.3	5.3	5.7	4.8	5.3	93	90	86	90
17	60.1	61.0	62.2	61.1	4.0	9.4	5.6	1.4	**9.6**	5.2	3.3	3.1	3.9	3.4	55	35	58	49
18	**63.2**	61.1	61.0	61.8	4.2	8.8	5.6	1.3	9.0	5.0	3.6	3.8	4.5	4.0	58	45	67	57
19	59.5	58.3	58.0	58.6	4.4	7.0	6.6	3.3	7.1	5.4	5.1	5.3	5.8	5.4	81	71	79	77
20	56.5	55.6	57.5	56.5	[illegible].4	6.8	7.0	4.8	7.6	6.2	6.3	7.2	7.3	6.9	94	97	97	96
II Decade	57.4	56.1	56.9	56.8	3.4	6.8	4.9	1.9	7.0	4.3	4.4	4.3	4.7	4.4	74	59	72	68
21	60.3	60.8	62.8	61.1	5.4	9.4	7.0	4.3	9.6	6.6	5.7	6.3	6.4	6.1	84	71	85	80
22	65.3	65.6	**65.9**	65.6	6.6	12.0	9.2	4.8	**12.6**	8.3	5.8	6.3	7.1	6.4	79	60	81	78
23	64.1	62.3	61.8	62.7	8.0	11.6	9.2	5.6	11.9	8.7	6.4	7.2	7.5	7.0	80	71	86	79
24	59.8	59.0	60.0	59.6	4.8	9.2	8.2	**2.6**	10.1	6.4	6.2	7.1	7.2	6.8	97	81	89	89
25	59.8	57.7	56.0	57.8	6.6	9.0	8.6	6.3	9.5	7.8	6.9	7.4	7.4	7.2	94	86	89	90
26	54.7	51.4	47.3	51.1	6.2	10.6	7.4	5.1	12.1	7.7	5.6	6.9	7.3	6.6	79	72	94	82
27	**39.8**	43.3	46.1	43.1	10.6	7.6	6.6	5.8	12.5	8.9	4.9	5.0	5.4	5.1	51	64	74	63
28	53.7	55.8	57.3	55.6	3.8	6.2	4.2	3.2	7.1	4.6	5.4	6.0	5.4	5.6	90	85	87	87
29	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
30	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
31	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
III Decade	57.2	57.0	57.1	57.1	6.5	8.2	7.6	4.7	10.7	7.4	5.9	6.5	6.7	6.4	82	74	86	80
Mese . . .	54.8	54.1	54.6	54.5	4.3	7.3	5.6	2.9	8.3	5.3	4.9	5.0	5.3	5.1	79	65	77	74

Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle Nubi			Stato del Cielo			Evapor. in 24 ore	METEORE
9^h		15^h		21^h		9^h	15^h	21^h	9^h	15^h	21^h	9^h - 9^h	
W	6.5	W	9.5	W	12.0	E	E	...	3 Ci, S	10 Ci,Cu	0	0.15	≡² c. m. I.
W	2.0	W	1.0	S	0.5	E	E	E	7 Ci	4 S, Ci	8 Ci,Cu	0.49	≡° c. m. I.
W	0.0	E	9.0	E	21.5	W	SE	...	9 Cu,Ci	10 Ci	10	0.63	≡ c. m.-II; ●° a ripr. 15^h23^m-22^h15^m; ⌴ E 19^h-22^h.
W	5.0	W	12.5	W	12.5	WNW	W	...	9 Ci,Cu	10 Ci	10	0.34	≡² c. m.-I; ●° 18^h, 19^h55^m; p 21^h30^m; ⌴ W e NW 1^h-2^h.
W	7.5	NW	5.0	W	10.5	...	...	...	10 ≡²	2 Ci, S	0	0.40	≡² c. m.-I; ●² 2^h45^m-7^h50^m.
W	11.0	W	6.0	W	7.0	...	E	...	0	7 S, Ci	8 Ci	0.63	≡° c. m. I.
W	9.5	W	0.0	W	3.0	NW	N	...	6 Ci, S	3 Ci, S	4 Ci	1.10	≡° c. m. I.
W	8.5	NW	5.5	NW	0.0	SW	...	...	9 Cu,Ci	10 ≡	10	0.93	≡ c. m.-II; ●° 15^h27^m-19^h52^m, 22^h-24^h.
W	23.0	W	9.0	W	13.5	...	...	...	10	10	10	0.42	≡ c. m.-II; ● 0^h-20^h45^m; ⌴ W 8^h-14^h.
W	8.5	E	7.0	E	21.5	NNE	NE	...	9 Ci	10	10	0.28	≡° c. m.; ⌴ E 17^h-21^h.
..	8.2	..	6.5	..	10.2	...	...	...	7.2	7.6	7.0	5.37	
W	7.0	NE	2.5	S	5.0	...	E	...	1 Ci, S	5 Cu	1 S	1.00	≡² c. m. I.
SW	2.0	SW	1.0	SE	0.5	WNW	...	...	10 Ci, S	1 Ci, S	0	0.88	∨ ⊔ m.; ≡° c. m. I, ≡² c. III.
W	12.0	NE	14.0	NE	8.5	...	E	...	10 Ci, S	10 Ci	10	0.77	⊔ m.; ≡° c. m. I; p 18^h55^m.
W	7.5	NW	6.0	W	6.5	NE	E	...	10 Cu,Ci	10 Cu, Ci	10 Ci	0.99	≡° c. m. I.
W	1.0	E	4.5	E	8.0	NE	NW	...	10 Ci	7 Ci, S	10 Ci	0.80	≡° c. m. I; ●° 21^h55^m-23^h50^m.
NE	0.0	W	12.0	W	12.5	...	W	...	10 ≡²	10 Cu,Ci	0	0,59	≡² c. m. I, ≡° II; ●° 8^h5^m-13^h.
W	10.5	W	0.0	W	3.5	N	NNW	...	6 S, Ci	4 S, Ci	5 S	0.39	∨ m.; ≡° c. m. I; Tramonto rosso.
W	0.0	W	0.0	W	0.0	NW	...	...	7 Ci, S	10 Ci, S	10	0.98	≡² c. m. I, III.
W	1.5	W	0.5	W	2.0	...	...	...	10	10 Ci,Cu	10	0.67	≡² c. m. I; p 7^h45^m-8^h, ●° 8^h40^m-10^h.
W	1.0	E	23.0	NW	8.5	...	...	...	10 ≡	10 ≡	10 ≡	0.37	≡² c. 0^h-24^h; ●° 18^h52^m-20^h55^m; ⌴ E e SE 14^h-17^h.
..	4.3	..	5.4	..	5.5	...	...	...	8.4	7.7	6.6	7.44	
W	13.5	W	6.0	NW	6.0	W	WNW	W	10 Ci	7 Ci, S	7 Ci S	0.24	≡° c. m. I; ⊍ 20^h45^m-22^h30^m; ⌴ W 0^h-1^h, 10^h-12^h.
W	3.0	NE	8.5	NE	0.5	NW	NW	WSW	9 Ci, S	9 Ci, S	7 Ci S	0.50	≡° c. m., ≡² c. I, II; ⊍ 20^h-22^h; Tramonto rosso.
W	6.0	W	2.5	W	4.0	NNE	WNW	...	10 Ci	8 Ci S	10	0.72	≡² c. m. I.
SE	1.0	NW	10.5	NW	2.5	...	W	...	10 ≡	10 Ci	10 ≡	0.41	≡² int. I, ≡° c. II, ≡² c. III; p 17^h, ●° 17^h20^m-21^h.
NW	3.0	E	6.0	W	7.0	...	SW	W	10 ≡	10 Ci,Cu	10 Ci,Cu	0.29	≡² int. I, ≡² c. II, III.
W	5.5	E	18.0	NE	13.5	WNW	WNW	S	5 Ci, S	9 Cu, Ci	10 Cu,Ci	0.38	≡² c. m. I; p 22^h12^m; ⌴ NE e E 17^h-18^h.
SW	12.0	W	36.5	W	10.0	W	WNW	W	7 Cu	9 Ci,Cu	7 Ci	2.44	p 14^h, ●° 3^h-5^h, 18^h-18^h40; ⌴ e ⌴ a ripr. S, SE, SW, NW e W 0^h-16^h.
W	17.0	W	16.0	W	17.0	W	W	...	10 Ci, S	10 Ci, S	0	1.26	●° a ripr. 5^h-15^h12^m.
..	..	..	..	..	..	...	...	...	....	....	....	....	
..	..	..	..	..	..	...	...	...	....	....	....	....	
..	..	..	..	..	..	...	...	...	....	....	....	....	
..	7.6	..	13.0	..	7.6	...	...	...	8.9	9.0	7.6	6.24	
..	6.6	..	7.9	..	7.8	...	...	...	8.1	8.0	7.0	19.05	

MARZO 1910

GIORNO	Pressione Barometrica a 0° mm. 700 +				Temperatura centigrada						Tensione del vapore millimetri				Umidità relativa			
	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	minima	mass.	Media	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media
1	57.7	56.4	57.6	57.2	3.8	9.8	6.6	1.8	10.1	5.6	4.8	3.7	4.5	4.3	80	40	62	61
2	58.4	58.3	59.7	58.8	6.2	6.6	6.4	3.4	7.1	5.8	5.8	6.6	6.6	6.3	82	91	91	88
3	59.6	58.5	59.8	59.9	7.2	9.8	7.4	5.8	10.4	7.7	6.9	6.9	6.2	6.7	91	76	80	82
4	60.2	59.3	59.8	59.8	5.4	10.8	6.2	3.2	11.0	6.4	5.7	3.3	5.0	4.7	84	34	70	63
5	61.8	61.6	63.0	62.1	5.6	10.0	6.4	1.9	10.1	6.0	4.9	3.3	4.2	4.1	72	36	59	56
6	63.7	62.5	62.8	63.0	7.2	11.4	6.6	2.8	11.4	7.0	4.6	3.3	3.5	3.8	60	33	49	47
7	62.8	61.7	62.3	62.3	6.6	12.8	8.0	2.7	13.2	7.6	4.3	3.8	4.1	4.1	60	35	51	49
8	63.7	62.5	63.1	63.1	6.4	13.0	9.4	3.4	13.2	8.1	4.4	4.3	4.9	4.5	62	39	56	52
9	63.8	62.7	62.9	63.1	7.0	14.2	9.4	3.4	14.2	8.7	5.1	3.8	4.8	4.6	68	32	47	49
10	62.7	61.0	61.1	61.6	6.8	14.2	9.2	3.8	14.5	8.6	5.0	3.4	4.2	4.2	68	28	49	48
I Decade	61.4	60.5	61.2	61.0	6.2	11.3	7.6	3.2	11.5	7.1	5.2	4.2	4.8	4.7	73	44	61	59
11	61.9	61.5	60.6	61.3	9.0	14.0	8.8	5.2	14.0	9.3	5.4	4.6	5.3	5.1	63	39	63	55
12	60.6	59.1	60.2	60.0	10.2	16.2	9.8	5.3	17.7	10.8	7.4	6.4	8.1	7.3	80	47	89	72
13	58.9	57.9	58.8	58.5	7.2	15.2	9.2	6.6	15.6	9.7	7.4	5.8	7.8	7.0	97	45	89	77
14	60.3	60.0	60.5	60.3	8.0	10.8	10.2	7.1	11.0	9.1	7.3	7.6	8.6	7.8	92	80	92	88
15	59.8	58.2	57.4	58.5	10.6	12.0	10.2	9.4	12.5	10.7	8.8	8.0	8.9	8.6	92	76	96	88
16	58.4	57.8	58.4	58.2	10.2	14.6	10.2	6.8	15.3	10.6	7.9	6.1	6.2	6.7	84	49	67	67
17	57.5	55.3	54.5	55.8	11.0	15.0	12.4	6.2	15.2	11.2	6.0	5.4	5.2	5.5	61	43	48	51
18	52.7	49.1	47.3	49.7	9.8	14.2	10.0	6.5	14.4	10.4	5.6	5.7	5.1	5.5	62	47	55	55
19	46.7	46.2	47.4	46.8	11.0	13.4	10.0	6.4	16.2	10.9	6.0	7.6	6.8	6.8	61	66	74	67
20	49.1	49.1	50.7	49.6	9.6	12.6	8.8	8.8	14.7	10.5	7.8	6.2	7.5	7.2	87	57	89	78
II Decade	56.6	55.4	55.6	55.9	9.7	13.8	9.9	6.8	14.7	10.3	7.0	6.3	7.0	6.8	78	55	76	70
21	51.4	50.1	51.2	50.9	8.6	14.0	12.4	7.7	14.1	10.7	7.4	5.1	5.2	5.9	89	43	48	60
22	53.0	52.9	54.9	53.6	11.6	15.0	11.0	7.9	15.1	11.4	5.2	2.9	3.6	3.9	51	23	37	37
23	57.0	54.9	54.3	55.4	10.4	14.2	10.6	5.8	14.6	10.4	5.2	3.6	4.7	4.5	55	30	49	45
24	56.4	55.9	56.6	56.3	10.8	13.8	7.2	6.8	41.1	9.7	4.8	3.2	3.0	3.7	49	27	39	38
25	58.5	57.3	59.7	58.5	6.0	11.0	8.0	2.9	11.7	7.2	3.9	4.2	4.5	4.2	56	43	56	52
26	60.4	59.6	60.0	60.0	10.2	12.6	9.0	4.6	12.7	9.1	5.1	3.9	3.9	4.3	55	36	46	46
27	61.0	59.7	59.9	60.2	9.4	11.2	10.4	5.9	14.6	10.1	5.4	3.6	4.6	4.5	61	30	49	47
28	60.7	59.9	61.0	60.5	11.0	15.4	10.8	8.2	15.6	11.4	5.8	5.2	4.8	5.3	59	40	49	49
29	60.3	57.3	57.5	58.4	12.6	16.8	12.0	6.5	17.2	12.1	5.0	3.2	4.0	4.1	46	22	39	36
30	55.9	51.1	52.2	53.1	10.2	12.6	6.4	5.4	13.0	8.7	6.5	5.5	5.1	5.7	70	50	70	63
31	50.1	52.1	55.2	52.5	4.2	2.0	1.4	0.4	6.7	3.2	5.4	5.1	4.7	5.1	87	96	93	92
III Decade	56.8	55.5	56.6	56.3	9.5	11.9	9.0	5.6	13.6	9.4	5.4	4.1	4.4	4.6	62	40	52	51
Mese . . .	58.2	57.0	57.8	57.7	8.5	12.6	8.8	5.2	13.3	9.0	5.8	4.9	5.3	5.4	70	46	63	60

Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle Nubi			Stato del Cielo			Evapor. in 24 ore	METEORE
9h		15h		21h		9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h - 9h	
W	13.5	NW	12.0	W	12.0	SW	SSW	...	8 Cu, Ci	9 Ci, S	0	0.48	∨ m.; ≡° c. m. I.
W	14.5	W	18.0	W	15.0	...	WNW	...	10 Ci, S	10 Cu, Ci	10	1.10	p. e ●° 9^h30^m-13^h18^m.
W	17.0	W	14.0	NW	8.0	E	NE	...	10 Cu, Ci	10 Cu, Ci	0	0.43	●° 7^h-7^h50^m, 13^h45^m-16^h8^m a ripr.
W	10.0	NE	21.0	SE	11.0	...	NNE	...	0	2 Ci, Cu	0	0.54	≡² c. m. I; ⌐ NE 15^h-16^h.
W	6.0	E	6.0	E	5.5	...	...	...	0	2 Cu	0	1.13	∨² m.; ≡² c. m. I.
W	11.5	W	5.5	W	8.5	...	...	...	0	0	0	1.10	≡° c. m. I.
SW	3.0	NW	3.5	W	8.5	...	...	...	0	0	0	1.38	≡° c. m. I.
W	5.0	N	6.0	NE	6.0	...	SE	...	1 S, Ci	3 S, Ci	0	1.33	≡° c. m. I.
W	4.0	NE	8.0	E	5.0	...	...	...	0	0	0	1.29	≡° c. m. I.
W	5.5	E	6.5	E	8.0	...	...	...	0	0	0	1.49	≡² c. m. I.
..	9.0	..	10.1	..	9.1	...	...	...	2.9	3.6	1.0	10.27	
W	6.5	N	5.5	E	16.0	WNW	NW	...	9 Ci, S	5 Ci, S	0	1.52	≡° c. m. I.
E	13.0	S	13.5	S	4.0	SW	W	E	8 Ci, S, Cu	7 Cu, Ci	5 Ci	1.32	≡² int. 22^h-24^h; ●° 17^h43^m-20^h ⌐ W 17^h-18^h.
E	10.5	NE	24.0	NE	10.5	...	SE	...	10 ≡²	9 Ci, S, Cu	0	1.22	≡² int. n. m., ≡ c. I; ⌐ E e NE 13^h-18^h.
E	6.5	S	6.5	N	11.5	...	...	...	10 ≡²	10 Ci, S	10 Ci, S	1.00	≡° c. m. I.
NE	25.0	NE	28.5	E	23.5	ESE	ESE	E	10, Ci	10 Cu, Ci	10 Ci	0.36	●° a ripr. 2^h-23^h50^m; ⌐ e ⌐ E e NE 5^h-22^h.
W	5.0	W	10.5	W	10.5	NW	NW	...	9 Cu, Ci	7 Cu	1 S	0.70	≡² int. n. m.; ≡² c. I.
W	3.5	NW	5.0	N	4.5	E	...	W	5 S, Ci	1 Cu	5 Cu	1.14	≡° c. m. I.
W	3.0	E	6.0	S	9.0	W	SSW	SW	8 Cu, Ci	10 Cu, Ci	3 Ci, S	1.39	≡° c. m. I.
SE	10.5	NE	22.0	E	13.0	NW	WNW	...	10 Cu, Ci	10 Cu, Ci	10 Cu, Ci	1.48	p. 16^h28^m, 21^h45^m-22^h; ⌐ NE 14^h-16^h.
NE	23.5	E	21.5	E	14.0	E	E	E	10 Ci, S	10 Cu, Ci	10 Cu, Ci	1.41	●° 6^h15^m, 8^h50^m, 19^h55^m-23^h20^m; ⌐ NE 7^h-9^h, 14^h-15^h.
..	10.7	..	14.3	..	11.7	...	...	...	8.9	7.9	5.4	11.54	
NE	6.0	NE	30.0	E	4.5	...	SE	SE	10 S, Ci	8 Cu, Ci	10 Cu, Ci	1.04	●° 2^h, 5^h30^m-12^h10^m; ⌐ NE 5^h, ⌐ e ⌐ 13^h-17^h.
N	6.0	NE	15.0	E	5.5	...	...	ENE	0	1 Cu, S	8 Cu, Ci	1.59	≡° c. m. I.
W	6.5	E	5.0	SE	8.0	...	...	...	0	0	0	2.29	≡° c. m. I.
W	4.0	E	11.5	E	17.5	...	...	...	0	0	0	1.83	≡° c. m. I; ⌐ E 17^h e 19^h.
W	4.0	E	30.0	E	10.0	...	NE	NE	1 S, Ci	6 Ci, S	9 Cu	2.69	≡° c. m. I; ⌐ e ⌐ E e SE 12^h-18^h.
S	2.5	E	11.0	SE	7.0	SE	SE	...	1 Cu, Ci	4 Cu	0	1.86	≡° c. m. I.
W	4.0	E	10.5	E	9.0	NE	NW	NW	9 Cu, Ci	4 Cu, Ci	10 Cu	1.79	
SW	7.0	N	5.0	SW	15.0	NW	W	...	9 Cu, Ci	5 Cu	0	2.06	
W	5.5	NW	15.0	W	11.0	...	...	...	0	1 S, Ci	8 Cu	1.71	●° 22^h40^m-24^h50^m.
E	6.0	E	7.0	E	17.5	...	NW	...	1 Ci, S	2 Ci, S	10	2.48	●° 21^h10^m-22^h; ⌐ e ⌐ E e SE 0^h-1^h, ⌐ NE 18^h-20^h.
NE	40.5	NE	45.0	E	6.0	...	...	...	10 Ci, S	10 Ci, S	10	1.41	≡ int. 21^h-24^h; ●° 4^h-14^h, 14^h45^m-17^h, ✳ 14^h-14^h45^m, 17^h-24^h; ⌐ e ⌐ NE 7^h-19^h (Km. 50: 10^h-11^h).
..	8.4	..	16.8	..	10.1	...	...	...	3.7	3.7	5.9	20.75	
..	9.3	..	13.8	..	10.2	...	...	...	5.1	5.0	4.1	42.56	

APRILE 1910

GIORNO	Pressione Barometrica a 0° mm. 700 +				Temperatura centigrada						Tensione del vapore millimetri				Umidità relativa			
	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	minima	mass.	Media	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Medi
1	59.6	58.4	58.4	58.8	2.3	5.0	4.8	0.8	5.4	3.3	5.1	5.3	5.4	5.3	95	81	84	87
2	59.0	58.0	58.3	58.4	4.8	9.6	7.0	3.9	10.1	6.5	5.4	5.1	6.2	5.6	84	57	82	74
3	54.7	51.7	52.2	52.9	5.6	7.4	7.4	5.4	7.6	6.5	6.0	7.0	7.3	6.8	88	91	94	91
4	54.0	52.5	54.4	53.6	7.4	10.6	7.4	3.9	10.8	7.4	6.2	5.8	6.6	6.2	80	61	86	76
5	55.7	53.7	53.3	54.2	9.0	12.8	9.8	4.9	13.0	9.2	5.9	6.5	8.3	6.9	68	59	92	73
6	50.6	49.1	51.6	50.4	11.8	14.2	8.0	7.9	15.2	10.7	7.7	4.6	6.9	6.4	75	37	86	66
7	52.1	51.9	54.1	52.7	11.6	14.8	9.8	5.2	15.1	10.4	6.1	4.4	4.7	5.1	60	35	52	49
8	55.0	53.5	54.5	54.3	12.4	14.8	10.0	6.8	16.6	11.5	4.9	4.2	6.8	5.3	46	33	74	51
9	51.0	47.5	47.6	48.7	8.0	7.4	6.4	5.1	11.0	7.6	7.3	7.5	7.0	7.3	92	97	97	95
10	48.9	49.2	51.2	49.8	8.8	14.0	10.6	5.5	16.3	10.3	5.6	3.8	4.5	4.6	65	31	47	48
I Decade	54.1	52.6	53.6	53.4	8.2	11.1	8.1	4.9	12.1	8.3	6.0	5.4	6.4	5.9	75	58	79	71
11	55.0	54.8	55.5	55.1	9.8	13.4	8.0	5.4	13.5	8.9	5.4	5.0	4.5	5.0	59	43	56	53
12	55.5	54.0	54.5	54.7	9.0	14.8	11.2	3.7	15.2	9.8	6.1	4.6	6.6	5.8	71	37	66	58
13	54.0	52.7	52.6	53.1	11.6	16.4	12.4	6.4	16.9	11.8	7.0	5.3	8.0	6.8	69	38	74	57
14	51.2	49.7	48.4	49.8	10.2	14.2	12.4	8.6	16.1	11.8	8.8	8.4	9.5	9.0	95	69	88	84
15	4.75	48.3	49.5	48.4	13.0	19.4	15.2	10.6	20.5	14.8	10.4	7.1	5.1	7.5	93	42	39	58
16	48.7	46.7	48.5	48.0	17.2	18.6	10.2	9.9	19.1	14.1	6.6	5.2	7.9	6.6	45	33	84	54
17	48.5	47.7	49.4	48.5	9.6	12.8	11.0	7.3	15.4	10.8	7.5	5.6	6.7	6.6	84	51	68	68
18	51.5	52.0	54.7	52.7	13.6	19.0	15.2	9.5	19.1	14.4	6.3	5.2	6.0	5.8	54	32	47	44
19	58.3	56.9	57.3	57.5	17.6	21.6	17.2	11.8	22.1	17.2	6.0	5.1	6.8	6.0	40	27	47	38
20	53.9	52.2	54.7	53.6	18.4	23.6	17.6	13.8	24.1	18.5	6.6	6.6	6.3	5.8	42	31	42	38
II Decade	52.4	51.5	52.5	52.1	13.0	17.4	13.0	8.7	18.2	13.2	7.1	5.8	6.7	6.5	65	40	61	55
21	57.0	54.6	53.2	55.0	16.8	21.4	18.4	11.1	22.5	17.2	9.9	6.1	7.9	8.0	70	32	50	51
22	53.1	49.1	47.8	50.0	13.2	20.8	15.2	11.1	21.0	15.1	9.5	8.9	10.4	9.6	84	49	81	71
23	49.2	49.0	50.8	49.7	17.2	19.4	14.6	12.3	20.1	16.1	8.1	7.3	9.9	8.4	55	43	80	59
24	52.8	51.5	51.1	51.8	12.4	16.4	13.2	10.7	17.8	13.5	9.2	8.6	10.3	9.4	86	62	91	80
25	49.0	48.9	50.3	49.4	14.2	19.6	14.6	10.9	21.0	15.2	9.4	6.7	4.3	6.8	78	39	35	51
26	52.6	51.6	52.0	52.1	15.6	19.6	15.6	9.1	20.9	15.3	6.3	5.1	5.3	5.6	48	30	40	39
27	53.7	52.8	57.0	54.5	16.0	18.6	11.6	10.4	20.1	14.5	8.0	6.5	7.7	7.4	59	40	76	58
28	58.6	57.3	57.4	57.8	12.4	16.0	11.4	8.9	17.9	12.7	7.5	4.3	5.1	5.6	70	33	50	51
29	56.6	54.1	53.9	54.9	15.0	17.6	12.0	6.9	17.7	12.9	6.1	5.1	5.8	5.7	48	34	56	46
30	51.9	50.3	52.3	51.5	15.4	18.2	13.0	6.9	19.6	13.7	5.9	5.0	7.6	6.2	45	32	68	45
31	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
III Decade	53.5	51.9	52.6	52.7	14.8	18.8	14.0	9.8	19.9	14.6	8.0	6.4	7.4	7.3	64	39	63	55
Mese . . .	53.3	52.0	52.9	52.7	12.0	15.7	11.7	7.8	16.7	12.1	7.0	5.9	6.8	6.6	68	46	68	61

Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle Nubi			Stato del Cielo			Evapor. in 24 ore	METEORE
9h		15h		21h		9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h-9h	
E	7.0	W	9.5	W	11.0	. . .	. . .	. . .	10	10 S, Ci	10	0.30	✳ $0^h-0^h15^m$; ●° $0^h15^m-11^h$.
W	11.0	W	7.5	NW	6.0	. . .	SE	. . .	10 Ci, S	10 Cu, Ci	10	0.41	●° 0^h-6^h, $8^h-8^h50^m$, 19^h25^m.
N	3.5	W	2.5	W	5.0	. . .	. . .	. . .	10	10	10	0.72	≡ c. II, III; ●° $7^h15^m-16^h30^m$.
W	5.5	E	12.5	W	10.5	SW	SE	. . .	9 Cu, Ci	10 Ci, Cu	10 Ci, Cu	0.25	●° $15^h50^m-19^h55^m$.
E	10.5	E	35.5	E	20.5	S	SSE	. . .	8 Cu, Ci	10 Cu, Ci	10 Cu, Ci	0.66	≡² c. m.; ●° $16^h20^m-24^h$; –ш, –ш E 11^h-18^h –ш E 21^h-24^h.
SE	7.0	SE	14.5	W	9.0	SSW	SW	. . .	9 Ci, S	10 Cu, Ci, S	1 Ci	1.14	●° 0^h-4^h, 16^h40^m; 2 ⌒ NE 16^h55^m; –ш 0^h-2^h.
SW	3.5	W	3.5	W	10.0	. . .	W	. . .	1 S, Ci, Cu	8 Cu	1 Ci	1.34	≡° c. m.; ⚡ WSW 22^h-24^h; –ш e –ш SW 17^h-19^h.
W	6.5	S	8.0	E	6.0	NW	W	. . .	4 S, Ci	7 Cu, Ci	0	1.70	T ⚡ da E e NW verso NE $16^h55^m-19^h30^m$.
NE	8.0	E	32.0	NE	36.5	. . .	E	. . .	10≡	10 S, Ci, Cu	10	1.51	≡ int. n. m.; ≡ c. I; ● a ripr. $8^h-10^h30^m$ 12^h-24^h; –ш E 14^h, –ш NE 15^h-22^h –ш 22^h-23^h.
W	19.0	NE	9.0	S	13.5	NE	NE	. . .	9 Cu, Ci	9 Cu, Ci	7 Ci	0.56	● 0^h-4^h, p. 21^h35^m.
. .	8.2	. .	13.5	. .	12.8	. . .	. . .	. . .	8.0	9.4	6.9	8.6	
W	5.0	E	15.0	E	14.5	. . .	NW	E	0	2 Cu, Ci	5 Ci, Cu	1.87	–ш E 16^h-18^h.
E	3.0	NE	5.5	E	6.0	WNW	W	. . .	4 S, Ci	7 Cu, Ci	0	1.76	≡° c. m.
W	5.5	NE	11.5	E	12.5	WNW	WNW	W	9 S, Ci	9 Cu, Ci	9 Ci	1.29	≡° c. m. I.
E	4.5	NE	21.5	NE	14.5	. . .	E	. . .	10 ≡²	10 Cu, Ci	10 S, Ci	1.71	≡² int. n. m., ≡² c. I; –ш E 12^h-15^h.
E	3.0	S	4.0	W	10.5	E	S	. . .	9 S, Ci	7 Cu	4 S, Ci, Cu	0.67	≡² int. n. m., ≡² c. I, o. chiaro III; ● 0^h-1^h; ⌓ 21^h20^m.
SE	11.0	S	19.5	E	9.0	SSW	SE	S	7 S, Ci, Cu	9 Cu, Ci	7 S, Ci, Cu	1.67	●'' $17^h20^m-19^h30^m$; 2 ⌒ ENE 19^h50^m; –ш e –ш E, SE 10^h-14^h, –ш SW, NW, W 15^h-18.
W	12.5	NE	12.5	NW	12.0	. . .	NW	. . .	10 Ci, S	10 Cu, Ci	10 Cu, Ci	2.50	≡ c. n. m.; ●° $13^h45^m-14^h10^m$, p. $15^h40^m-16^h5^m$.
W	23.0	W	19.0	NW	14.5	NE	E	E	10 S, Ci, Cu	8 S, Ci, Cu	9 Ci, S	1.26	p. $6^h50^m-7^h10^m$; –ш W 8^h-14^h, 15^h.
W	17.5	W	9.0	W	12.5	. . .	NE	N	2 S	5 S, Ci	9 Cu, Ci	2.71	Tramonto rosso chiaro.
W	10.0	W	16.0	W	11.5	NE	NE	E	10 Ci, S	5 S, Ci	8 S, Ci	3.14	⌓² $20^h30^m-24^h$; ∪ $20^h30^m-22^h40^m$; –ш W 12^h, 17^h-20^h.
.	9.5	. .	13.4	. .	11.8	. . .	. . .	. . .	7.1	7.2	7.1	18.6	
W	5.5	NW	7.0	SW	9.5	. . .	N	NW	0	1 Ci, S	5 S, Ci	3.86	≡² c. m.; ⌓ e ∪ 22^h; tram. rosso.
W	6.0	E	5.5	E	11.0	. . .	NW	N	10≡²	7 Ci, S	8 Ci, S	2.19	≡² c. m. I.
E	4.0	E	6.5	SE	12.0	ESE	SW	. . .	6 Cu, Ci	5 Cu, Ci	0	1.43	≡° c. m.; ⚡ ●° ENE-S $18^h50^m-19^h40^m$.
E	16.0	NE	21.0	E	7.5	. . .	WNW	SW	10	10 S, Ci, Cu	10 Ci, S	1.96	⚡ ●° WNW-SE $15^h13^m-18^h30^m$; ● 19^h30^m-20; 2 ⌒ $17^h-17^h30^m$; –ш E e NE 12^h-15^h, 17^h.
E	5.0	SW	10.0	E	9.0	WNW	NNW	. . .	9 Cu, Ci	6 Cu, Ci	0	0.91	≡² int. n. m.; o. chiaro III; –ш W 16^h-19^h.
E	5.5	W	16.0	SW	18.5	W	W	W	7 S, Ci	7 Cu, Ci	2 Ci	2.29	≡° c. m.; –ш W 15^h, 21^h.
W	4.0	W	9.0	NE	20.5	. . .	NW	W	2 Ci, Cu	9 Cu, Ci	9 Ci	2.40	●° 17^h30^m 18^h25^m; ⌒ 18^h20^m; –ш E 17^h-21^h.
E	11.5	E	20.0	SE	16.0	SE	. . .	. . .	10 Cu, Ci	0	0	2.15	–ш E 12^h-17^h.
E	5.5	NE	18.5	E	16.0	NW	. . .	. . .	2 Ci	3 Ci, S	0	2.30	≡° c. m.; –ш E 17^h.
W	3.0	NE	6.5	N	12.5	. . .	. . .	N	1 S, Ci	2 Cu	5 Ci	3.01	
.	. .	. .	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	
.	6.6	. .	12.0	. .	13.3	. . .	. . .	. . .	5.7	5.0	3.9	22.5	
.	8.1	. .	12.9	. .	12.6	. . .	. . .	. . .	6.9	7.2	6.0	49.7	

MAGGIO 1910

GIORNO	Pressione Barometrica a 0° mm. 700 +				Temperatura centigrada						Tensione del vapore millimetri				Umidità relativa			
	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	minima	mass.	Media	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media
1	54.2	53.2	53.2	53.5	13.8	16.2	13.2	9.4	17.1	13.4	7.4	6.2	7.0	6.9	63	45	62	57
2	48.3	43.9	45.3	45.8	13.4	16.7	9.6	7.9	17.0	12.0	7.4	5.7	8.2	7.8	64	40	92	65
3	45.1	44.0	44.5	44.5	14.2	18.0	14.0	7.1	19.1	13.6	4.8	4.2	4.5	4.5	40	27	37	35
4	45.8	44.8	45.1	45.2	16.2	20.0	15.0	10.1	21.4	15.7	5.0	3.7	5.3	4.7	36	21	41	33
5	46.9	46.0	48.5	47.1	12.2	13.4	11.0	11.9	15.4	12.6	7.1	8.6	7.2	7.6	67	75	73	72
6	52.4	52.9	53.5	52.9	16.0	16.6	14.0	9.9	17.1	14.2	6.3	5.4	6.8	6.2	46	38	57	47
7	53.5	51.9	51.4	52.3	15.6	19.2	15.2	10.1	19.9	15.2	8.0	7.4	9.3	8.2	61	45	72	59
8	46.1	44.3	46.2	45.5	20.0	19.4	15.0	10.8	21.6	16.9	7.8	6.0	5.0	6.3	44	36	39	40
9	46.7	47.2	48.8	47.6	18.4	17.6	13.4	11.9	20.1	15.9	4.1	2.5	3.7	3.4	26	16	32	25
10	50.4	50.5	49.9	50.3	9.6	12.2	10.6	7.3	14.1	10.4	5.9	5.5	6.5	6.0	66	52	68	62
I Decade	48.9	47.9	48.6	48.5	14.9	16.9	13.1	9.6	18.3	14.0	6.4	5.5	6.4	6.1	51	40	57	49
11	45.3	49.2	52.4	49.0	9.6	9.2	8.2	7.3	11.2	9.2	8.0	7.8	7.9	7.9	89	89	97	92
12	54.1	55.0	56.1	55.1	13.4	16.2	13.0	5.5	16.6	12.1	5.9	4.7	6.3	5.6	52	34	56	47
13	56.4	54.8	55.1	55.4	14.2	18.2	14.8	7.5	18.3	13.7	5.9	4.9	7.0	5.9	49	32	56	46
14	53.9	53.4	53.6	53.6	17.0	15.4	13.6	10.4	19.1	15.0	5.9	7.6	8.5	7.3	41	59	73	58
15	53.7	52.4	53.1	53.1	16.0	19.0	15.2	9.4	19.1	14.9	8.3	6.8	9.3	8.1	61	41	72	58
16	53.3	52.8	53.5	53.2	17.8	19.8	16.2	11.3	20.1	16.4	9.3	8.4	10.3	9.3	62	49	75	62
17	54.2	54.2	54.2	54.2	15.8	19.4	16.6	12.8	20.0	16.3	11.9	10.0	10.5	10.8	89	60	75	75
18	55.0	53.7	54.2	54.3	19.2	22.2	17.0	11.9	22.5	17.7	11.3	10.6	10.1	10.7	68	54	70	64
19	53.4	51.5	52.2	52.4	19.0	22.4	17.6	12.2	23.0	17.9	11.7	10.5	9.7	10.6	72	52	65	63
20	51.4	50.4	52.3	51.2	20.6	23.2	18.8	13.1	24.0	19.1	10.5	7.7	9.3	9.2	58	36	57	50
II Decade	53.1	52.7	53.7	53.2	16.2	18.5	15.1	10.2	19.4	15.2	8.9	7.9	8.9	8.6	64	51	70	62
21	53.2	51.6	51.8	52.2	20.8	25.0	19.2	14.7	25.6	20.1	9.5	6.9	8.2	8.2	52	29	50	44
22	53.3	51.8	52.4	52.5	15.2	21.0	16.8	14.9	21.7	17.2	12.6	7.7	11.6	10.6	98	41	81	73
23	52.2	51.7	52.7	52.2	18.8	19.8	17.2	14.8	20.5	17.8	9.0	8.7	9.7	9.1	56	50	66	57
24	48.3	53.9	54.5	52.2	18.4	17.0	16.2	14.3	19.6	17.1	10.4	11.2	10.3	10.6	66	78	75	73
25	55.3	53.7	55.1	54.7	19.0	22.0	18.0	13.2	22.3	18.1	12.3	7.9	9.8	10.0	75	40	64	60
26	56.3	55.7	56.7	56.2	18.2	22.6	17.8	15.0	23.0	18.5	11.6	9.2	9.3	10.0	75	45	62	61
27	55.9	54.4	53.4	54.6	22.4	21.0	17.6	14.8	23.9	19.7	8.2	9.1	8.9	8.7	41	49	59	50
28	53.5	52.2	53.1	52.9	21.6	23.2	17.4	12.9	23.8	18.9	9.3	7.7	10.4	9.1	48	36	70	51
29	53.8	51.4	51.5	52.2	19.2	23.0	18.0	13.4	23.1	18.4	11.9	9.0	12.3	11.1	72	43	80	65
30	50.3	48.5	49.2	49.3	19.4	23.2	20.4	12.9	23.6	19.1	12.1	7.8	8.9	9.6	72	36	50	53
31	50.2	49.5	51.0	50.2	21.4	25.2	21.0	15.7	25.6	20.9	9.4	8.6	10.2	9.4	49	36	55	47
III Decade	52.9	52.2	52.9	52.7	19.5	22.1	18.1	14.2	23.0	18.7	10.6	8.5	10.1	9.7	64	44	65	58
Mese . . .	51.7	51.0	51.8	51.5	16.9	19.3	15.5	11.4	20.3	16.1	8.6	7.4	8.5	8.2	60	45	64	56

Direzione e velocità del vento in chilometri 9h		15h		21h		Direzione delle Nubi 9h	15h	21h	Stato del Cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h - 9h	METEORE
E	20.5	E	23.0	E	7.5	SE	SE	SE	1 S, Ci, Cu	10 Cu, Ci	8 Ci	2.96	—ш E 0^h-11^h, —ш 11^h-14^h, —ш 14^h-15^h.
W	8.0	E	15.0	NW	11.0	NE	NW	...	8 Cu, Ci	8 Ci, Cu	10 Ci	2.10	●^{2} 17^h-24^h; —ш W 1^h-4, 6^h-9^h, —ш 9^h-10^h, —ш N e E 10^h-13^h.
W	29.0	W	15.5	W	15.5	WNW	E	...	8 Ci, S	5 Ci, S	3 Ci	1.69	o. chiaro II; ● 0^h-6^h.
W	16.5	W	11.0	W	13.0	E	NW	...	3 Ci, S	8 Ci, S	1 Ci	3.12	
W	14.0	W	10.5	N	8.0	...	W	...	10 Ci, S	10 Cu	10 Ci	2.91	● $7^h30^m-10^h40^m$, $13^h55^m-14^h10^m$, $22^h10^m-23^h50^m$.
W	5.0	E	7.5	E	9.5	NE	NW	...	3 Cu, Ci	2 Cu, Ci, S	0	1.43	●° 4^h-5^h.
W	4.5	NE	12.0	E	6.5	NW	SW	...	8 Ci, S	7 Cu, Ci, S	1 Ci	1.99	
E	6.5	SW	21.0	SW	34.5	W	W	W	9 Cu, Ci	10 N, Cu, Ci	4 Ci	2.35	—ш SW 10^h, 13^h, 15^h-18^h, —ш 18^h-22^h, —ш 22^h-24^h.
SW	12.0	W	7.5	SW	3.0	W	W	...	5 Ci, Cu	10 Ci, Cu	10 Ci	3.70	o. chiaro II; ≺ W $20^h30^m-22^h$; —ш SW 0^h-2^h, 12^h-14^h.
W	7.5	NE	15.0	SE	3.5	...	...	...	10 Ci, S	10 Ci, S	10 Ci, S	3.61	●° 23^h50^m-24; Tram rosso.
..	12.4	..	13.8	..	11.2	...	...	...	7.1	8.0	5.7	25.86	
W	11.5	E	9.5	NE	6.5	...	...	...	10 Ci, S	10 Ci, S	10 Ci, S	1.36	●° $0^h-16^h10^m$, 22^h-23^h, p. 18^h35^m.
W	8.0	W	6.5	NE	6.5	...	W	S	2 Cu	6 Cu	3 Ci, Cu	0.61	
W	13.5	W	9.5	W	10.0	...	...	W	1 Ci, S	0	5 Ci, S	1.84	
W	6.0	SE	15.5	NE	7.5	E	NE	E	7 Ci S,	10, Ci	10 Cu, Ci	2.60	—ш E 14^h-15^h.
NW	4.5	E	11.5	E	6.0	WSW	SW	SE	3 Ci	10, Ci Cu	10 Cu, Ci	1.98	
W	3.5	E	5.5	N	8.5	W	W	E	6 Ci	10, Ci	9 Ci	1.77	●° $14^h48^m-15^h$.
W	9.5	E	8.0	E	9.0	SSW	E	...	10 Ci, Cu	9 Cu, Ci	0	1.77	
NE	4.5	E	12.0	E	9.0	ENE	E	ENE	7 Cu, Ci	7 Cu	3 S	1.38	
E	7.0	E	22.0	E	10.0	SE	NE	...	8 Ci	7 S, Ci	0	2.14	≡^{2} a. m.; —ш E 12^h-18^h.
E	4.0	E	19.0	W	3.0	SE	SE	...	5 Ci, S	5 Cu, Ci	0	2.25	≺ 1^h-3^h.
..	7.2	..	11.9	..	8.1	...	...	...	5.9	7.4	5.0	17.70	
W	9.5	NW	5.5	SW	13.5	SE	E	...	8 S, Cu, Ci	5 S, Ci	1 S	2.97	⌓ 21^h-24^h; —ш W 1^h, 17^h.
E	12.5	E	4.0	SE	8.5	E	...	E	10 Ci, S	7 S, Ci, Cu	10 Cu, Ci	1.14	●° $7^h45^m-9^h10^m$; ≺ ●^{2} SW-W $18^h30^m-19^h30^m$.
E	9.5	E	28.5	E	15.5	SE	SW	SW	8 Ci, Cu	9 S, Ci, Cu	10 Ci, Cu	1.55	p. e ●° a ripr. $10^h35^m-12^h5^m$, 20^h50^m; ⊤ ≺ WNW-S 11^h-13^h; —ш E 11^h, 13^h-16^h.
NE	15.5	SE	11.0	E	10.0	E	E	E	7 Ci, Cu	10 Ci, Cu	5 Ci, S	2.04	● a ripr. $10^h30^m-15^h35^m$; —ш NE 9^h-12^h.
SW	3.0	E	8.5	SW	2.5	SW	E	W	8 Cu, Ci	4 Cu, Ci	2 Ci, S	1.19	≡^{2} c. m.
W	3.0	W	16.0	E	4.5	SW	WSW	...	8 Cu, Ci	7 Ci, Cu	0	2.14	⊤ ≺ N-NE $12^h10^m-15^h45^m$; ⌒ 18^h55^m; ≺ NNW 21^h-23^h.
W	6.5	S	20.0	SW	11.0	WNW	WNW	S	4 Ci, S	10 Ci, Cu, N	6 Ci, S	2.38	●° $15^h35^m-16^h40^m$; —ш SW 15^h-17^h.
W	2.0	NE	5.0	NE	8.0	...	NE	N	1 S	8 Cu	5 Ci, S	2.64	⊤ ≺ W-NE-E $16^h5^m-17^h40^m$, ● $16^h55^m-17^h50^m$; ⌒ 16^h15^m.
NE	6.0	E	9.5	E	14.0	...	SE	E	1 Cu, Ci	5 Cu	8 Ci, S	2.49	≡^{2} int. m.
E	2.0	E	3.0	E	6.0	E	SE	...	2 Ci	3 Cu, Ci	0	2.05	≡^{2} int. n. m.; ≡^{2} c. I.
W	9.5	E	9.5	E	11.5	...	NE	...	0	5 Cu, Ci	1 Ci, S	2.70	
..	7.9	..	12.6	..	10.5	...	...	...	5.2	6 6	4.4	25.29	
..	8.9	..	12.3	..	9.6	...	...	...	6.1	7.3	5.0	68.85	

GIUGNO 1910

GIORNO	Pressione Barometrica a 0° mm. 700 +				Temperatura centigrada						Tensione del vapore millimetri				Umidità relativa			
	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	minima	mass.	Media	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media
1	52.5	51.7	52.7	52.3	24.8	26.6	22.6	16.8	27.0	22.8	9.7	8.0	10.4	9.4	42	31	51	41
2	54.2	53.3	53.9	53.8	24.2	27.6	23.2	17.9	28.1	23.4	10.7	11.1	10.9	10.9	47	40	52	46
3	54.6	52.7	51.9	53.1	24.6	27.0	23.0	18.2	27.6	23.4	8.6	9.6	10.8	9.7	37	36	52	42
4	50.8	47.7	48.5	49.0	24.4	27.2	20.8	18.1	28.1	22.8	8.7	9.2	13.3	10.4	38	34	73	48
5	45.8	44.4	46.4	45.5	17.0	18.2	15.8	14.8	21.6	17.3	12.7	14.6	11.7	13.0	88	94	87	89
6	47.4	49.3	51.4	49.4	18.2	22.2	21.6	14.9	22.8	19.4	12.2	8.4	11.6	10.7	78	42	60	60
7	54.9	54.8	56.1	55.3	22.6	25.2	21.0	15.8	26.1	21.4	11.3	10.3	11.1	10.9	56	43	60	53
8	56.1	54.3	54.2	54.9	23.6	26.8	23.4	16.9	27.3	22.8	10.4	11.6	12.7	11.6	48	44	59	50
9	55.0	52.6	52.3	53.3	23.8	27.6	22.4	18.8	28.0	23.2	13.4	13.1	12.4	13.0	61	48	61	57
10	52.4	50.2	50.5	51.0	23.2	25.4	19.6	19.1	25.9	21.9	11.3	11.5	13.1	12.0	53	48	77	59
I Decade	52.4	51.1	51.8	51.8	22.6	25.4	21.3	17.1	26.3	21.8	10.9	10.7	11.8	11.1	55	46	63	55
11	51.3	51.6	51.9	51.6	22.0	20.8	20.4	16.3	26.0	21.2	11.4	9.8	12.4	11.2	58	53	69	60
12	52.5	51.0	50.3	51.3	21.8	22.8	18.6	14.7	23.6	19.7	9.7	8.0	11.1	9.6	50	38	69	52
13	45.7	46.7	48.9	47.1	15.8	18.4	17.0	14.4	22.1	17.3	12.5	12.1	12.9	12.5	94	77	90	87
14	51.2	52.2	53.6	52.3	17.2	19.2	17.6	14.7	21.2	17.7	11.9	12.2	12.3	12.1	82	73	82	79
15	54.4	54.6	55.6	54.9	20.2	21.6	19.2	15.4	22.5	19.3	12.2	12.8	11.9	12.3	69	67	72	69
16	56.6	55.8	56.2	56.2	23.8	25.4	22.4	16.4	25.7	22.1	10.6	9.9	11.1	10.5	48	41	55	48
17	57.1	56.1	56.2	56.5	24.8	27.8	22.4	17.4	28.2	23.2	12.3	10.3	11.7	11.6	55	37	58	50
18	57.2	55.7	57.0	56.6	21.8	26.0	18.8	18.4	26.1	21.3	13.3	11.1	11.3	11.9	69	47	70	62
19	58.6	57.3	57.6	57.8	22.8	25.4	22.8	16.1	26.1	22.0	10.9	9.0	11.8	10.6	53	37	57	49
20	56.7	54.9	55.9	55.8	25.4	27.4	20.8	16.9	28.2	21.8	12.7	8.1	12.4	11.1	53	30	68	50
II Decade	54.1	53.6	54.3	54.0	21.6	23.4	20.0	16.1	25.0	20.7	11.8	10.3	19.9	11.3	63	50	69	61
21	58.5	58.0	58.5	58.3	20.8	22.8	18.8	16.8	23.1	19.9	9.7	10.6	11.0	10.5	53	51	68	57
22	58.7	57.6	56.6	57.6	22.6	26.4	22.2	15.4	26.6	21.7	12.8	12.5	14.7	13.3	63	49	74	62
23	55.8	54.1	53.7	54.5	22.2	28.4	23.4	17.0	29.1	22.9	14.4	10.3	9.3	11.3	72	35	44	50
24	53.2	52.0	51.0	52.1	20.4	24.6	21.8	16.9	25.6	21.2	13.3	10.7	13.4	12.5	74	47	69	63
25	49.4	47.8	47.2	48.1	24.8	27.4	23.4	17.0	27.4	23.3	13.1	12.2	10.3	11.9	57	45	48	50
26	45.1	43.0	42.7	43.6	27.2	27.4	23.4	18.9	27.7	24.3	10.1	8.5	9.1	9.2	37	31	42	37
27	48.6	50.4	53.0	50.7	21.6	27.0	20.8	17.4	27.2	21.8	9.3	5.7	8.6	7.9	48	21	47	39
28	57.4	56.8	57.2	57.1	22.6	26.2	23.2	15.9	27.1	22.2	12.8	10.3	8.3	10.5	63	41	39	48
29	57.4	55.8	54.6	55.9	24.7	28.6	23.0	17.2	28.6	23.4	9.4	10.5	10.5	10.1	41	36	50	42
30	52.5	49.3	50.0	50.6	24.2	28.4	22.8	18.4	29.1	23.6	11.9	8.4	8.3	9.5	53	29	40	41
31	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
III Decade	53.7	52.5	52.4	52.8	23.1	26.7	22.3	17.2	27.2	22.4	11.7	10.0	10.4	10.7	56	39	52	49
Mese . . .	53.4	52.4	52.8	52.9	22.4	25.2	21.2	16.8	26.1	21.6	11.5	10.3	11.3	11.0	58	45	61	55

Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle Nubi			Stato del Cielo			Evapor. in 24 ore	METEORE
9^h		15^h		21^h		9^h	15^h	21^h	9^h	15^h	21^h	9^h - 9^h	
SW	3.5	E	15.0	W	2.5	...	WNW	S	0	2 Ci	8 Ci,Cu	3.42	
W	10.0	W	5.5	SW	14.5	...	SW	SSW	0	4 Cu, Ci, S	10 Cu	4.24	T ≷ SSW-W 19^h45^m-20^h15^m, p. 20^h30^m.
W	7.5	SE	4.0	SW	2.5	...	WNW	...	0	7 Ci,Cu	0	4.09	
W	5.5	NE	17.5	E	12.5	SE	SW	NE	3 Ci, S	3 Ci,Cu	8 Cu, N	3.81	⋖ NE-NW 20^h30^m-24^h, ◉° 22^h30^m; ⌁ E 16^h-18^h.
NE	21.5	E	8.5	NE	4.0	SE	E	SSE	10 Ci, Cu, N	10 Cu, Ci	10 N, Cu	4.81	K ◉² ▲ 9^h-11^h; 3 K ◉ 13^h-22^h, ◉ 6^h20^m, 22^h-23^h; ⌒ 18^h; ⌁ e ⌁ NE e SE.
N	13.5	E	5.0	NW	5.5	E	E	...	9 Cu, N	7 Cu	1 Ci, S	0.99	◉ 1^h-6^h; 2 K ◉° 8^h40^m-10^h; ⌁ E e NE 12^h-13^h.
W	2.3	NW	4.5	W	8.5	WNW	SW	...	5 Ci, S	5 Cu,Ci	0	2.45	
W	3.5	NW	7.0	N	3.5	NW	...	...	6 Cu,Ci	1 Cu,Ci	1 Ci,S	3.59	⋖ N 20^h45^m-24^h.
W	8.5	E	7.5	E	14.5	NW	SE	N	5 Ci, S	6 Cu,Ci	9 Ci,S	2.61	K ◉° SSW-S 17^h30^m-18^h40^m; ⌒ 18^h30^m; ⋖ NW 21^h45^m-24^h.
NE	9.0	E	15.5	W	18.0	W	W	SW	3 Ci,Cu	8 Cu,Ci	10 Cu, N	2.96	◉° n.; K ◉° a ripr. W-E 15^h-24^h; ⌁ NW 21^h-22^h.
..	8.5	..	9.0	..	8.6	...	...	...	4.1	5.3	5.7	32.97	
N	7.5	SW	9.5	SE	5.0	SW	WSW	...	7 Cu,Ci	9 Cu, N	1 Ci,S	2.81	T ≷ S 10^h45^m-11^h, p. 11^h5^m-11^h15^m; K ◉ SW-E 14^h-18^h.
SW	2.5	E	9.5	E	16.5	W	W	ENE	3 Ci,Cu	10 S, Ci, Cu	10 Ci	2.69	⋖ N 20^h-24^h.
NW	24.0	N	11.0	NE	5.5	W	E	...	10 Cu,Ci	10 Ci,Cu	10 Ci, S	3.13	◉ a ripr. 2^h-23^h; K ◉² ▲ ENE-WSW 13^h30^m-15^h; ⌁ W e NW 7^h-10^h.
E	4.0	SW	5.5	W	9.5	SE	NE	N	10 Ci,Cu	4 Ci,Cu	8 S, Ci	1.43	◉ a ripr. 1^h-14^h; ⏖ e ⌣ 20^h40^m-23^h.
W	11.0	W	12.5	SW	6.5	NW	NW	E	9 Cu, Ci	10 Ci,Cu	2 S, Ci	1.21	◉° 13^h22^m-13^h40^m; ⏖ 21^h30^m.
W	2.5	E	7.0	E	11.0	...	S	...	1 S, Ci	2 Cu	1 Ci	2,02	
SW	5.0	N	4.5	W	9.5	NW	WNW	...	6 Ci, S	5 Cu,Ci	1 S, Ci	2.93	⋖ NE 20^h30^m-24^h.
NE	5.0	NE	9.5	W	18.5	NW	NW	NE	8 Cu,Ci	7 Cu	10 N	3.04	◉° 5^h30^m; 2 T 17^h40^m; 2 K ◉ 17^h40^m-24^h; ⌁ e ⌁ N, SE, SW 19^h-21^h, W 22^h.
W	9.5	E	5.0	E	8.0	...	NE	...	1 Ci,Cu	7 Cu	1 Ci,S	2.81	◉° 0^h e 3^h; ⋖ S notte.
W	9.0	W	4.5	E	17.0	...	...	E	0	2 Cu,Ci	5 Cu,Ci	3.03	⋖ E 20^h30^m-22^h; ⌁ NE 21^h, ⌁ E 22^h-24^h.
..	8.0	..	7.9	..	10.7	...	...	...	5.5	6.6	4.9	25.10	
E	28.0	E	16.0	E	17.0	NW	SW	...	5 Cu, Ci	8 Cu,Ci	2 Ci	4.30	⌁ E 0^h-1^h, 7^h-11^h, E e NE 2^h-5^h.
E	3.5	E	8.5	E	7.0	...	SW	S	0	8 Cu,Ci	10 Ci, S	3.19	
E	3.5	SW	17.5	SW	6.0	W	WNW	W	10 Cu, Ci, S	7 Cu,Ci	4 Ci, S	3.51	⌁ SW 15^h40^m-18^h35^m.
NE	8.0	W	9.5	S	6.0	NW	NW	...	8 Cu,Ci	9 Cu,Ci	1 Ci, S	3.83	
NE	5.5	E	6.5	W	5.0	...	NE	...	1 Ci, S	8 Cu, Ci, S	2 Ci, S	2.55	T ≷ N-NE 16^h8^m-18^h.
S	8.0	SW	22.0	W	10.0	WNW	W	W	7 Ci,Cu	8 Ci, S	5 Cu, Ci	3.78	⌁ SW 10^h-12^h, 15^h-18^h, ⌁ 18^h-20^h
W	14.0	NW	10.5	E	4.0	...	W	...	0	5 Cu,Ci	1 Ci, S	5.97	o. limpido I e II; ⌁ W e NW 0^h-2^h.
NE	6.5	E	5.0	E	3.5	SE	WNW	...	2 Cu,Ci	4 Cu,Ci	0	4.60	
W	5.0	W	7.0	N	7.5	...	...	...	0	1 Ci,Cu	0	3.74	
E	9.5	SW	21.5	W	7.5	NW	W	W	4 Ci, S	5 Cu,Ci	8 Cu,Ci	4.51	⌁ SW 15^h-17^h, ⌁ 17^h-18^h, ⌁ 18^h-19^h.
..	..	..	..	..	..	...	...	...	....	....	....	....	
..	9.2	..	12.4	..	7.4	...	...	...	3.7	6.3	3.3	39.38	
..	8.6	..	9.8	..	8.9	...	...	...	4.4	6.1	4.6	97.45	

LUGLIO 1910

GIORNO	Pressione Barometrica a 0° mm. 700 +				Temperatura centigrada						Tensione del vapore millimetri				Umidità relativa			
	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	minima	mass.	Media	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media
1	51.6	50.5	52.4	51.5	25.6	26.4	20.4	17.6	27.5	22.8	10.1	8.1	13.0	10.4	41	31	73	48
2	53.0	51.8	51.8	52.2	22.6	26.0	22.0	15.3	26.6	21.6	11.6	8.9	10.2	10.2	57	36	52	48
3	50.4	48.5	50.2	49.7	23.6	25.8	19.8	17.0	26.5	21.7	10.4	8.5	7.9	8.9	48	34	46	43
4	50.1	50.1	51.1	50.4	20.0	15.0	15.4	14.1	20.6	17.5	9.1	10.2	8.2	9.2	52	80	63	65
5	53.1	53.0	53.2	53.1	18.4	23.4	19.8	**12.9**	24.1	18.8	9.8	6.5	8.4	8.2	62	30	49	47
6	**54.3**	51.3	49.1	51.6	21.4	24.2	20.8	15.4	25.5	20.8	7.4	6.8	6.7	7.0	39	30	37	35
7	46.7	**46.1**	48.0	46.9	22.2	24.0	18.8	15.9	25.0	20.5	9.8	9.6	9.0	9.5	49	43	56	49
8	50.6	50.4	51.3	50.8	21.2	23.0	18.4	13.7	24.6	19.5	9.5	7.0	8.7	8.4	51	33	55	46
9	52.1	51.4	52.8	52.1	22.6	26.6	22.4	14.9	26.7	21.7	9.5	8.0	8.2	8.6	47	31	41	40
10	54.0	52.3	52.2	53.0	24.2	26.8	23.0	16.3	26.8	22.6	7.4	8.5	6.2	7.4	33	32	29	31
I Decade	51.6	50.5	51.2	51.1	22.2	24.1	20.1	15.3	25.4	20.8	9.5	8.2	8.7	8.8	48	38	50	45
11	52.6	52.0	53.9	52.8	21.8	25.8	21.8	**16.4**	26.4	21.6	10.3	9.4	11.5	10.4	53	38	59	50
12	56.3	56.0	57.2	56.5	23.4	25.8	23.4	17.1	26.6	22.6	13.3	10.3	13.3	12.3	62	42	62	55
13	**57.5**	56.3	56.6	56.8	24.0	27.0	21.6	18.0	27.3	22.7	12.6	12.4	14.4	13.1	57	47	75	60
14	55.9	54.1	53.0	54.3	25.2	27.6	24.6	17.8	28.7	24.1	14.9	11.1	11.6	12.5	62	40	51	51
15	51.3	**49.3**	49.4	50.0	26.8	28.8	21.8	19.9	29.3	24.5	13.2	12.0	14.3	13.2	50	41	74	55
16	51.1	51.4	52.7	51.7	20.0	26.0	23.6	18.7	26.8	22.3	13.5	12.1	10.1	11.9	78	48	47	58
17	54.5	53.4	53.1	53.7	23.6	29.8	23.6	19.0	30.0	24.1	16.0	13.8	16.2	15.3	74	44	75	64
18	54.3	53.4	53.6	53.8	22.6	28.8	26.2	19.3	30.0	24.5	16.8	13.0	12.6	14.1	82	44	50	59
19	53.8	52.3	52.5	52.9	26.4	31.0	25.6	21.0	**31.6**	26.2	13.5	9.7	9.2	10.8	53	29	38	40
20	53.6	52.5	54.1	53.4	26.2	27.6	25.0	20.6	29.1	25.2	13.6	13.1	12.0	12.9	54	48	51	51
II Decade	54.1	53.1	53.6	53.6	24.0	27.8	23.7	18.8	28.6	23.8	13.8	11.7	12.5	12.7	63	42	58	54
21	56.9	56.2	56.7	56.6	25.6	29.6	26.8	19.1	30.5	25.5	13.3	11.2	14.6	13.0	55	36	54	49
22	**58.1**	56.9	55.9	57.0	27.2	30.6	26.6	20.9	31.1	26.5	12.6	11.2	14.7	12.8	47	34	57	46
23	52.5	**49.0**	**49.0**	50.2	27.0	30.6	22.2	20.4	**31.3**	25.2	14.5	12.6	9.5	12.2	55	39	48	47
24	52.4	53.5	54.2	53.4	22.6	26.6	21.6	16.8	27.2	22.1	8.4	6.2	9.0	7.9	41	24	47	37
25	54.8	52.9	53.1	53.6	24.3	27.4	23.0	15.4	27.6	22.5	12.3	8.7	12.0	11.0	56	32	57	48
26	52.8	50.6	51.0	51.5	23.2	28.4	22.6	17.3	28.6	22.9	9.2	8.4	8.7	8.8	43	29	42	38
27	57.0	56.8	57.8	57.2	15.8	22.4	20.6	**14.8**	22.7	18.5	10.3	8.5	9.3	9.4	77	42	51	57
28	57.6	55.9	55.9	56.5	23.2	25.0	21.2	**14.8**	25.6	21.2	9.7	8.3	10.7	9.6	46	36	57	46
29	56.0	54.7	54.8	55.2	23.8	27.4	22.8	16.9	28.0	22.9	11.5	9.6	13.4	11.5	53	35	65	51
30	55.4	54.1	54.2	54.6	25.4	28.6	25.0	19.1	29.0	24.7	9.6	9.2	10.8	9.9	40	32	46	39
31	55.0	53.1	52.5	53.5	24.6	29.6	25.0	19.4	30.1	24.8	11.5	12.7	15.7	13.3	50	41	67	53
III Decade	55.3	54.0	54.1	54.5	23.9	27.8	23.4	17.7	28.3	23.3	11.2	9.7	11.7	10.9	51	35	54	47
Mese . . .	53.7	52.6	53.0	53.1	23.4	26.6	22.4	17.3	27.5	22.6	11.5	9.9	11.0	10.8	54	38	54	49

Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle Nubi			Stato del Cielo			Evapor. in 24 ore	METEORE
9h		15h		21h		9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h-9h	
IE	8.0	E	8.0	N	11.0	...	W	...	0	5 Cu,Ci	1 Ci,S	5.14	
IE	4.5	N	7.0	W	10.5	...	W	SW	0	7 Cu	4 Ci,S	3.93	
IE	7.5	SW	13.5	W	9.5	W	W	W	2 S,Cu,Ci	8 Cu	3 Ci	3.79	o. chiaro III; ⟶ SW 13^h e 16^h, ⟶ 17^h-19^h.
W	8.0	SW	34.0	W	14.0	WNW	...	SW	7 Cu,Ci	10 Ci,S	9 Ci,Cu	4.42	⛈ ● SE-WNW 12^h-15^h45^m, ●° 22^h45^m-24^h; ⟶ NE, E, S, SW 11^h-15^h, ⟶ 15^h-16^h.
W	9.5	W	13.5	W	14.0	NE	SW	...	7 Ci,S	2 S,Ci,Cu	0	1.94	●° 0^h-2^h; o. chiaro II; ⟶ W 1^h-2^h.
W	5.5	NW	6.5	W	5.0	...	NW	...	10 Ci,S	8 S,Ci,Cu	10 S,Ci	3.76	⟶ W 0^h, 2^h, 16^h-18^h.
W	5.5	W	11.5	SE	13.0	WNW	...	...	3 S,Ci,Cu	5 Ci,Cu	9 S,Ci	4.11	●° a ripr. 2^h-21^h40^m; 2 T; ⛈ ● ▲ a ripr. NW-SE 16^h30^m-18^h15^m; ⌒ 18^h20^m; ⟶ E 16^h.
E	7.0	SE	19.5	SW	9.0	WNW	NW	...	4 S,Ci,Cu	7 Cu,Ci	1 S,Ci	3.38	≡² c. m.; ⟶ S e W 15^h-17^h.
N	5.0	W	6.0	W	9.5	...	...	...	0	1 Cu,Ci	0	3.39	
W	4.5	NW	6.0	SW	15.5	...	...	SW	0	1 Cu,Ci	6 Cu,Ci	4.47	
.	6.5	..	12.6	..	11.1	...	...	...	3.3	5.4	4.3	38.33	
W	3.0	S	7.5	NW	7.0	NW	W	S	7 Ci,S	4 Ci,Cu	9 Cu,N	4.40	T ⚡ SSW 20^h55^m; ⚡ NNW 21^h25^m-24^h; ●° 21^h50^m-22^h5^m.
W	6.5	NW	7.5	NE	5.5	W	SW	W	6 Ci,Cu	4 Ci,Cu	10 Cu,Ci	3.36	●° 1^h30^m-1^h50^m.
W	6.0	N	11.0	SE	8.5	...	NW	...	0	3 Ci,Cu	1 S	3.30	
W	6.0	N	6.5	E	7.0	...	NW	...	0	5 Cu	1 Ci,S	3.40	≡² c. m.
W	4.0	E	9.0	E	9.0	NW	E	SW	1 Ci	7 Cu,Ci	1 Ci,S	3.26	⟶ E e SE 16^h-18^h.
E	10.0	S	5.5	E	9.0	...	NW	...	10 Ci,S	2 Ci,Cu	1 Ci,S	3.72	p. 8^h10^m-8^h25^m.
W	4.5	E	13.5	NE	13.5	...	SE	...	0	3 Cu,Ci	1 Cu,Ci	2.60	≡² c. m.; ⚡ N 21^h20^m-23^h; ⟶ E 16^h-18^h.
W	7.0	N	6.5	NW	7.5	SW	NW	...	10 Ci,S	2 Cu,Ci	0	3.29	≡² int. m., ≡° c. I.
W	7.0	SW	18.0	W	12.5	...	W	...	0	4 Cu,Ci	1 Ci,S	3.55	⚡ NE 21^h15^m-23^h; ⟶ W e SW 15^h-18^h.
W	7.5	NW	10.5	W	8.0	...	W	W	0	8 Cu,Ci	3 Ci,S	5.43	T ⚡ NE-E 14^h55^m.
.	6.2	..	9.5	..	8.8	...	...	...	3.4	4.2	2.8	34.31	
W	4.0	N	6.5	NE	7.5	WNW	...	...	2 S,Ci	2 S,Ci	0	4.17	
W	5.5	E	8.0	NE	10.0	...	...	WSW	0	0	4 Ci,S	4.31	
W	5.0	N	9.5	W	40.5	W	WNW	SW	3 Ci,Cu	8 Ci,Cu	4 Cu,N	4.74	⛈ ● SW-NE 20^h-24^h; ⟶ S, SW 18^h-20^h. ⟶ W 20^h-23^h, ⟶ 23^h-24^h.
W	16.5	W	8.0	E	8.5	NE	...	...	2 Ci,S	0	0	5.80	o. chiaro m.-II; ⟶ e ⟶ W a ripr. 0^h-9^h.
N	6.0	NE	7.0	E	5.5	...	NW	NE	0	6 Cu,Ci	5 Ci,Cu	4.73	
W	8.0	W	6.5	W	8.0	WNW	W	...	4 S,Ci,Cu	4 S,Ci,Cu	2 Ci	4.04	⚡ ENE 20^h30^m-24^h.
W	11.0	N	7.0	E	6.0	E	NW	...	10 Ci,Cu	5 Cu	0	5.11	●° 1^h-2^h, 7^h-11^h20^m a ripr.; ⟶ W e NW 0^h-2^h.
V	4.5	E	10.0	E	10.5	W	WNW	...	2 Ci,S	7 S,Ci,Cu	1 Ci,S	2.33	
W	4.5	E	7.0	E	9.0	...	...	...	0	1 Ci,S	1 Ci	4.05	
V	8.0	E	7.0	E	9.0	WNW	...	...	5 S,Ci	0	0	4.00	
V	4.5	NE	7.5	E	11.0	...	...	...	0	0	0	4.88	
.	7.0	..	7.6	..	11.4	...	...	...	2.5	3.0	1.5	48.16	
.	6.6	..	9.8	..	10.5	...	...	...	3.1	4.2	2.8	120.80	

AGOSTO 1910

GIORNO	Pressione Barometrica a 0° mm. 700 +				Temperatura centigrada						Tensione del vapore millimetri				Umidità relativa			
	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	minima	mass.	Media	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Media
1	52.8	51.6	52.5	52.3	27.0	29.0	25.6	20.7	29.6	25.7	13.4	12.2	12.6	12.7	51	41	52	48
2	53.9	52.8	52.2	53.0	25.8	30.2	26.6	20.2	30.3	25.7	13.2	10.8	12.7	12.2	53	34	49	45
3	52.1	50.6	49.5	50.7	27.0	25.2	20.8	20.3	28.1	24.1	13.1	14.9	16.9	15.0	49	62	93	68
4	49.0	48.6	49.6	49.1	22.0	26.2	22.6	18.2	26.9	22.4	12.9	12.3	9.5	11.6	66	45	47	53
5	49.2	49.5	52.0	50.2	24.6	23.0	19.2	17.4	28.0	22.3	9.8	9.3	7.4	8.8	43	44	45	44
6	53.7	53.6	53.9	53.7	21.0	25.4	21.2	14.8	26.1	20.8	9.9	7.8	8.4	8.7	54	32	45	44
7	54.0	54.0	54.8	54.3	21.0	21.0	18.6	15.3	24.6	19.9	10.8	8.8	8.8	9.5	58	47	55	53
8	53.9	53.0	53.2	53.4	22.2	26.4	22.8	13.3	26.9	21.3	9.8	5.8	10.6	8.7	49	22	51	41
9	51.8	50.2	54.4	52.1	21.2	21.4	19.2	17.4	23.9	20.4	13.4	12.1	14.9	13.5	72	64	90	75
10	49.5	48.7	50.0	49.4	20.9	20.4	20.6	17.5	24.6	20.9	13.0	12.1	12.5	12.5	71	68	69	69
I Decade	52.0	51.3	52.2	51.8	23.3	24.8	21.7	17.5	26.9	22.4	11.9	10.6	11.4	11.3	57	46	60	54
11	52.8	53.7	56.1	54.2	21.8	23.6	20.0	17.1	24.1	20.8	12.4	8.3	10.8	10.5	64	38	62	55
12	59.4	59.2	60.8	59.8	21.0	23.8	20.6	16.9	25.1	20.9	11.1	10.0	11.3	10.8	60	46	63	56
13	59.9	58.0	57.0	58.3	24.8	27.4	23.6	16.8	28.1	23.3	9.3	8.1	10.1	9.2	40	30	47	39
14	55.0	53.4	52.8	53.7	23.2	29.6	25.2	17.6	30.1	24.0	10.6	11.5	12.2	11.4	50	37	51	46
15	56.8	56.4	57.3	56.8	22.7	27.4	23.2	18.9	28.1	23.2	17.1	12.8	14.1	14.7	83	47	67	66
16	58.6	57.2	59.4	58.4	24.2	29.4	21.6	19.1	29.4	23.6	15.8	12.6	16.1	14.8	71	41	84	65
17	60.2	58.6	58.7	59.2	22.2	27.0	24.2	19.1	27.3	23.2	16.4	14.1	13.1	14.5	82	53	59	65
18	59.0	57.4	57.4	57.9	25.4	28.8	26.0	20.7	29.3	25.4	15.4	13.7	16.5	15.2	64	47	66	59
19	58.7	57.0	57.4	57.7	26.6	30.2	27.2	21.2	30.6	26.4	15.4	14.2	16.5	15.4	60	45	61	55
20	59.1	58.3	59.1	58.8	25.4	30.0	26.4	21.3	30.1	25.8	13.7	14.4	15.5	14.5	57	46	61	55
II Decade	58.0	56.9	57.6	57.5	23.7	27.7	23.8	18.9	28.2	23.7	13.7	12.0	13.6	13.1	63	43	62	56
21	60.0	57.9	56.7	58.2	25.8	31.4	24.4	21.7	31.6	25.9	16.6	13.9	13.4	14.6	67	41	59	56
22	54.6	52.6	52.5	53.2	25.8	31.4	24.4	20.9	31.6	25.7	15.9	12.1	7.0	11.7	64	35	31	43
23	51.9	51.2	53.7	52.3	23.2	23.4	20.0	19.1	26.1	22.1	11.0	12.1	11.4	11.5	52	56	65	58
24	56.0	55.7	56.8	56.2	22.6	24.2	20.0	16.9	24.6	21.0	8.3	8.2	8.0	8.2	41	37	46	41
25	58.7	57.7	58.3	58.2	21.4	26.2	21.8	16.9	26.6	21.7	10.2	7.0	9.4	8.9	54	28	49	44
26	58.7	56.6	56.5	57.3	23.4	27.6	23.4	18.9	28.0	23.4	11.4	10.7	11.4	11.2	53	39	53	48
27	54.9	53.6	54.0	54.2	24.2	27.0	24.0	19.5	27.4	23.8	12.5	12.4	12.6	12.5	56	47	57	53
28	55.7	54.3	55.3	55.1	19.6	26.0	21.6	19.2	26.4	21.7	13.8	15.1	16.1	15.0	81	60	84	75
29	56.1	56.0	55.9	56.0	23.6	27.0	22.2	19.9	27.5	23.3	16.9	13.1	15.4	15.1	78	49	77	68
30	56.4	55.4	55.2	55.7	24.0	28.2	24.6	20.9	28.6	24.5	14.6	12.4	13.2	13.4	66	43	58	56
31	55.5	55.6	56.2	55.8	21.8	23.2	21.0	19.4	25.1	21.8	14.3	6.6	6.8	9.2	74	31	37	47
III Decade	56.2	55.1	55.6	55.6	23.2	26.9	22.5	19.4	27.6	23.2	13.2	11.2	11.3	11.9	62	42	56	54
Mese . . .	55.4	54.5	55.1	55.0	23.4	26.5	22.7	18.6	27.6	23.1	13.0	11.3	12.1	12.1	61	44	59	55

Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle Nubi			Stato del Cielo			Evapor. in 24 ore	METEORE
9^h		15^h		21^h		9^h	15^h	21^h	9^h	15^h	21^h	9^h - 9^h	
W	9.0	N	5.5	W	9.5	WNW	...	...	7 S, Ci	8 Ci, Cu	0	3.84	
W	10.5	E	5.5	S	6.5	...	...	...	0	1 Cu	1 Ci	4.48	⚡ NW 21^h-24^h.
W	5.0	N	11.0	N	6.0	W	SW	SW	5 Cu, Ci	8 Ci, S	5 Ci	4.69	● a ripr. 11^h-13^{h}58^m; ☈ ●^{2} ▲ WSW-NE 19^h-22^{h}30^m.
W	8.0	NW	6.0	W	8.5	NW	SW	...	7 Cu	4 Ci, Cu	1 Ci	2.62	≡^{2} int. n., ≡ c. m.; ⚡ NW 21^h-23^h.
W	5.0	NW	27.0	SW	16.5	S	NW	...	7 Ci, S	8 Cu, Ci	1 Ci	2.93	⟶ W e SW 14^h-17^h, N 18^h-19^h.
W	5.0	SW	13.5	SW	9.0	WNW	WNW	...	1 Ci	7 Ci, Cu	1 Ci	4.21	●° 3^{h}15^m-3^{h}30^m; ⚡ NE 20^{h}20^m-23^h; ⟶ W e SW 16^h-17^h.
W	4.5	NE	26.5	SE	6.0	NW	SE	...	8 Cu, Ci	8 Cu, Ci	0	3.57	●° 15^{h}55^m; ⟶ W e NW 13^h, ⟶ NE 14^h-15^h.
W	3.5	NE	6.5	E	8.5	...	...	...	0	0	0	3.03	
S	4.5	S	8.0	E	7.0	...	...	S	10	10	4 Ci, S	4.12	●° 14^{h}47^m-16^{h}55^m.
W	6.5	W	9.5	SW	8.0	WNW	W	S	9 Cu, Ci	9 Cu, Ci	9 Ci	1.61	☈ ● WSW < $\frac{NNW}{ENE}$ 12^{h}30^m-14^{h}45^m; ⚡ E e NNE 20^{h}30^m-24^h.
.	6.2	..	11.9	..	8.6	...	...	...	5.4	5.8	2.2	35.10	
W	4.5	NE	15.5	NE	7.5	NE	NE	...	5 S, Ci, Cu	9 Cu, Ci	10 Cu	1.03	● 2^{h}45^m-4^{h}15^m.
W	14.5	NE	9.0	SW	12.0	NE	NNE	...	4 Ci S,	9 Cu, Ci	1 S	3.03	2 T ⚡ p. SW e W 15^{h}15^m-15^{h}50^m.
W	3.5	NW	7.5	NW	4.5	NW	...	...	4 S, Ci	8 Ci, S	0	3.02	
W	5.5	NW	7.0	NW	7.0	...	...	...	0	0	0	4.16	
N	5.0	NE	13.0	E	12.0	E	SE	E	9 Cu, Ci	8 Cu	7 Cu, Ci	4.01	≡^{2} int. n. m.; ≡^{2} c. I.
E	3.5	E	6.0	NE	15.5	W	W	...	4 Ci, S	7 Ci, S	9 Cu, N	2.91	≡^{2} c. m.; ☈ ● N < $\frac{E}{NE}$ 19^{h}15^m-21^{h}45^m; ⚡ E e NE 21^h-24^h.
SE	3.5	NE	9.0	NE	6.5	E	...	...	9 Ci, S	0	0	2.97	p. 6^{h}20^m-6^{h}45^m.
NE	4.0	N	8.5	N	4.0	...	...	...	0	1 Cu	0	2.24	
W	4.0	N	8.0	N	4.5	...	...	...	0	0	0	3.17	
W	4.0	E	7.0	E	8.5	...	...	...	0	0	0	3.94	
.	5.2	..	9.1	..	8.2	...	...	...	3.5	3.7	2.7	30.48	
W	6.5	E	11.0	E	11.0	...	...	...	0	0	0	3.29	
W	4.5	W	13.5	W	12.0	...	WNW	...	0	3 S, Ci, Cu	0	4.40	⟶ W 15^h-16^h.
W	4.0	NW	19.0	E	4.5	...	SW	W	10	8 Cu, Ci	4 Ci, S	5.49	☈ ● N-S 11^{h}30^m-13^{h}45^m; ⟶ NW 15^h-16^h.
SE	5.5	E	7.0	SE	12.0	...	E	...	0	4 Cu	0	2.86	o. chiaro I.
E	5.0	NE	7.5	E	9.0	...	...	...	0	0	0	3.93	
N	3.5	NE	9.0	E	4.5	...	...	...	0	0	0	3.83	
W	4.0	NE	7.5	NE	9.5	NW	...	...	7 Ci, Cu	0 ∞	0	3.43	
NE	5.5	NE	19.0	NE	12.0	E	SE	...	10	8 Cu, Ci	10	3.56	p. 8^{h}13^m; 2 ☈ ●° a ripr. S-E, W-WSW 17^{h}30^m-21^{h}15^m; ⟶ E e NE 15^h-18^h.
E	2.0	N	5.0	E	13.5	SE	NW	...	9 Cu, Ci	5 S, Ci, Cu	0	2.09	
W	9.0	NE	6.5	NW	6.5	NW	W	...	8 Cu	7 Cu, Ci	2 Ci	2.15	⚡ N-NE 20^h-24^h.
W	13.0	N	24.5	NW	5.5	...	WNW	SE	2 Ci, Cu	5 Ci, Cu	7 Ci	3.11	p. 6^{h}57^m; ☈ ●° S-E 7^{h}15^m-8^{h}45^m; ⟶ W e NW 10^h-13^h, ⟶ NW 13^h-14^h, ⟶ N e NE 14^h-17^h.
..	5.7	..	11.8	..	9.1	...	...	...	4.2	3.6	2.1	38.14	
..	5.7	..	10.9	..	8.6	...	...	...	4.4	4.4	2.3	103.72	

SETTEMBRE 1910

GIORNO	Pressione Barometrica a 0° mm. 700 +				Temperatura centigrada						Tensione del vapore millimetri				Umidità relativa			
	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	minima	mass.	Media	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Medi
1	55.0	53.6	53.5	54.0	19.8	25.4	21.2	16.4	26.5	21.0	6.5	7.0	7.5	7.0	38	29	40	36
2	53.4	52.4	53.4	53.1	20.2	24.1	18.6	15.2	24.9	19.7	7.1	4.5	6.2	5.9	40	20	39	33
3	54.8	54.7	55.1	54.9	19.0	23.0	17.8	15.4	23.6	19.0	8.3	6.2	6.9	7.1	51	29	46	42
4	53.4	50.9	51.1	51.8	21.4	25.2	18.2	14.4	25.5	19.9	7.4	8.0	10.2	8.5	39	33	66	46
5	53.3	52.6	53.4	53.1	14.2	20.0	16.2	13.4	20.0	16.0	11.5	9.1	9.5	10.0	95	52	69	72
6	53.9	54.3	55.0	54.4	16.4	18.6	16.4	12.4	20.1	16.3	9.4	11.7	12.7	11.3	67	73	92	77
7	56.6	55.9	55.8	56.1	18.0	22.0	17.2	13.9	22.1	17.8	11.2	8.4	8.6	9.4	73	43	59	58
8	56.0	54.5	55.2	55.2	18.2	23.4	18.8	11.9	23.6	18.1	9.9	5.4	9.8	8.4	64	25	61	50
9	55.1	53.8	54.0	54.3	17.0	21.8	18.6	13.4	22.0	17.8	10.9	8.0	9.9	9.6	76	41	62	60
10	53.7	52.6	53.2	53.2	15.0	17.6	16.6	14.1	18.0	15.9	11.9	11.7	12.0	11.9	93	78	85	85
I Decade	54.5	53.5	54.0	54.0	17.9	22.1	18.0	14.1	22.6	18.2	9.4	8.0	9.3	8.9	64	42	62	56
11	51.5	51.2	51.6	51.4	15.4	15.6	15.0	12.9	16.2	14.9	12.5	12.6	12.1	12.4	96	96	96	96
12	52.4	52.0	52.8	52.4	17.4	21.4	18.2	14.6	21.4	17.9	12.1	12.4	13.1	12.5	82	65	84	77
13	52.3	51.3	52.3	52.0	19.4	19.0	16.8	16.0	21.1	18.3	11.2	11.7	12.8	11.9	67	72	90	76
14	52.2	52.1	53.5	52.6	16.4	19.8	16.6	15.3	20.4	17.2	12.7	11.2	12.6	12.2	92	65	90	82
15	55.4	55.7	57.5	56.2	17.4	19.4	18.2	15.6	21.0	18.1	12.4	10.9	11.3	11.5	84	65	73	74
16	59.4	58.7	60.3	59.5	18.0	21.4	17.6	16.4	22.0	18.5	12.3	10.8	12.0	11.7	80	57	80	72
17	61.5	60.8	62.0	61.4	19.2	22.0	18.8	14.9	22.2	18.8	11.0	8.7	11.2	10.3	67	44	70	60
18	63.9	62.9	63.2	63.3	19.0	22.6	17.2	14.4	22.8	18.4	11.4	8.9	9.7	10.0	70	44	66	60
19	61.9	59.6	59.2	60.2	18.4	21.8	17.4	13.0	22.1	17.7	9.2	8.8	11.0	9.7	59	45	74	59
20	57.0	54.9	52.6	54.8	17.8	19.8	17.2	13.6	20.6	17.3	12.4	11.2	14.0	12.5	82	65	96	80
II Decade	56.8	55.9	56.5	56.4	17.8	20.2	17.3	14.7	21.0	17.7	11.7	10.7	12.0	11.5	78	62	82	74
21	51.3	50.0	54.0	51.8	17.2	17.0	13.8	12.9	18.5	15.6	11.9	12.3	9.9	11.4	82	86	84	84
22	55.5	55.7	55.4	55.5	12.0	12.2	10.2	9.6	14.0	11.5	7.5	6.6	7.9	7.3	72	63	84	73
23	55.4	54.6	57.0	55.7	10.8	13.6	13.2	9.3	14.1	11.9	8.0	9.5	9.5	9.0	82	82	84	83
24	59.2	57.9	58.3	58.5	15.0	17.6	14.8	12.4	17.6	15.0	10.2	8.9	7.7	8.9	80	59	62	67
25	59.7	59.5	60.2	59.8	16.2	19.4	15.8	11.4	19.4	15.7	8.7	8.1	9.2	8.7	64	48	69	60
26	64.0	63.5	64.4	64.0	16.2	19.6	16.6	12.2	20.0	16.3	8.1	9.0	11.1	9.4	60	53	79	64
27	64.7	62.4	62.4	63.2	15.6	20.6	16.6	12.4	20.6	16.3	10.9	9.0	10.1	10.0	83	50	72	68
28	62.6	60.6	60.8	61.3	16.0	22.0	18.2	12.9	22.3	17.9	10.0	8.7	10.2	9.6	65	44	66	58
29	61.3	59.8	60.3	60.5	18.8	21.8	18.6	13.8	22.0	18.3	10.4	10.6	11.7	10.9	64	55	73	64
30	60.8	59.5	60.5	60.3	19.0	22.2	19.6	14.3	22.6	18.9	10.8	9.4	10.2	10.1	66	48	60	58
31	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
III Decade	59.5	58.4	59.3	59.1	15.9	18.6	15.7	12.1	19.1	15.7	9.7	9.2	9.8	9.5	72	59	73	68
Mese . . .	56.9	55.9	56.6	56.5	17.2	20.3	17.0	13.6	20.9	17.2	10.3	9.3	10.4	10.0	71	54	72	66

Direzione e velocità del vento in chilometri 9h	15h	21h	Direzione delle Nubi 9h	15h	21h	Stato del Cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h - 9h	METEORE
W 20.0	N 8.5	N 6.0	NE	SE	...	7 Cu,Ci	8 Cu,Ci	0	4.64	↝ W 8h-9h.
W 15.9	NW 6.0	SE 20.0	SE	S	NE	4 S, Ci	2 Cu,Ci,S	5 Ci	4.39	↝ W 6h-7h, E e NE 18h-21h.
W 8.0	E 9.5	SE 14.0	NW	E	...	5 Ci, S	7 Ci,Cu	0	4.89	
W 1.5	NE 8.5	NE 12.0	...	NW	...	0	9 Cu,Ci	0	4.12	⟨ ENE-NE 8h30m-24h.
E 9.5	E 5.0	NE 10.5	E	WSW	...	10 Cu, N	3 Cu,Ci,S	0	3.10	●° 7h25m-7h55m, 8h45m-9h7m; ↝ E e NE [7h-8h.
E 6.0	NE 8.0	E 4.0	NW	...	...	8 Cu,Ci,S	10 Cu	10	1.63	К ● NW-SE 14h-16h30m (1 fulmine)
W 4.5	E 6.5	E 12.0	WNW	...	...	1 Cu	1 Cu,Ci,S	0	1.15	≡² c. m.
S 4.0	E 12.5	E 14.0	...	NW	E	0	3 Ci, S	9	2.35	
E 7.5	E 17.0	E 8.0	E	ESE	...	10	10	10	3.71	●° 23h15m-24h.
W 7.5	N 6.0	W 5.0	...	NE	...	10	10 S	10	2.67	≡² c. m. I; ●° 0h-12h, 22h50m-24h; ↝ [NE 11h-12h.
.. 8.4	.. 8.7	.. 10.5	...	...	...	5.5	6.3	4.4	32.65	
W 8.5	W 13.0	W 17.0	...	...	N	10	10	10 S	0.74	≡ c. n. - I; ●° a ripr. 0h-24h.
W 17.5	W 11.5	W 14.5	N	E	...	10 Cu	8 Ci, S, Cu	10	0.55	● 1h-7h; ↝ W 3h-4h, 5h-6h.
W 14.0	W 24.5	W 12.0	SE	SE	...	8 Ci, S	10 Cu	10	1.30	● a ripr. 15h45m-23h; ↝ W 13h-16h.
W 3.5	W 7.5	NE 1.5	NW	W	...	10	10 Cu, N	10	1.48	● 0h-11h, 15h25m-17h30m.
NE 1.0	E 14.0	E 3.5	NE	...	...	10 Cu	9 Cu, Ci, S	10 Cu	0.56	●° 5h15m-8h, 14h52m-15h17m.
N 4.0	NE 3.0	W 5.0	ESE	W	WNW	10 Cu	10 Cu, S	9 Cu,Ci	1,10	T ⩘ W-NW 14h45m-15h20m, S-N 16h- [20h30m.
W 3.5	NE 6.0	NE 3.0	...	SSE	...	0	5 Cu	0	1.27	
W 2.0	E 9.0	E 9.5	...	E	...	0	4 Cu,Ci	0	1.61	
W 3.5	WNW 10.0	SW 9.0	NW	WNW	SW	7 S, Ci	5 Ci, S	3 Ci,S	2.34	⏖ 20h30m-24h.
W 4.0	NE 7.5	W 11.0	W	E	W	10	10	9 S	2.05	● 9h20m, 14h55m-15h40m, 16h40m-20h35m.
.. 6.1	.. 10.6	.. 8.6	...	...	...	7.5	8.1	7.1	13.00	
W 4.5	W 3.0	E 24.0	SSW	NW	...	10	10 Cu	10	0.83	● a ripr. 1h-24h; ↝ E e NE 19h-22h.
W 5.5	NW 7.5	W 18.5	SE	E	...	10	10 Cu	10	0.99	● 0h-8h, 9h30m-24h; ↝ W, NW e N [21h-24h.
W 16.0	W 9.5	E 7.5	ENE	ENE	...	10	10	10	0.89	●° a ripr. 0h-23h30m; ⌒° 18h; ↝ N 1h-4h; [Tram. rosso debole.
W 10.0	NE 3.0	NE 3.5	ESE	ESE	S	9 Cu,Ci,S	9 Cu,Ci	3 Ci	0.47	●° 1h-2h.
W 3.0	NE 2.5	E 2.5	...	E	E	0	7 Cu,Ci	9 Ci	1.13	
W 2.0	E 4.5	E 3.5	SE	SE	...	7 S, Ci	7 Cu,Ci	0	1.39	
W 2.0	NE 4.0	E 7.0	SE	...	...	4 Ci	0	0	1.27	≡² int. n. m.
W 2.5	W 4.0	SW 4.0	...	...	...	0	0	0	1.42	
W 7.5	W 4.0	W 4.5	...	...	...	0	0	1 Ci	1.76	
W 3.5	W 5.5	W 3.0	...	W	...	0	1 Ci	2 Ci	1.60	
.. ..	.. ..	.. ..	...	...	...	....	....	....	....	
.. 5.7	.. 4.8	.. 7.8	...	...	...	5.0	5.4	4.5	11.75	
.. 6.7	.. 8.0	.. 8.9	...	...	...	6.0	6.6	5.3	57.40	

OTTOBRE 1910

GIORNO	Pressione Barometrica a 0° mm. 700 +				Temperatura centigrada						Tensione del vapore millimetri				Umidità relativa			
	9^h	15^h	21^h	Media	9^h	15^h	21^h	minima	mass.	Media	9^h	15^h	21^h	Media	9^h	15^h	21^h	Medi
1	62.7	61.6	62.6	62.3	18.4	22.8	18.8	15.4	23.1	18.9	11.2	11.9	12.1	11.7	71	58	75	68
2	**63.5**	61.8	61.6	62.3	19.4	23.0	19.2	15.0	23.1	19.2	12.6	11.3	11.9	11.9	76	55	72	68
3	61.3	60.1	60.3	60.6	18.8	23.4	19.4	15.8	**23.5**	19.4	13.0	13.0	14.5	13.5	81	61	87	76
4	61.8	61.7	62.7	62.1	16.8	19.8	19.0	15.9	20.3	18.0	13.6	13.9	15.1	14.2	96	81	92	90
5	60.8	56.9	**55.9**	57.9	17.0	21.2	17.2	15.9	21.3	17.9	12.9	11.8	12.5	12.4	90	63	86	80
6	59.4	58.1	59.8	59.1	15.2	16.2	13.6	12.9	17.6	14.8	7.2	5.2	6.5	6.3	56	38	56	50
7	59.7	58.7	58.7	59.0	12.6	13.2	12.6	11.9	14.6	12.9	8.8	11.0	10.6	10.1	81	98	98	92
8	57.9	57.7	59.3	58.3	13.0	16.4	14.2	11.5	16.5	13.8	10.1	9.9	10.4	10.1	91	71	87	83
9	61.2	59.9	60.2	60.4	15.4	18.8	16.0	**11.3**	19.1	15.5	9.7	8.7	10.7	9.7	75	54	79	69
10	59.0	57.9	58.8	58.6	15.6	19.2	16.4	13.8	19.6	16.4	12.9	9.3	11.3	11.2	98	56	81	78
I Decade	60.7	59.4	60.0	60.1	16.2	19.4	16.6	13.9	19.9	16.7	11.2	10.6	11.6	11.1	82	63	81	75
11	60.0	58.4	58.8	59.1	16.2	19.8	15.8	12.8	20.1	16.2	10.7	8.9	11.4	10.3	78	52	85	72
12	58.8	57.9	58.3	58.3	14.8	16.4	16.6	12.9	17.3	15.4	12.0	12.4	12.6	12.3	96	90	90	92
13	59.9	59.4	61.1	60.1	17.0	20.0	17.2	15.9	**20.5**	17.7	13.8	13.2	13.4	13.5	96	76	92	88
14	63.2	62.4	63.1	62.9	17.6	19.8	16.6	16.1	20.1	17.6	13.7	11.8	12.0	12.5	92	69	85	82
15	**65.7**	64.6	64.7	65.0	14.4	16.6	13.2	12.8	17.8	14.6	9.0	9.5	8.2	8.9	74	68	73	72
16	64.5	61.9	61.4	62.6	12.6	16.2	12.2	10.2	16.2	12.8	5.5	6.4	7.4	6.4	50	47	70	56
17	62.6	60.6	60.4	61.2	10.2	16.2	11.4	7.8	16.3	11.4	7.4	5.6	8.3	7.1	80	41	83	68
18	60.4	58.9	58.8	59.4	12.4	15.8	11.6	9.4	15.7	12.3	7.7	6.6	7.0	7.1	72	50	69	64
19	58.2	56.0	54.9	56.4	11.8	17.2	12.0	9.2	16.9	12.5	7.6	7.8	7.2	7.5	74	54	69	66
20	53.5	51.7	**50.7**	52.0	11.4	15.2	10.6	**6.9**	15.2	11.0	8.6	9.6	7.2	8.5	85	74	75	78
II Decade	60.7	59.2	59.2	59.7	13.8	17.3	13.7	11.4	17.6	14.1	9.6	9.2	9.5	9.4	80	62	79	74
21	48.8	**47.5**	48.3	48.2	10.6	11.2	10.0	8.2	13.1	10.5	9.3	8.2	7.5	8.3	97	83	82	87
22	48.8	50.5	52.4	50.6	10.0	10.4	10.4	9.0	10.6	10.0	8.0	8.5	7.7	8.1	87	90	82	86
23	53.6	53.7	55.6	54.3	8.2	11.2	10.0	6.9	11.5	9.2	7.0	8.9	8.2	8.0	86	90	90	89
24	56.1	55.9	57.2	56.4	10.0	12.6	10.8	8.9	12.6	10.6	8.5	7.6	8.4	8.2	92	70	87	83
25	59.4	60.3	61.6	60.4	10.8	13.4	11.4	9.9	13.5	11.4	8.4	7.8	8.3	8.2	87	69	83	80
26	**62.6**	61.7	62.2	62.2	8.4	14.0	10.8	**6.4**	14.1	9.9	7.3	5.8	7.6	6.9	89	49	80	73
27	61.7	59.9	60.4	60.7	9.0	13.6	11.2	6.7	13.8	10.2	7.2	6.5	7.7	7.1	84	56	77	72
28	60.3	60.3	60.9	60.5	9.0	10.4	10.4	8.9	11.6	10.0	7.9	8.9	8.9	8.6	92	95	95	94
29	60.9	59.9	59.0	59.9	11.0	12.2	11.8	9.8	12.6	11.3	8.8	9.1	9.3	9.1	90	86	90	89
30	55.3	52.7	52.8	53.6	11.6	12.4	12.0	10.9	13.0	11.9	9.9	10.5	10.2	10.2	98	98	98	98
31	50.3	48.8	49.3	49.5	11.4	14.6	11.4	10.5	**14.8**	12.0	9.3	9.2	9.1	9.2	93	74	90	86
III Decade	56.2	55.6	56.3	56.0	10.0	12.4	10.9	8.7	12.8	10.6	8.3	8.3	8.4	8.3	90	78	87	85
Mese . . .	59.1	57.9	58.4	58.5	13.2	16.2	13.7	11.3	16.6	13.7	9.7	9.3	9.8	9.6	84	68	83	78

Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle Nubi			Stato del Cielo			Evapor. in 24 ore	METEORE
9^h		15^h		21^h		9^h	15^h	21^h	9^h	15^h	21^h	9^h-9^h	
W	5.0	W	2.0	W	2.5	...	W	...	1 S	5 Ci, Cu	0	1.80	
W	2.5	W	2.5	W	4.5	WNW	...	...	7 Ci, S	0	0	1.55	
W	4.5	N	4.5	E	9.5	NW	NW	...	8 Ci, S	8 Ci, Cu	0	1.36	
NE	5.0	N	6.0	N	1.5	...	WNW	...	10 ≡	10 Cu	10	1.15	≡ int. n.-I; ≡² c. III; p. 10^h15^m, ◉ ⚡ 17^h25^m-19^h; ⌒° 17^h30^m; ⚡ SSW 18^h-22^h.
N	5.0	W	4.0	W	9.0	...	WNW	...	10	8 Cu, Ci	0	0.54	◉° 1^h-2^h, 8^h10^m-8^h55^m; ⚡° SW 22^h45^m 24^h.
E	12.0	E	38.5	NE	21.5	E	E	E	1 Cu, Ci	8 Cu	8 Ci	1.34	p. 14^h25^m; ⟂ e ⟂ a ripr. E e NE 2^h-21^h.
NE	8.5	N	9.5	W	14.0	...	...	...	10	10	10	2.99	◉ 7^h 8^h35^m, 9^h55^m-24^h.
W	5.0	W	2.5	W	6.5	...	WNW	...	10	10 Cu	1 Ci	0.38	◉° 0^h-8^h, 9^h5^m-10^h, 13^h5^m-13^h10^m,
W	7.0	N	9.5	E	8.5	W	SE	E	2 Ci, S	10 Cu	8 Ci	0.37	
N	4.0	N	3.0	W	3.0	WNW	WNW	...	9 Ci, Cu	1 Cu	0	0.95	⚡ ◉ 1^h-6^h15^m.
..	5.9	..	8.2	..	8.1	...	...	...	6.8	7.0	3.7	12.43	
W	0.5	E	4.5	E	8.5	NW	NW	W	7 Cu, Ci, S	6 Cu, Ci, S	7 Cu, Ci, S	0.92	
E	2.0	SW	2.5	SW	6.0	...	...	...	10 ≡²	10	10	0.93	≡² int. m. I, ≡² c. II e III.
W	6.0	E	13.0	E	11.0	...	ESE	...	10 ≡²	10 Cu	0	0.17	≡² int. m. I.
S	3.5	W	10.0	W	7.0	...	NW	...	10 ≡²	10 Cu	0	0.52	≡² int. n.-I.
NE	14.5	E	10.5	E	10.5	...	ESE	...	10	8 Cu, Ci	0	0.91	
E	4.5	E	4.5	E	3.5	...	...	...	0	0	0	1.12	≡² c. m.; Tram. rosso.
SW	1.5	E	4.0	E	9.5	E	E	...	1 Cu, Ci	4 Cu, Ci	0	1.39	
SW	1.0	E	4.5	E	5.5	...	NNE	...	0	3 Cu, Ci	0	1.19	
W	0.5	NE	6.0	E	4.5	...	...	...	0	0	0	1.20	
NW	1.5	E	3.0	SE	13.5	NW	E	WSW	9 Cu, Ci	10 Cu	8 Cu, Ci	1.26	≡² int. m.; o. chiaro da N a SE III; p. 14^h50^m, ◉° 15^h20^m-16^h.
..	3.6	..	6.3	..	8.0	...	...	...	5.7	6.1	2.5	9.61	
SE	5.5	E	14.0	SW	6.0	...	...	SSW	10 ≡²	10	10	0.71	≡² int. n. m.; ≡² c. I; ◉° 9^h30^m-10^h, ◉ ⚡ 11^h40^m-16^h; Tram. rosso.
W	20.0	W	18.0	W	3.0	WNW	W	NE	10 N, Cu	10 N, Cu	7 Cu, Ci	0.38	◉° 8^h15^m-16^h; ⟂ a ripr. W 6^h-15^h.
SE	4.5	W	5.5	W	4.5	NW	WNW	...	9 Ci, Cu	10 N, Cu	10	0.43	◉° 10^h45^m-16^h, 20^h35^m.
W	4.5	W	1.0	W	5.0	...	WNW	...	10	10 S	10	0.33	≡² c. m. I; ◉° 16^h50^m-20^h.
W	2.5	W	0.0	W	0.5	W	NW	...	10 Ci, S	10 Cu	0	0.45	
W	1.0	E	7.5	E	4.5	...	NW	...	0	5 S, Ci, Cu	0	0.49	≡² c. m. I.
E	2.0	NE	8.0	NE	11.5	W	WNW	...	2 Ci, S	9 Cu, Ci	0	0.68	≡² c. m. I.
NE	2.0	N	2.5	N	3.5	...	...	...	10	10	10	0.73	◉° 1^h30^m-6^h; ≡ piov. 13^h10^m-13^h25^m, 16^h-20^h35^m.
N	3.0	N	1.5	N	1.0	...	ENE	...	10	10 S	10	0.23	◉° 20^h30^m-24^h; ⚡ SSW 18^h20^m-21^h, ENE 23^h-24^h.
W	3.5	NW	6.5	W	8.0	...	...	...	10 ≡²	10 ≡²	10	0.20	≡² int. m.-II, ≡² c. III; ◉ 0^h-9^h, 14^h30^m-16^h; ⚡° S 18^h-22^h.
W	6.0	W	5.0	W	6.5	...	NW	...	10	8 Cu, Ci	0	0.18	≡² c. m. I; ◉° 6^h-11^h30^m.
..	5.0	..	6.3	..	4.9	...	...	...	8.3	9.3	6.1	4.81	
..	4.8	..	6.9	..	6.9	...	...	...	7.0	7.5	4.2	26.85	

NOVEMBRE 1910

GIORNO	Pressione Barometrica a 0° mm. 700 +				Temperatura centigrada						Tensione del vapore millimetri				Umidità relativa			
	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	minima	mass.	Media	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Medi
1	48.5	45.2	43.5	45.7	9.8	16.0	14.0	7.8	16.0	11.9	7.9	9.4	5.8	7.7	87	69	49	68
2	38.9	36.6	40.5	38.7	10.6	17.4	11.6	9.4	18.6	12.6	8.1	6.0	3.1	5.7	84	40	29	51
3	43.7	43.4	45.1	44.1	10.6	14.6	9.0	5.5	14.6	9.9	4.5	3.9	5.9	4.8	47	31	68	49
4	42.5	43.9	46.1	44.2	7.8	15.2	13.4	4.4	15.6	10.3	5.9	7.3	6.7	6.6	75	56	58	63
5	46.7	44.1	40.2	43.7	9.8	11.2	9.8	9.1	13.6	10.6	7.0	8.9	8.8	8.2	76	90	97	88
6	37.0	38.3	42.9	39.4	8.8	11.6	10.2	8.4	12.6	10.0	7.6	7.7	6.1	7.1	89	76	65	77
7	50.9	50.3	51.9	51.0	8.8	14.6	9.8	4.8	14.6	9.5	5.3	3.0	5.6	4.6	63	24	62	50
8	54.6	55.3	58.3	56.1	8.6	16.6	14.0	6.4	17.0	11.5	7.2	6.2	5.6	6.3	86	44	47	59
9	58.7	56.2	54.3	56.4	9.8	15.2	11.4	7.7	15.7	11.2	6.9	8.3	8.8	8.0	76	64	88	76
10	46.3	51.0	54.2	50.5	10.8	6.6	6.0	5.0	13.7	8.9	8.7	6.9	5.1	6.9	90	94	73	86
I Decade	46.8	46.4	47.7	47.0	9.5	13.9	10.9	6.9	15.2	10.6	6.9	6.8	6.2	6.6	77	59	64	67
11	57.8	53.1	47.7	52.9	6.8	10.6	6.6	3.7	11.0	7.0	2.8	2.0	3.4	2.7	38	20	46	35
12	51.4	54.9	58.5	54.9	8.0	12.0	7.0	3.9	12.1	7.8	3.5	2.3	2.1	2.6	44	22	28	31
13	61.0	59.9	59.9	60.2	5.0	9.2	6.2	1.9	9.4	5.6	3.1	4.0	4.6	3.9	48	46	65	53
14	55.0	49.2	47.1	50.4	5.2	7.0	4.8	3.9	7.0	5.2	5.4	6.2	6.2	5.9	81	82	97	87
15	44.2	36.7	35.5	38.8	4.2	5.4	4.6	2.9	5.6	4.3	5.8	6.5	6.0	6.1	93	97	93	94
16	40.4	42.9	47.3	43.5	6.6	13.0	7.6	4.3	13.1	7.9	4.6	4.2	6.1	5.0	62	37	77	59
17	54.0	54.2	51.9	53.4	6.0	10.8	8.8	3.1	10.9	7.2	5.3	2.4	4.5	4.1	76	25	53	51
18	45.4	42.5	43.4	43.8	4.2	5.6	2.4	1.4	9.1	4.3	6.0	5.4	4.5	5.3	97	78	82	86
19	48.8	50.2	53.6	50.9	3.2	8.6	3.6	1.7	8.6	4.3	4.0	2.0	3.4	3.1	69	24	57	50
20	57.4	57.3	58.0	57.6	3.6	8.2	3.4	1.7	8.2	4.2	3.1	2.2	2.9	2.7	51	27	49	42
II Decade	51.5	50.1	50.3	50.6	5.3	9.0	5.5	2.9	9.5	5.8	4.4	3.7	4.4	4.1	66	46	65	59
21	54.5	53.6	54.5	54.2	1.6	4.0	2.8	-0.1	4.1	2.1	3.8	4.3	4.8	4.3	74	70	86	77
22	54.8	53.6	54.9	54.4	1.0	4.8	1.4	0.0	6.1	2.1	4.2	4.6	4.3	4.4	85	71	85	80
23	57.0	55.0	54.8	55.6	-1.2	6.4	2.6	-5.2	6.6	0.7	3.4	2.3	2.9	2.9	80	32	52	55
24	56.0	58.3	60.1	58.1	1.2	6.2	2.4	-0.3	6.2	2.4	3.1	3.0	3.5	3.2	62	42	65	56
25	59.8	57.6	55.9	57.8	2.4	3.6	2.4	0.4	4.1	2.3	3.2	3.8	4.1	3.7	58	64	75	66
26	53.9	53.0	55.6	54.2	1.6	3.0	-0.2	-0.8	3.5	1.0	4.8	4.3	4.4	4.5	93	76	96	88
27	59.3	59.4	60.2	59.6	-1.2	1.0	-0.6	-1.6	1.1	-0.6	4.0	4.2	4.2	4.1	96	85	96	92
28	60.2	59.7	60.8	60.2	-0.4	2.4	2.2	-2.0	2.5	0.6	4.1	4.7	4.6	4.5	92	86	86	88
29	61.2	60.2	60.2	60.5	2.8	3.8	3.6	1.8	4.0	3.1	5.2	5.6	5.5	5.4	93	93	93	93
30	58.4	57.5	56.4	57.4	5.0	6.4	6.2	3.4	6.7	5.3	6.1	6.6	6.5	6.4	94	91	91	92
31	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
III Decade	57.5	56.8	57.3	57.2	1.3	4.2	2.3	-0.4	4.5	1.9	4.2	4.3	4.5	4.3	83	71	82	79
Mese . . .	51.9	51.1	51.8	51.6	5.4	9.0	6.2	3.1	9.7	6.1	5.2	4.9	5.0	5.0	75	59	70	68

Direzione e velocità del vento in chilometri						Direzione delle Nubi			Stato del Cielo			Evapor. in 24 ore	METEORE
9h		15h		21h		9h	15h	21h	9h	15h	21h	9h - 9h	
W	1.0	NE	3.0	W	6.0	E	ESE	. . .	7 Ci, S	9 S, Ci, Cu	10	0.30	≡² c. m.; Tramonto rosso.
W	8.5	W	29.5	W	40.0	NW	WNW	. . .	5 Ci, S	1 Cu	0	0.84	●° 16h-71h, ⌒² 16h45m; ⚡ ENE e E 16h48m - [17h15m; —ш a ripr. W e NW 14h-22h.
S	5.5	NE	5.5	W	9.0	. . .	. . .	. . .	1 Cu, Ci	2 Cu, Ci	0	2.72	—ш W 0h-3h.
N	2.5	NW	8.0	W	4.0	. . .	NW	. . .	1 Cu	3 Ci, S, Cu	1 Ci, S	1.44	
E	8.0	E	6.0	E	8.5	W	NW	. . .	10 Cu	10 Cu, S	10	1.25	●° 14h-24h.
W	8.5	SW	8.5	NE	11.5	NW	W	. . .	9 Ci, Cu	8 Ci, Cu	1 Ci	0.35	≡ int. m.; —ш NW e W 17h-18h.
S	5.0	NE	7.0	NE	5.0	WSW	W	. . .	7 S, Ci	3 Ci, S	10	0.74	V° m.; Tramonto rosso.
NE	5.5	W	11.5	W	5.0	WNW	NW	. . .	8 Cu, Ci	7 Ci, S, Cu	1 Ci	1.31	≡² c. m.; ⌓ 18h-19h; Tramonto rosso.
W	3.5	NE	4.5	W	3.0	NW	W	. . .	3 S, Ci, Cu	9 Ci, S, Ci	10	1.21	≡² c. III.
E	10.0	NE	14.0	S	11.5	NW	. . .	N	8 Cu, Ci	10 Cu	9 Ci, S	0.88	≡ c. m.-II; ●° 6h-7h, 9h50m-16h45m; —ш [NW e W 10h-14h.
. .	5.8	. .	9.8	. .	10.4	. . .	. . .	. . .	5.9	6.2	5.2	11.01	
W	8.0	E	7.0	E	5.0	. . .	NW	W	1 Ci, S	8 S, Ci	10 Cu, S	0.94	≡² c. m. I; —ш W 1h-6h; Tram. rosso.
W	20.5	NW	25.0	W	17.5	. . .	. . .	. . .	0	0	0	1.70	o. chiaro III; ●° 2h15m-3h; —ш W 5h-6h, [—ш e —ш NW 9h-16h.
W	1.0	NE	1.5	W	4.0	. . .	NW	W	3 S	8 Ci, S	10 Cu	2.38	V m. I; ≡² c. m. I; ⌓ 17h20m-17h45m.
W	3.0	S	2.5	W	14.5	W	. . .	. . .	9 Ci, S	10	10	0.96	≡² c. 0h-24h; ●° a ripr. 9h30m-17h45m, [● ⚡ 17h45m-20h30m; —ш W 16h-18h.
E	7.5	W	16.0	SW	30.5	. . .	. . .	. . .	10	10	10	0.40	≡² c. m.-II; ●° 9h20m-24; —ш e —ш W [e SW 15h-23h.
W	2.0	W	7.5	N	2.5	NW	W	W	7 Ci, S	2 S, Ci, Cu	8 S	0.29	≡° c. m. I, III; ●° 0h-1h; ⌓ 20h-21h; [⚡ S e SW 23h-24h.
W	3.0	SW	3.0	S	4.5	. . .	WNW	. . .	1 Ci, S	2 S, Ci	10 Cu, S	0.85	≡° c. m. I; ⚡ S e SW 0h-1h.
W	23.0	W	5.5	W	36.5	. . .	NW	. . .	10	10 Cu	10	1.28	● a ripr. 2h-21h30m; ✳ 21h30m-22h15m; [—ш e —ш W, NW e SW 7h-10h, 20h-24h.
NE	3.0	W	13.0	W	12.0	N	. . .	. . .	6 S, Ci, Cu	1 S, Ci	0	0.51	V ⊔ m; ≡° c. m. I; ●° 2h-3h; Tram. [rosso.
W	11.5	W	3.0	SW	13.5	. . .	. . .	. . .	0	0	0	0.96	V ⊔ m. I; ≡° c. m. I; Tram. rosso.
. .	8.3	. .	8.4	. .	14.1	. . .	. . .	. . .	4.7	5.1	6.8	10.27	
W	6.0	W	2.5	NW	3.0	NW	. . .	. . .	10 Cu	10 S	10	1.14	V ⊔ m. I; ≡² c. III; p ✳° 8h40-10h15m.
W	10.0	NW	9.5	W	13.5	. . .	. . .	. . .	1 S, Ci	0	0	0.37	V ⊔ m. I, III; ≡² c. m. I; —ш W 12h-13h; [Tramonto rosso.
W	8.0	W	5.5	SW	12.0	. . .	. . .	. . .	0	1 S	0	gelato	V ⊔ n.-I; ≡² c. m. I; Tram. rosso.
W	2.0	E	2.0	S	7.5	. . .	. . .	. . .	0	0	0	1.16	V ⊔ m. I; ≡ c. m. I.
W	3.0	W	0.5	N	4.5	NNW	. . .	. . .	10 Cu	10	10	0.69	⊔ m. I; ≡ c. 0h-24h; ●° 21h-22h15m; ✳ [22h15m-24h.
W	5.5	W	6.0	W	9.0	. . .	WNW	. . .	10	5 Ci	10 ≡	0.47	⊔ m. I; ≡² c. m. I, ≡ int. III; ✳ [0h-6h15m.
W	11.0	W	10.0	W	9.5	. . .	. . .	. . .	10 ≡	10	10 ≡	gelato	⊔ 0h-24h, ≡² int. 0h-24h
W	0.5	W	3.0	W	6.0	. . .	. . .	. . .	10	10	10	»	⊔ m.-II; ≡² c. 0h-24h.
W	4.0	W	5.5	W	9.0	. . .	. . .	. . .	10	10 ≡	10 ≡	0.45	≡² int. 0h-24h; ●° 2h-3h, 5h50m-11h; [≡ piov. 16h-24h.
W	2.5	W	2.5	W	0.0	. . .	. . .	. . .	10	10 ≡	10 ≡	0.13	≡² int. n. II, III, ≡² c. m. I; ●° 6h- [7h55m, 20h-21h30m; ≡ piov. 0h-6h, [21h30m-24h.
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	
. .	5.6	. .	4.7	. .	7.4	. . .	. . .	. . .	7.1	6.6	7.0	4.41	
. .	6.5	. .	7.6	. .	10.6	. . .	. . .	. . .	5.9	6.0	6.3	25.72	

DICEMBRE 1910

GIORNO	Pressione Barometrica a 0° mm. 700 +				Temperatura centigrada						Tensione del vapore millimetri				Umidità relativa			
	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	minima	mass.	Media	9h	15h	21h	Media	9h	15h	21h	Medi
1	53.9	52.9	53.0	53.3	5.8	6.6	6.8	5.4	7.1	6.3	6.5	6.9	7.0	6.8	94	94	94	94
2	53.9	54.2	55.6	54.6	8.0	10.0	7.8	6.4	10.1	8.1	7.6	8.0	7.2	7.6	94	87	91	91
3	56.6	56.0	57.2	56.6	6.4	10.8	6.8	4.9	11.1	7.3	5.9	7.3	7.2	6.8	82	75	97	85
4	57.7	56.9	56.5	57.0	5.8	7.6	7.2	5.0	7.6	6.4	6.7	7.1	7.2	7.0	97	91	94	94
5	55.4	54.7	53.9	54.7	7.8	8.2	8.0	6.8	9.1	7.9	7.7	7.9	7.8	7.8	97	97	97	97
6	53.9	51.3	50.6	51.9	8.6	11.8	14.0	7.8	15.1	11.4	8.1	9.6	7.7	8.5	97	93	65	85
7	53.4	53.3	54.2	53.6	9.6	11.2	7.8	7.1	13.6	9.5	8.5	8.7	7.5	8.2	95	87	94	92
8	54.2	51.7	49.7	51.9	7.8	13.0	12.0	5.9	13.3	9.8	7.0	7.9	7.0	7.3	89	70	67	75
9	45.7	47.1	47.9	46.9	15.0	10.6	8.8	8.4	15.0	11.8	6.9	8.8	8.0	7.9	54	92	94	80
10	50.4	49.9	49.9	50.1	9.0	9.6	8.8	7.9	10.0	8.9	7.7	7.5	8.2	7.8	89	84	97	90
I Decade	53.5	52.8	52.9	53.1	8.4	9.9	8.8	6.6	11.2	8.7	7.3	8.0	7.5	7.6	89	87	89	88
11	47.9	48.5	51.8	49.4	10.4	12.4	9.2	7.7	12.6	10.0	8.5	8.0	7.8	8.1	90	74	89	84
12	54.9	55.3	57.2	55.8	8.0	9.0	8.8	7.1	9.6	8.4	7.1	6.7	6.9	6.9	89	79	81	83
13	58.6	56.6	56.2	57.1	8.0	9.8	8.6	7.7	10.3	8.7	6.9	6.5	6.5	6.6	86	72	78	79
14	52.8	53.7	55.9	54.1	8.2	9.4	8.6	7.3	9.7	8.5	7.2	7.6	7.7	7.5	89	86	92	89
15	54.8	53.9	55.1	54.6	7.6	9.0	7.0	6.4	9.1	7.5	6.0	6.7	6.6	6.4	77	79	88	81
16	58.4	58.2	58.5	58.4	5.0	9.2	6.6	4.3	10.2	6.5	5.1	5.9	6.2	5.7	78	69	85	77
17	57.7	54.7	51.7	54.7	6.2	6.6	7.2	5.2	7.1	6.4	6.2	6.9	7.4	6.8	88	94	97	93
18	48.8	48.7	51.2	49.6	6.8	9.2	7.8	6.1	9.3	7.5	7.2	6.4	6.2	6.6	97	73	78	83
19	56.4	59.7	62.5	59.5	6.8	10.2	6.4	5.4	10.5	7.3	6.1	5.8	5.7	5.9	82	62	79	74
20	64.0	63.1	64.2	63.8	5.4	9.4	5.2	3.6	9.4	5.9	4.6	4.1	4.4	4.4	69	47	66	61
II Decade	55.4	55.2	56.4	55.7	7.2	9.4	7.5	6.1	9.8	7.7	6.5	6.5	6.5	6.5	85	74	83	80
21	64.6	64.5	65.4	64.8	2.0	6.4	3.4	1.0	6.6	3.3	4.0	4.6	4.7	4.4	75	65	80	73
22	67.4	66.7	67.3	67.1	3.4	5.8	3.4	1.9	6.0	3.7	4.7	5.2	5.1	5.0	80	76	86	81
23	65.7	64.2	63.5	64.5	1.0	5.4	-1.0	-2.2	5.4	0.8	4.0	4.8	3.9	4.2	81	72	92	82
24	61.1	58.2	56.2	58.5	-3.4	3.6	-2.2	-4.8	3.8	-1.7	3.2	4.3	3.7	3.7	91	73	96	87
25	50.3	47.2	47.3	48.3	-1.4	-0.8	0.0	-3.2	0.6	-1.0	4.0	4.2	4.4	4.2	96	96	96	96
26	47.8	45.9	45.7	46.5	0.2	2.0	0.2	-0.7	3.4	0.8	4.3	4.9	4.5	4.6	93	93	96	94
27	42.9	40.1	40.3	41.1	-1.4	0.4	1.0	-1.8	1.0	-0.3	4.0	4.6	4.8	4.5	96	96	96	96
28	46.5	48.9	53.8	49.7	1.2	3.6	4.6	0.4	6.0	3.1	4.8	5.5	5.5	5.3	96	93	87	92
29	57.9	57.1	58.1	57.7	3.4	5.0	3.8	2.9	5.0	3.8	5.5	5.3	5.2	5.3	93	81	87	87
30	58.2	56.6	56.2	57.0	2.2	6.4	2.2	1.2	6.6	3.1	4.6	3.7	4.2	4.2	86	51	79	72
31	57.6	57.2	58.9	57.9	1.6	6.6	2.0	-0.8	6.9	2.4	3.4	2.6	3.0	3.0	66	35	57	53
III Decade	56.4	55.1	55.7	55.7	0.8	4.0	1.6	-0.6	4.7	1.6	4.2	4.5	4.5	4.4	87	76	87	83
Mese . . .	55.1	54.4	55.0	54.8	5.3	7.7	5.3	3.9	8.4	5.8	5.9	6.3	6.1	6.1	87	79	86	84

Direzione e velocità del vento in chilometri 9h	15h	21h	Direzione delle Nubi 9h	15h	21h	Stato del Cielo 9h	15h	21h	Evapor. in 24 ore 9h-9h	METEORE
W 0.5	W 11.5	W 15.0	...	...	...	10	10	10	0.06	≡² int. n.-I, ≡² c. II, III; ●° 1h15m-8h30m, 12h-24h.
W 11.5	W 8.5	W 9.5	...	WNW	...	10	10 Cu	0	0.10	≡° c. m. I; ●° 0h-3h.
W 4.5	W 1.0	NW 0.5	NW	NW	...	8 Ci, S	8 Ci, Cu, S	10≡	0.24	≡° c. m. I, ≡ int. III.
N 4.0	E 3.5	E 0.5	...	...	...	10≡	10	10	0.13	≡ int. n.-I, ≡² c. II, III.
W 5.5	E 7.5	E 4.5	...	...	...	10≡	10≡	10≡	0.04	≡ int. 0h-24h; ≡ piov. 4h-7h, ●° 14h-18h30m.
W 2.5	NE 23.0	SE 20.0	...	SE	...	10≡	10 Cu	10	0.03	≡ int. n.-I; _ш e _ш a ripr. E, NE e SE 14h-21h.
W 5.5	W 3.5	SW 5.0	...	SW	SW	10≡	8 Cu, Ci	7 Ci	0.61	≡ int. n.-I, III, ≡° c. II; ●° 13h15m-13h30m.
SE 3.5	E 6.5	E 17.5	SSW	W	...	8 Ci, Cu, S	9 Ci, S	10	0.28	≡² c. m. I; ●° 22h50m-23h5m; _ш E 20h-21h.
SE 41.0	W 8.0	W 10.0	SSE	...	...	10 Cu	10	10	1.59	≡ int. III; ●° 9h50m-18h35m, 23h-24h; _ш e _ш a ripr. E e SE 0h-11h.
W 3.5	S 4.0	E 13.0	...	WNW	...	10	10 Cu	10≡	0.62	≡ int. III; ●° 0h-3h15m.
.. 8.2	.. 7.7	.. 9.6	...	...	...	9.6	9.5	8.7	3.70	
E 37.0	NE 14.5	W 11.5	S	SSW	...	10	10 Cu	10	0.22	●' a ripr. 5h-23h; ⌒° N 11h15m; _ш e _ш a ripr. E e NE 1h-3h, 4h-14h.
W 10.5	W 9.0	W 5.5	...	...	...	10	10	10	0.43	≡° c. m. I; ●° 3h55m-4h, 5h30m-7h.
W 12.5	SW 0.5	SW 2.5	...	W	...	10	10	10	0.31	
E 23.5	S 5.5	W 14.5	...	...	...	10	10	10	0.46	●° 7h50m-8h; _ш E 5h-10h.
W 4.5	W 8.0	W 10.5	WNW	WNW	ENE	10 S, Cu	10 Cu, S	5 Ci, S	0.32	≡° c. m. I; p. 12h18m, 15h.
W 5.5	W 4.5	W 8.0	NNE	...	...	5 Ci, S	7 S	10 S	0,56	V° m. I; ≡² c. m. I; ◡ 22h-23h.
W 1.5	E 9.0	E 4.0	...	...	...	10	10≡²	10≡²	0.56	≡² c. 0h-24h ≡ piov. 18h15m-19h45m.
W 9.5	SW 11.0	W 21.5	...	WNW	...	10≡²	8 Cu, Ci	10 S	0.10	≡ int. n. m., ≡² c. I; ●° e ≡ piov. a ripr. 2h30m-22h; _ш W 20h-22h.
W 9.0	W 2.5	W 7.5	NE	NW	N	9 Cu, Ci	8 Cu, Ci	2 Cu, Ci	0.63	≡² c. m.; ●° 2h-2h25m.
W 9.5	W 6.0	W 12.5	WNW	...	...	7 S, Ci	0	0	0.69	V° m. I; ≡° c. m. I; Tram. rosso.
.. 12.3	.. 7.1	.. 9.8	...	...	...	9.1	8.3	7.7	4.26	
W 2.0	N 0.5	W 7.5	...	...	...	1 S, Ci	0	9 Cu	0.74	V ⌴ I; ≡² c. m. I.
W 8.5	W 7.5	W 11.5	E	E	...	10 Cu	10 Cu	0	0.39	≡² c. m. I, III.
W 8.0	W 4.5	W 2.5	...	...	...	0	0	0	0.38	V ⌴ m. I, III; ≡² c. 0h-24h, ≡ b in città III.
W 1.0	W 1.5	W 3.0	...	...	...	0	0	10≡²	gelato	V ⌴ m. I, ⌴ III; ≡² b. m. I, ≡² int. III.
S 3.0	W 2.0	W 6.0	...	...	...	10≡²	10≡²	10≡²	»	⌴ 0h-24h; ≡² int. n.-II, ≡² c. III.
W 13.5	W 9.0	W 10.5	...	...	...	10≡²	10≡²	10≡²	»	⌴ 0h-24h; ≡² c. m.-II, ≡² int. III.
W 3.0	W 4.5	NW 1.0	...	...	...	10≡²	10≡²	10≡²	»	⌴ 0h-24h; ≡² int. 0h-24h.
W 9.5	W 16.5	E 21.0	...	...	...	10≡²	10≡²	10	»	≡ int. n.-II; ● e ✳ altern. 4h-8h15m, ● 8h15m-24h; _ш E e NE a ripr. 16h-22h.
W 10.0	NW 5.5	W 12.5	...	N	...	10≡²	10	10≡	0.73	≡° c. m. I; ●° 0h-9h30m, 13h-20h; _ш N e NE 0h-5h.
W 8.5	W 2.0	W 18.0	E	...	...	2 Ci, S	1 Ci	0	0.31	⌴ m. I; ≡° c. m. I.
W 13.5	W 2.0	W 12.0	NE	...	...	3 Ci, S, Cu	0	0	0.60	V ⌴ m. I; ● gelata 7h; Tram. rosso.
.. 7.3	.. 5.0	.. 9.6	...	...	...	6.0	5.5	6.3	3.15	
.. 9.2	.. 6.6	.. 9.7	...	...	...	8.0	7.5	7.3	11.13	

TEMPERATURA

1910	I.ª DECADE				II.ª DECADE				III.ª DECADE				MESE			
	Temperatura centigrada				Temperatura centigrada				Temperatura centigrada				Temperatura centigrada			
	Media	Assoluta Min.	Assoluta Mass.	Data del Min. e del Massimo	Media	Assoluta Min.	Assoluta Mass.	Data del Min. e del Massimo	Media	Assoluta Min.	Assoluta Mass.	Data del Min. e del Massimo	Media	Assoluta Min.	Assoluta Mass.	Data del Min. e del Massimo
Gennaio .	1.8	— 3.7	8.6	9 ; 5	2.4	— 2.1	16.2	11 ; 19	0.7	— 4.8	7.0	26 ; 21	1.6	— 4.8	16.2	26 ; 19
Febbraio .	4.6	1.3	10.6	5 ; 7	4.3	— 0.7	9.6	12 ; 17	7.4	2.6	12.6	24 ; 22	5.3	— 0.7	12.6	12 ; 22
Marzo . . .	7.1	1.8	14.5	1 ; 10	10.3	5.2	17.7	11 ; 12	9.4	0.4	17.2	31 ; 29	9.0	0.4	17.7	31 ; 12
Aprile. . .	8.3	0.8	16.6	1 ; 8	13.2	3.7	24.1	12 ; 20	14.6	6.9	22.5	29 30 ; 21	12.1	0.8	24.1	1 ; 20
Maggio . .	14.0	7.1	21.6	3 ; 8	15.2	5.5	24.0	12 ; 20	18.7	12.9	25.6	28 ; 21 30 ; 31	16.1	5.5	25.6	12 ; 21 31
Giugno . .	21.8	14.8	28.1	5 ; 2 4	20.7	14.4	28.2	13 ; 17 20	22.4	15.4	29.1	22 ; 23 30	21.6	14.4	29.1	13 ; 23 30
Luglio . .	20.8	12.9	27.5	5 ; 1	23.8	16.4	31.6	11 ; 19	23.3	14.8	31.3	27 28 ; 23	22.6	12.9	31.6	5 ; 19
Agosto . .	22.4	13.3	30.3	8 ; 2	23.7	16.8	30.6	13 ; 19	23.2	16.9	31.6	24 ; 21 25 ; 22	23.1	13.3	31.6	8 ; 21 22
Settembre	18.2	11.9	26.5	8 ; 1	17.7	12.9	22.8	11 ; 18	15.7	9.3	22.6	23 ; 30	17.2	9.3	26.5	23 ; 1
Ottobre . .	16.7	11.3	23.5	9 ; 3	14.1	6.9	20.5	20 ; 13	10.6	6.4	14.8	26 ; 31	13.7	6.4	23.5	26 ; 3
Novembre	10.6	4.4	18.6	4 ; 2	5.8	1.4	13.1	18 ; 16	1.9	— 5.2	6.7	23 ; 30	6.1	— 5.2	18.6	23 ; 2
Dicembre.	8.7	4.9	15.1	3 ; 6	7.7	3.6	12.6	20 ; 11	1.6	— 4.8	6.9	24 ; 31	5.8	— 4.8	15.1	24 ; 6
Anno . . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . .	— 5.2	31.6	23 Novem. 19 Luglio 21 e 22 Ag.

	Temperatura media osservata	Temperatura media normale	Differenza colla normale
Inverno	4.2	2.7	+ 1.5
Primavera . . .	12.4	13.3	— 0.9
Estate	22.4	23.8	— 1.4
Autunno	12,3	13.9	— 1.6
Anno	12.9	13.4	— 0,5

Altezza della precipitazione (in mm.) raccolta nei pluviometri del R. Osservatorio Geofisico di Modena nell' anno 1910

Mesi e Giorni		0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h
Gennaio	8	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,12≡	....
	9	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,09≡
	10	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,04≡	0,04≡
	11	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,10≡
	12	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	13	0,04	0,05	....	....	....	0,43	0,20	....	....	0,70	1,13	1,00
	17	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.	....
	21	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	22	0,59✱	0,90✱	0,92✱	0,68✱	0,50✱	0,49✱	0,62✱	0,71✱	1,54✱	1,93✱	1,40✱	0,56✱
	23	1,60✱	1,38✱	1,28✱	1,04✱	....	....	....	....	....	....	....	....
	24	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	25	....	....	0,11✱	0,67✱	0,43✱	0,61✱	0,20✱	0,15✱	0,40✱	0,40✱	....	....
	26	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	27	....	....	....	....	....	....	....	0,03✱	1,09✱	0,06✱	....	....
	29	....	....	....	0,33	0,58	....	....	....	....	....	....	....
	30	0,49	0,45	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	31	....	....	....	....	....	0,05	0,28	0,55	0,80	0,65	0,65	2,00
Febbraio	3	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	4	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	5	....	....	0,33	1,32	1,19	0,39	0,09	0,06	....	....	....	....
	8	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	9	2,42	2,58	1,15	0,49	0,22	0,12	0,64	0,58	0,30	1,17	1,32	2,00
	13	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	15	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	16	....	....	....	....	....	....	....	....	0,12	0,15	0,06	0,03
	19	....	....	....	....	....	....	....	inc.	inc.	0,09	....	....
	20	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	24	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	26	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	27	....	....	....	inc.	inc.	....	....	....	....	....	....	....
	28	....	....	....	....	....	0,70	1,84	1,03	1,03	....	....	....
Marzo	2	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.	0,03	0,17
	3	....	....	....	....	....	....	....	0,10	....	....	....	....
	12	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Valori orarî diurni

13h	14h	15h	16h	17h	18h	19h	20h	21h	22h	23h	24h	SOMMA
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,12 ≡
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,09 ≡
0,04 ≡	0,04 ≡	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,16 ≡
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,10 ≡
....	....	....	....	....	....	....	....	0,24	0,03	0,03	0,03	0,33
1,55 ✳	1,65	0,87	0,14	inc.	....	....	....	....	....	....	....	7,76 ● ✳
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.
....	....	....	....	....	0,66	2,63	0,83	2,63	1,57 ● ✳	0,65 ● ✳	0,40 ✳	9,37 ● ✳
0,74 ✳	0,48 ✳	0,16 ✳	inc. ● ✳	inc.	inc.	0,40	0,30 ● ✳	0,65 ✳	1,50 ✳	1,39 ✳	1,45 ✳	17,91 ● ✳
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	5,30 ✳
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,12 ✳	0,16 ✳	0,28 ✳
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	3,00 ✳
....	....	....	....	....	....	....	inc. ✳	0,05 ✳	0,10 ✳	0,13 ✳	0,18 ✳	0,46 ✳
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	1,18 ✳
....	0,10	0,28	....	....	0,10	1,35	0,90	2,01	0,87	1,65	1,43	9,60
....	0,25	0,88	1,37	1,14	1,60	0,70	0,12	....	....	...	....	7,00
2,20	0,34	0,65	0,45	0,55	0,60	0,24	0,09	....	....	....	....	10,10
....	....	....	inc.	inc.	....	....	....	....	0,08	0,07	....	0,15
....	....	....	....	....	....	inc.	0,10	inc.	p	....	....	0,10
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	3,38
....	....	....	1,13	2,02	0,32	0,03	....	....	....	0,65	0,98	5,13
3,71	6,80	2,61	1,66	1,28	0,25	0,25	1,60	0,62	....	....	....	31,77
....	....	....	....	....	....	p.	....	....	....	....	....	inc.
....	....		....	....	....	....	....	....	0,15	0,06	0,03	0,24
0,11	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,47
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,09
....	....	....	....	....	....	0,46	0,68	0,90	....	....	....	2,04
....	....	....	....	....	inc.	inc.	0,04	0,06	0,09	....	....	0,19
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.	....	inc.
....	....	inc.	....	....	....	inc.	....	....	....	....	....	inc.
....	inc.	....	inc.	....	0,14	0,06	....	....	....	....	....	4,80
0,62	0,09	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,91
....	0,03	0,03	0,31	inc.	....	....	....	....	....	....	....	0,52
....	....	....	....	....	0,10	0,65	0,06	....	....	....	....	0,81

Mesi e	Giorni	0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h
Marzo	15	....	....	0,40	0,95	0,06	0,03	....	....	inc.	inc.	inc.	inc.
	19	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	20	....	....	....	....	....	....	0,55	....	inc.	0,09	....	....
	21	....	....	0,09	....	....	0,08	0,34	0,74	0,33	0,09	0,14	inc.
	29	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	30	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	31	....	....	....	....	0,37	0,09	0,03	0,15	0,30	0,67	0,31	0,87
Aprile	1	2,50 ● ✱	2,00	2,40	1,50	0,53	0,15	0,25	0,35	0,60	0,27	0,09	0,06
	2	0,35	0,25	0,05	0,38	0,50	0,51	....	....	0,06	....	....	....
	3	....	....	....	....	....	....	....	inc.	0,65	0,91	0,76	0,33
	4	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	5	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	6	0,03	0,05	0,04	0,03	....	....	....	....	....	....	....	....
	9	....	....	....	....	....	....	....	inc.	inc.	....	inc.	inc.
	10	0,03	0,07	0,10	0,05	....	....	....	....	....	....	....	....
	15	0,50	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	16	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	17	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	18	....	....	....	....	....	....	p.	p.	....	....	....	....
	23	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	24	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	27	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
Maggio	2	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	3	1,65	0,10	0,08	0,05	inc.	inc.	....	....	....	....	....	....
	5	....	....	....	....	....	....	....	inc.	0,06	0,12	inc.	....
	6	....	....	....	....	0,10	....	....	....	....	....	....	....
	10	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	11	0,63	0,98	1,00	0,70	1,30	0,49	1,00	0,43	0,90	0,33	0,05	1,10
	16	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	22	....	....	....	....	....	....	....	0,28	2,25	0,03	....	....
	23	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.	0,35
	24	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,48	0,97
	27	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	28	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Valori orarî diurni

h	13h	14h	15h	16h	17h	18h	19h	20h	21h	22h	23h	24h	SOMMA
....	....	....	....	inc.	inc.	0,09	0,11	0,25	inc.	0,71	0,28		2,88
....	....	....	....	p.	....	....	....	....	p.	....	....		inc.
....	....	....	....	....	....	....	0,38	0,03	inc.	1,78	0,11		2,94
inc.	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....		1,81
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.	0,30		0,30
....	....	....	....	....	....	....	....	....	2,34	....	....		2,34
0,09	0,11 ● ⚹	0,03 ⚹	inc.	inc.	0,23 ⚹	0,46 ⚹	0,64 ⚹	0,41 ⚹	6,19 ⚹	2,77 ⚹	1,20 ⚹		14,92 ● ⚹
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....		10,70 ● ⚹
....	....	....	....	....	....	....	inc.	....	....	....	....		2,10
0,37	0,98	0,73	1,26	0,51	....	....	....	....	....	....	....		6,50
....	....	....	inc.	0,37	2,43	inc.	inc.	....	....	....	....		2,80
....	....	....	....	inc.	inc.	0,28	0,60	0,33	....	0,09	inc.		1,30
....	....	....	....	0,03	....	....	....	....	....	....	....		0,18
2,77	2,01	2,50	2,00	1,23	1,31	3,50	1,34	1,14	1,20	0,53	0,12		19,65
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....		0,25
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....		0,50
....	....	....	....	....	inc.	0,12	0,28	....	....	....	....		0,40
....	inc.	0,20	inc.	inc.	....	....	....	....	....	....	....		0,20
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....		inc.
....	....	....	....	....	....	....	0,20	....	....	....	....		0,20
....	....	....	inc.	0,67	....	....	0,32	....	....	....	....		0,99
....	....	....	....	....	inc.	0,28	....	....	....	....	....		0,28
....	....	....	....	....	0,34	1,90	3,54	6,48	5,52	3,35	2,32		23,40
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....		1,88
....	0,87	1,99	....	....	....	....	....	....	....	0,14	0,22		3,40
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....		0,10
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,18		0,18
0,62	0,61	1,26	0.27	0,03	....	p.	....	....	....	inc.	....		11,70
....	....	....	inc.	....	....	....	....	....	....	....	....		inc.
....	....	....	....	....	....	4,87	inc.	....	....	....	....		7,43
inc.	....	....	....	....	....	....	....	inc.	....	....	....		0,35
2,18	2,00	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....		5,63
....	....	....	inc.	1,10	....	....	....	....	....	....	....		1,10
....	....	....	....	inc.	0,09	....	....	....	....	....	....		0,09

Precipitazione –

Mesi e Giorni		0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h
Giugno	2	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	4	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	5	....	....	....	....	....	....	inc.	....	....	11,22	3,30	....
	6	....	0,76	1,22	3,55	0,45	0,06	inc.	....	....	inc.	....	....
	9	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	10	....	inc.	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	11	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	p.
	13	....	....	0,18	0,68	3,88	5,53	3,66	4,65	inc.	2,45	0,09	....
	14	....	0,79	0,93	0,60	1,20	1,98	0,95	....	....	....	....	....
	15	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	18	....	....	....	....	....	0,52	....	....	....	....	....	....
	19	0,31	....	....	0,39	....	....	....	....	....	....	....	....
Luglio	4	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	5	1,30	1,30	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	7	....	0,08	....	0,21	....	....	....	....	....	....	....	....
	11	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	12	....	0,03	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	23	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	27	....	inc.	....	....	....	....	....	1,19	1,62	inc.	inc.	inc.
Agosto	3	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,75
	6	....	....	....	0,49	....	....	....	....	....	....	....	....
	7	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	9	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	10	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	11	....	....	inc.	0,53	0,14	....	....	....	....	....	....	....
	16	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	23	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	28	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	31	....	....	....	....	....	....	....	0,36	....	....	....	....
Settembre	5	....	....	....	....	....	....	....	inc.	0,35	inc.	....	....
	6	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	9	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	10	1,17	0,84	0,36	1,59	0,22	0,65	0,90	2,28	1,15	0,60	0,09	0,06
	11	6,26	4,51	2,31	0,84	0,37	4,84	2,40	1,98	3,36	1,76	0,73	0,06

Valori orarî diurni

13h	14h	15h	16h	17h	18h	19h	20h	21h	22h	23h	24h	SOMMA
....	....	....	....	....	....	....	....	p.	....	....	....	inc.
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.	....	inc.
....	4,44	0,03	....	....	2,52	0,62	0,15	4,38	0,51	0,37	....	27,54 ● ▲
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	6,04
....	....	....	....	....	inc.	....	....	....	....	....	....	inc.
....	....	....	....	....	inc.	inc.	....	....	3,46	....	....	3,46
....	....	inc.	0,54	....	....	....	....	....	....	....	....	0,54
....	10,93 ● ▲	1,97	....	0,15	3,02	....	0,16	....	0,09	0,09	....	37,53 ● ▲
....	3,80	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	10,25
....	inc.	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.
....	....	....	....	....	....	0,11	3,00	0,52	5,90	0,45	....	10,50
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,70
....	0,59	1,20	0,12	....	....	....	....	....	....	0,14	0,45	2,50
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	2,60
....	....	....	....	0,15	1,63 ● ▲	0,03	inc.	....	inc.	....	....	2,10 ● ▲
....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,45	0,03	....	0,48
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,03
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	4,99	....	4,99
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	2,81
0,74	inc.	....	....	....	....	....	8,03 ● ▲	11,79 ● ▲	....	....	....	21,31 ● ▲
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,49
....	....	....	inc.	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.
....	....	inc.	0,16	0,87	....	....	....	....	....	....	....	1,03
....	inc.	0,37	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,37
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,67
....	....	....	....	....	....	....	1,71	....	....	....	....	1,71
inc.	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.
....	....	....	....	....	....	inc.	....	0,72	....	....	....	0,72
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,36
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,35
....	....	0,80	3,94	....	....	....	....	....	....	....	....	4,74
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,77	0,77
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.	inc.	9,91
0,12	0,43	0,14	inc.	inc.	inc.	inc.	inc.	inc.	1,96	0,37	....	32,44

Precipitazione –

Mesi e Giorni		0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h
Settembre	12	0,39	inc.	....	....	3,39	....	2,09	....	....	....	....	....
	13	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	14	inc.	0,28	1,41	1,12	0,15	0,77	0,24	0,18	0,84	inc.	inc.	inc.
	15	2,02	1,19	0,20	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	20	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.	....	....
	21	....	1,28	0,69	....	....	....	....	....	....	0,03	1,48	1,26
	22	0,65	1,51	0,43	....	0,15	0,26	0,12	0,19	....	0,26	0,13	0,15
	23	0,90	0,18	0,56	0,03	0,06	0,26	0,04	0,28	inc.	0,20	0,32	....
	24	....	0,06	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
Ottobre	4	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	5	....	2,12	....	....	....	....	....	....	inc.	....	....	....
	6	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	7	....	....	....	....	....	....	....	0,46	0,03	0,15	0,62	4,03
	8	0,55	2,65	inc	....	0,25	0,09	inc.	inc.	....	0.18	....	....
	10	....	0,76	4,91	1,84	2,89	2,06	0,03	....	....	....	....	....
	20	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	21	....	....	....	....	....	....	....	....	....	2,31	....	0,09
	22	....	....	....	....	....	....	....	....	0,17	0,77	0,31	0,09
	23	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.	0,16
	24	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	28	....	1,79	1,28	0,62	0,40	0,15	....	....	....	....	....	....
	29	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	30	1,15	2,55	0,17	inc.	0,09	0,09	0,24	0,08	2,80	....	....	....
	31	....	....	....	....	....	....	1,86	0,81	0,74	0,84	1,96	0,18
Novembre	2	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	5	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	6	....	....	....	....	0,06≡	0,03≡	....	....	....	....	....	....
	10	....	....	....	....	....	....	1,38	....	....	inc.	0,65	0,84
	12	....	....	1,29	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	14	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.	inc.	inc.
	15	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,16	0,49	3,71
	16	0,12	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	18	....	....	1,17	2,94	3,66	4,70	1,74	0,18	....	inc.	0,10	....
	19	....	....	0,06	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Valori orarî diurni

13h	14h	15h	16h	17h	18h	19h	20h	21h	22h	23h	24h	SOMMA
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	5,87
....	....	....	3,64	0,15	inc.	2,28	0,43	0,69	0,16	inc.	inc.	7,35
....	....	....	2,11	4,71	1,29	....	....	....	....	....	....	13,10
....	....	inc.	inc.	....	....	....	....	....	....	....	....	3,41
....	....	inc.	1,22	0,36	3,26	1,72	6,05	0,22	....	....	....	12,83
5,70	0,74	....	....	....	....	....	0,95	....	....	....	0,72	12,85
....	....	0,24	0,10	0,05	0,05	0,09	0,55	1,20	0,50	0,05	0,32	7,00
....	....	....	inc.	0,15	inc.	0,22	0,22	0,16	0,59	0,37	0,03	4,57
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,06
....	....	....	....	....	0,09	0,12	....	....	....	....	....	0,21
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	2,12
....	....	inc.	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.
4,18	3,42	3,88	0,28	0,49	0,53	0,71	0,49	0,65	0,49	0,22	0,31	20,94
....	inc.	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	3,72
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	12,49
....	....	inc.	0,24	....	....	....	....	....	....	....	....	0,24
4,43	4,68	6,44	2,16	....	....	....	....	....	....	....	....	20,11
0,30	0,64	0,06	0,30	....	....	....	....	....	....	....	....	2,64
0,48	0,49	0,98	0,09	....	....	....	....	....	....	....	....	2,20
....	....	....	....	inc.	0,37	1,14	inc.	....	....	....	....	1,51
....	inc.≡	....	....	0,08≡	0,06≡	0,12≡	0,11≡	0,03≡	....	....	....	4,64 ●≡
....	....	....	....	....	....	....	....	0,40	0,58	0,46	0,18	1,62
....	....	0,40	0,31	....	....	....	....	....	....	....	....	7,38
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	6,39
....	....	....	....	0,06	0,06	....	....	....	....	....	....	0,12
....	....	0,40	0,03	0.15	0,17	0,28	1,24	1,56	1,22	2,61	1,10	8,76
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,09≡
0,46	3,84	6,10	4,49	0,06	....	....	....	....	....	....	....	17,82
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	1,29
0,31	0,03	....	....	....	2,70	4,87	1.14	0,71	....	....	....	9,76
2,52	2,00	2,75	3,68	6,22	3,05	1,20	1,72	1,59	0,29	0,34	0,53	30,25
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,12
....	....	....	....	....	inc.	0,45	0,03	0,31●✳	0,90●✳	0,36✳	....	16,54 ●✳
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,06

Mesi e Giorni		0^h	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h
Novembre	21	....	....	....	....	....	....	....	....	p ✳°	p ✳°	p ✳°	....
	25	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	26	3,17 ✳	2,46 ✳	1,68 ✳	3,07 ✳	0,90 ✳	0,33 ✳	0,03 ✳	....	....	....	....	....
	29	....	....	0,13	....	....	0,25	0,31	0,37	0,49	1,90	0,82	....
	30	0,03 ≡	0,03 ≡	0,03 ≡	0,02 ≡	0,02 ≡	0,04 ≡	0,25	0,13	....	....	....	....
Dicembre	1	....	0,05	0,18	0,83	inc.	0,10	0,08	0,03	0,15	....	....	....
	2	0,20	0,69	0,26	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	5	....	....	....	....	0,06 ≡	0,09 ≡	0,09 ≡	....	....	....	....	....
	7	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	8	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	9	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,09	1,56	0,68
	10	0,13	0,03	0,58	0,06	....	....	....	....	....	....	....	....
	11	....	....	....	....	....	0,18	....	....	....	inc.	0,06	0,06
	12	....	....	....	0,20	0,05	0,05	0,10	....	....	....	....	....
	14	....	....	....	....	....	....	....	0,49	....	....	....	....
	15	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	17	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	18	....	....	0,85	....	....	....	....	0,05 ≡	0,05 ≡	....	....	....
	19	....	....	0,18	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	28	....	....	....	....	0,12	1,50 ● ✳	0,75 ✳	0,97 ● ✳	1,22 ● ✳	0,90	1,42	0,75
	29	0,43	0,62	0,32	0,40	0,44	0,60	0,50	0,43	0,47	0,08	....	....
	31	....	....	....	....	....	....	....	inc. ● gel.	....	....	....	....

[V]alori orarî diurni

13h	14h	15h	16h	17h	18h	19h	20h	21h	22h	23h	24h	SOMMA
...	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc. ✳°
...	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.	0,46 ● ✳	2,87 ✳	3,33 ● ✳
...	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	11,64 ✳
...	....	....	....	0,02 ≡	0,02 ≡	0,03 ≡	0,03 ≡	0,03 ≡	0,03 ≡	0,02 ≡	0,02 ≡	4,47 ● ≡
...	....	....	....	....	....	....	....	0,38	0,13 ● ≡	inc. ≡	inc. ≡	1,06 ● ≡
0,20	0,10	0,87	0,68	2,41	1,17	0,31	0,31	0,13	0,06	0,15	0.14	7,95
...	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	1,15
...	....	2,34	2,03	0,28	0,26	0,15	....	....	....	....	....	5,30 ● ≡
...	inc.	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.
...	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.	inc.	inc.
2,30	2,14	0,18	0,22	0,18	0,28	0,37	....	....	....	....	0,18	8,18
...	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,80
...	....	....	1,55	0,17	0,18	0,22	....	....	0,65	0,23	....	3,30
...	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,40
...	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,49
p.	....	....	p.	....	....	....	....	....	....	....	....	inc.
...	....	....	....	....	....	inc. ≡	inc. ≡	....	....	....	....	inc. ≡
...	....	0,17	0,16	....	....	....	....	inc.	0,12	....	....	1,40 ● ≡
...	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	0,18
1,87	1,20	1,11	0,85	1,04	1,07	1,10	1,60	1,44	3,17	2,31	1,31	25,70
...	inc.	0,12	0,18	0,03	0,13	0,03	inc.	....	....	....	....	4,78
...	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	inc. ● gel.

Precipitazione — Valori orarî pe

MESI e ANNO	0ʰ	1ʰ	2ʰ	3ʰ	4ʰ	5ʰ	6ʰ	7ʰ	8ʰ	9ʰ	10ʰ	11ʰ
Gennaio. . . .	2,72	2,78	2,31	2,72	1,51	1,61	1,30	1,44	3,83	3,74	3,34	3,7
Febbraio . . .	2,42	2,58	1,48	1,81	1,41	1,21	2,57	1,67	1,45	1,41	1,38	2,0
Marzo	. . . .	. . . .	0,49	0,95	0,43	0,20	0,92	0,99	0,63	0,85	0,48	1,0
Aprile	3,41	2,37	2,59	1,96	1,03	0,66	0,25	0,35	1,31	1,18	0,85	0,3
Maggio	2,28	1,08	1,08	0,75	1,40	0,49	1,00	0,71	3,21	0,48	0,53	2,4
Giugno	0,31	1,55	2,33	5,22	5,53	3,09	4,61	4,65	inc.	13,67	3,39	p
Luglio.	1,30	1,41	. . . .	0,21	. . . .	. . . .	. . . .	1,19	1,62	inc.	inc.	inc
Agosto.	. . . .	. . . .	inc.	1,02	0,14	. . . .	. . . .	0,36	. . . .	. . . .	. . . .	0,7
Settembre . .	11,39	9,85	5,96	3,58	4,34	6,78	5,79	4,91	5,70	2,85	2,75	1,5
Ottobre	1,70	9,87	6,36	2,46	3,63	2,39	2,13	1,35	3,74	4,25	2,89	4,5
Novembre . .	3,32	2,48	4,36	6,03	4,65	5,35	3,71	0,68	0,49	2,06	2,06	4,5
Dicembre. . .	0,76	1,39	2,37	1,49	0,67	2,52	1,52	1,97	1,89	1,07	3,04	1,4
ANNO	29,61	35,36	29,33	28,20	24,74	29,30	23,80	20,27	23,87	31,56	20,71	22,5

ogni mese e per l'intero anno 1910.

13^h	14^h	15^h	16^h	17^h	18^h	19^h	20^h	21^h	22^h	23^h	24^h	SOMMA
4,53	2,86	2,84	1,96	1,69	2,96	5,32	2,24	5,58	4,07	3,97	3,65	72,76
3,82	6,80	2,61	2,79	3,30	0,71	0,80	2,42	1,58	0,32	0,78	1,01	48,36
0,71	0,23	0,11	0,31	inc.	0,33	1,20	1,19	0,69	8,53	5,26	1,89	27,43
3,14	2,99	3,43	3,26	2,81	3,74	4,18	2,74	1,47	1,20	0,62	0,12	46,05
2,80	3,48	3,25	0,27	1,13	0,43	6,77	3,54	6,43	5,52	3,49	2,72	55,26
....	19,17	2,00	0,54	0,15	5,54	0,73	3,31	4,90	9,96	0,91	....	96,56
....	0,59	1,20	0,12	0,15	1,63	0,03	inc.	....	0,45	5,16	0,45	15,51
0.74	inc.	0,37	0,16	0,37	....	inc.	9,74	12,51	....	....	....	26,66
5,82	1,17	1,18	11,01	5,42	4,60	4,31	8,20	2,27	3,21	0,79	1,84	115,25
9,39	9,23	11,76	3,38	0,57	1,05	2,09	0,60	1,08	1,07	0,63	0,49	86,71
3,29	5,87	9,25	8,20	6,51	6,01	6,82	4,16	4,57	2,57	3,79	4,53	105,31
4,37	3,44	4,79	5,67	4,11	3,09	2,18	1,91	1,57	4,00	2,69	1,63	59,63
38,61	55,83	42,79	37,67	26,71	30,09	34,43	40,05	42,65	40,90	28,14	18,33	755,49

Precipitazione — Valori decadici, mensili ed annuo e loro raffronto colle medie (1830-1910)

DECADI		Precipitazione 1910 (P)	Somme decadiche 1830-1910	Medie decadiche 1830-1910 (M)	P — M	MESI	Precipitazione 1910 (P′)	Somme mensili 1830-1910	Medie mensili 1830-1910 (M′)	P′ — M′
Gennaio . . .	1.ª	0,37	1226,13	15,14	— 14,77					
	2.ª	8,29	1318,51	16,27	— 7,98	Gennaio . . .	**72,76**	3842,78	**47,44**	+ 25,32
	3.ª	64,10	1298,14	16,03	+ 48,07					
Febbraio. . .	1.ª	40,53	1159,74	14,32	+ 26,21					
	2.ª	2,84	1298,05	16,03	— 13,19	Febbraio . . .	**48,36**	3680,44	**45,44**	+ 2,92
	3.ª	4,99	1222,65	15,09	— 10,10					
Marzo	1.ª	1,43	1327,16	16,38	— 14,95					
	2.ª	6,63	1077,32	13,30	— 6,67	Marzo	**27,43**	4209,71	**51,97**	— 24,54
	3.ª	19,37	1805,23	22,29	— 2,92					
Aprile	1.ª	43,48	1696,39	20,94	+ 22,54					
	2.ª	1,10	1481,34	18,29	— 17,19	Aprile.	**46,05**	4943,89	**61,03**	— 14,98
	3.ª	1,47	1766,16	21,80	— 20,33					
Maggio. . . .	1.ª	28,96	2041,30	25,20	+ 3,76					
	2.ª	11,70	1813,21	22,39	— 10,69	Maggio	**55,26**	5623,57	**69,43**	— 14,17
	3.ª	14,60	1769,06	21,84	— 7,24					
Giugno. . . .	1.ª	37,04	1913,64	23,63	+ 13,41					
	2.ª	59,52	1629,42	20,12	+ 39,40	Giugno	**96,56**	4895,61	**60,44**	+ 36,12
	3.ª	0,00	1352,55	16,70	— 16,70					
Luglio	1.ª	7,20	1289,68	15,92	— 8,72					
	2.ª	0,51	901,98	11,14	— 10,63	Luglio	**15,51**	3504,21	**43,26**	— 27,75
	3.ª	7,80	1312,55	16,20	— 8,40					
Agosto	1.ª	23,20	910,82	11,24	+ 11,96					
	2.ª	2,38	1181,89	14,59	— 12,21	Agosto	**26,66**	3724,90	**44,99**	— 19,33
	3.ª	1,08	1632,19	20,15	— 19,07					
Settembre . .	1.ª	15,77	1345,39	16,61	— 0,84					
	2.ª	75,00	2033,30	25,10	+ 49,90	Settembre . .	**115,25**	5379,38	**66,41**	+ 48,84
	3.ª	24,48	2000,69	24,70	— 0,22					
Ottobre . . .	1.ª	39,48	1938,96	23,94	+ 15,54					
	2.ª	0,24	2157,03	26,63	— 26,39	Ottobre	**86,71**	6999,03	**86,41**	+ 0,30
	3.ª	46,99	2903,04	35,84	+ 11,15					
Novembre . .	1.ª	26,79	2265,66	27,97	— 1,18					
	2.ª	58,02	2064,37	25,49	+ 32,53	Novembre . .	**105,31**	5975,99	**73,78**	+ 31,53
	3.ª	20,50	1645,96	20,32	+ 0,18					
Dicembre . .	1.ª	23,38	2067,39	25,52	— 2,14					
	2.ª	5,77	1381,78	17,06	— 11,29	Dicembre . .	**59,63**	4895,55	**60,44**	— 0,81
	3.ª	30,48	1446,33	17,86	+ 12,62					
						. . . .	**755,49**	57675,06	**712,04**	+ 43,45

Precipitazione nell' anno: mm. 755,49
Media annuale della precipitazione nel periodo 1830-1910: mm. 712,04.
Eccedenza sulla media: mm. 43,45.

Neve caduta nell' anno 1910

MESI	Giorni	ANNOTAZIONI	Altezza della neve in cm.
Gennaio .	13	Alle 11h46m neve a rari e grossi fiocchi mista a pioggia; alle 11h58m la pioggia si cambiò in neve, che cadde forte a piccoli fiocchi fin dopo le 13h, indi si mutò nuovamente in pioggia minuta. L'altezza della neve fu immisurabile, poichè si sciolse appena caduta.	immis.
»	21	Alle 21h20m cominciò a cadere neve minuta mista a pioggia; alle 22h45m la pioggia si trasformò in neve che cadde spessa e minuta. Verso le 24h la neve cadeva forte, a grossi fiocchi e continuò.	
»	22	La neve continuò a cadere, durante la notte, forte e a grossi fiocchi; poi minuta verso le 7h, e continuò ora a fiocchi e rara, ora minuta, ora forte e a piccoli fiocchi fino alle 14h30m. Alle 15h7m ripresero a cadere rari e minuti fruscoli di neve per breve durata, poi si mutarono in pioggia minutissima. Alle 18h15m la pioggia si mutò nuovamente in neve spessa, a piccoli fiocchi e continuò fino alle 24h.	5,0
»	23	Dalle 0h alle 4h continuò la neve — Molta della neve caduta nei giorni 21, 22 e 23 si fuse appena caduta. Alle 8h del giorno 23 la neve rimasta misurava cm. 5.	
»	24	Dalle 22h alle 23h45m neve minuta.	
»	25	Neve minuta dalle 2h alle 6h. Alle 7h55m riprende spessa e minuta e continua. Alle 8h47m cade forte, a fiocchi, per ritornare poi spessa e minuta alle 9h15m. La neve cessò alle 10h. L'altezza raggiunta in questi due giorni fu misurata in cm. 4.	4,0
»	26	Alle 19h20m cominciò a cadere neve a rari fruscoli. Alle 19h35m la neve cadeva spessa, a piccoli fiocchi, e proseguì fino alle 23h15m.	
»	27	Alle 7h55m incominciò a cadere neve minuta, spessa, con piccoli fiocchetti. Alle 9h divenne minutissima, in forma di piccoli aghi, e cessò alle 9h30m. La neve caduta nei due giorni 26 e 27 raggiunse l'altezza di cm. 2.5.	2,5
Marzo . . .	31	Alle 13h30m fruscoli di neve misti a pioggia; alle 14h la pioggia si è mutata in neve minuta che continua fino alle 14h45m, ora in cui ritorna a mutarsi in pioggia minuta. Alle 17h la pioggia si cambia nuovamente in neve che prosegue spessa, forte, minuta, con piccoli fiocchi fino alle 24h.	3,8
Aprile . . .	1	Continua la neve, che alle 0h15m si cambia in pioggia. Alle 6h30m la neve caduta da ieri a oggi misura sulla piattoforma dell'Osservatorio cm. 3.8.	

MESI	Giorni	ANNOTAZIONI	Altezza della neve in cm.
Novembre	18	Dalle 20h45m alle 21h30m pioggia mista a neve. Alle 21h30m la pioggia si cambia in neve, che seguita a cadere fino alle 22h15m, fondendosi appena caduta.	immis.
»	21	Fruscoli di neve dalle 8h40m alle 9h10m e dalle 9h35m alle 10h15m.	immis.
»	25	Alle 21h45m incomincia a piovere; alle 22h15m la pioggia si cambia in neve spessa, minuta e a piccoli fiocchi fino alle 24h.	12,5
»	26	La neve seguita a cadere fino alle 6h15m. Sulla piattoforma dell' Osservatorio misura cm. 12.5.	
Dicembre.	28	Alle ore 4 incomincia a piovere; alle 5h30m la pioggia si mutò in neve che cadde minuta dapprima, poi forte a larghe falde. Ritornò in seguito minuta e spessa fino alle 7h40m. Dalle 7h40m fino alle 8h15m si alternano la pioggia e la neve minuta Indi prosegue la pioggia fino alle 24h. La neve si sciolse in parte appena caduta sul suolo, la rimanente fu sciolta in seguito dalla pioggia successiva.	immis.

In tutto l'anno si ebbero giorni 15 con neve.
La neve misurata in tutto l'anno fu di cm. 27.8

Direzione predominante diurna del vento

1910	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
1.......	W	W	W	W	E	E	E	W	W	W	W	W
2.......	W	W	W	W	W	W	NE	W	W	W	W	W
3.......	W	E	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
4......	W	W	N	W	W	W	SW	W	SW	N	N	N
5.......	W e N	W	E	E	W	NE	W	W	NE	NE e W	E	E
6.......	E	W	W	W	E	W	W	SW	E	E	W	W
7.......	W	W	W	W	SW	W	W	W	E	NE	S	W
8.......	W	W	W	W	SW	W	E	NE	E	W	W	E
9.......	W	W	W	E	SW	E	W	SW	E	W	W	W
10.......	W e N	W	E	W	W	W e E	W	W	W	N	SW	W
11.......	N	NE	W	E	W	W e N	W	NE	W	W e E	W	E
12.......	N	SW	SW	E	E	E	W	W	W	E	W	W
13.......	W	NW	E e NE	E	W	NE	W	SW	W	E	W	SW
14.......	W	W	E	NE	W	E	N	W	W	W	W	E
15.......	W	W	E	E	E	W	SW	E	NE	E	W	W
16.......	E	W	W	W	W e E	E	E	E	W	E	W	W
17.......	W	W	W	W	W	SW	E	NE	W	E	W	W
18.......	W e NE	W	W	W	E	NE	NW	NE	E	E	W	W
19.......	W	W	E	W	E	E	W	W	E	W	W	W
20.......	E	W	NE	W	E	W e SW	W	W e E	W	NW	W	W
21.......	E	W	NE	W	W	E	SW e NE	E	W	E	W	W
22.......	W	W	E	E	E	E	W	W	W	W	W	W
23.......	W	W	W	E	E	SW	W	W	W	W	W	W
24.......	W	NW	E	E	NE	NE	W	E	NE	W	SW	W
25.......	W	NW	E	NE	E	W	N	E	W	W	W	W
26.......	SW	W e E	E	E	W	SW	W	N	E e SW	W	W	W
27.......	NW	W	E	W	W e SW	W	W	W	W e E	E	W	W
28.......	E	W	SW	E	W	NE	E	NE	SW	N	W	W
29.......	W	....	W	E	E	W	SW	E	W	N	W	W
30.......	W	....	E	SW	E	W	W	E	W	W	W	W
31.......	W	....	NE	....	W e E	....	W e E	W e NW	....	W	....	W

NB. — Questi dati sono desunti dallo spoglio delle carte dell'anemoscopio registratore, il quale dà una segnalazione ad ogni 10 minuti.

Tabella riassuntiva delle meteore per l'anno 1910

MESI	GIORNI CON														
	●	✳	▲	∨	⌴	≡ int.	≡ c.	☈	T	⥊	<	⊕ ; ◡	⌙ш	⌙ш	Tramonti rossi
Gennaio . .	8	8	—	11	23	11	22	—	—	1	—	—	5	—	4
Febbraio. .	14	—	—	2	2	2	26	—	—	—	—	1 ; 1	8	1	2
Marzo. . . .	10	1	—	2	—	4	19	—	—	—	—	—	10	6	—
Aprile . . .	15	1	—	—	—	4	14	2	1	1	1	3 ; 2	15	4	2
Maggio. . .	12	—	—	—	—	2	2	1	3	3	3	1 ; —	10	3	1
Giugno . . .	12	—	2	—	—	—	—	7	4	3	7	2 ; 1	12	5	—
Luglio . . .	8	—	1	—	—	1	4	3	3	1	4	—	12	4	—
Agosto . . .	12	—	1	—	—	2	3	6	2	1	6	—	7	2	—
Settembre .	14	—	—	—	—	1	4	1	1	—	1	1 ; —	9	—	1
Ottobre. . .	15	—	—	—	—	7	9	1	—	2	4	—	2	1	2
Novembre .	12	4	—	8	10	5	20	—	—	2	2	3 ; —	9	4	8
Dicembre .	16	1	—	6	8	14	20	—	—	—	—	1 ; —	8	3	2
Anno	148	15	4	29	43	53	143	21	14	14	28	12 ; 4	107	33	22

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

dell' anno 1910

Pressione barometrica.

La pressione barometrica media è stata di mm. 754,5. Superarono questo valore le medie mensili di Gennaio, Marzo, Agosto, Settembre, Ottobre e Dicembre; ne furono inferiori le medie mensili di Aprile, Maggio, Giugno, Luglio e Novembre; la uguagliò quella del Febbraio. La minima media mensile si è verificata in Maggio (751,5); la massima in Ottobre (758,5). Il minimo assoluto della pressione atmosferica si ebbe il giorno 25 Gennaio (732,0); ed il massimo assoluto il 10 Gennaio (771,0). L'escursione totale è stata di mm. 39.0.

Temperatura.

Il valore medio della temperatura è stato di 12°,85 C; inferiore quindi di 0°,6 al corrispondente valore normale. Da un massimo di 31°,6 verificatosi nei giorni 19 Luglio, 21 e 22 Agosto, la temperatura discese ad un minimo di — 5°,2 il 23 Novembre: con una escursione totale di 36°,8.

Nell' anno si ebbero 30 giorni con temperatura minima negativa, così distribuiti: 17 in Gennaio, 1 in Febbraio, 6 in Novembre, 6 in Dicembre. Si ebbero poi 11 giorni con temperatura media negativa: 7 in Gennaio, 1 in Novembre, 3 in Dicembre. Il Gennaio ebbe pure la minima temperatura media: 1°,6; e l' Agosto ebbe la massima: 23°,1.

La media invernale fu di 1°,5 superiore alla normale; inferiori invece furono le medie di tutte le altre stagioni (cfr. pag. 38).

Tensione del vapor d'acqua.

La tensione media del vapor d' acqua è stata di mm. 7,9; con un massimo di 16,9 il 3 e il 29 Agosto, ed un minimo di 1,7 il 24 Gennaio. La minima media mensile (4,4) si ebbe in Gennaio; la massima media (12,1) in Agosto.

12

Umidità relativa.

L'umidità relativa media dell'anno è stata di centesimi 65,5; la media mensile massima fu di 84 in Dicembre; la minima di 49 in Luglio. Il massimo valore verificatosi in tutto l'anno fu di 98 centesimi nei giorni: 9 Gennaio, 22 maggio, 7, 10 e 30 Ottobre. Il minimo accadde invece il 9 di Maggio e fu di 16 centesimi, con cielo coperto e vento di W seguente a vento forte di SW.

Direzione e velocità del vento.

S'intende per vento *dominante* nella giornata quello che ha spirato per un maggior numero di ore.

Nel seguente specchietto, desunto dallo spoglio delle carte dell'anemoscopio registratore, è indicato per ciascun vento il numero dei giorni di predominanza in ogni singola stagione, e il numero totale dei giorni nell'anno. [È da notare però che talvolta in uno stesso giorno predominarono due venti, avendo spirato ciaschedun per un ugual numero d'ore].

STAGIONI	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Inverno.	5	3	11	—	—	3	69	3
Primavera	1	7	38	—	—	7	43	—
Estate.	4	12	23	—	—	11	47	2
Autunno	5	5	19	—	2	4	60	1
ANNO	15	27	91	—	2	25	219	6

Come si vede, il vento ch'ebbe la predominanza massima nell'anno fu l'W (219 giorni), il S ebbe il minimo di predominanza con soli 2 giorni in tutto l'anno; in nessun giorno si notò predominanza di SE. L'W ha la predominanza massima in inverno, la minima in primavera, e raggiunge quasi il valore invernale nell'autunno. Ha decorso pressochè parallelo all'W il N; ha invece svolgimento inverso l'E, che ha il minimo nell'inverno e il massimo in primavera (come si verificò nello scorso anno); come pure il NE e il SW hanno il minimo in inverno, ma il massimo in estate.

La velocità media annuale del vento fu di Km. 8,7. La media mensile maggiore si ebbe in Aprile, la minore in Ottobre. Vi furono nell'anno 105

giorni con vento forte, 34 con vento fortissimo. La velocità oraria massima assoluta fu di Km. 50 dalle 10^h alle 11^h del giorno 31 Marzo, con vento di NE; velocità cui segue da vicino quella di Km. 49 raggiunta dalle 19^h alle 20^h del giorno 2 Novembre con vento di NW.

In tutto l'anno poi l'anemometro restò fermo per calma assoluta un numero complessivo di 212 ore distribuite in 90 giorni, e precisamente nel modo seguente:

in Gennaio	: 66 ore	di calma	ripartite	in	22	giorni
» Febbraio	: 59 »	»	»		17	»
» Marzo	: 1 ora	»	»		1	giorno
» Aprile	: 2 ore	»	»		1	»
» Maggio	: 5 »	»	»		5	giorni
» Giugno	: 3 »	»	»		3	»
» Settembre	: 12 »	»	»		9	»
» Ottobre	: 30 »	»	»		17	»
» Novembre	: 8 »	»	»		4	»
» Dicembre	: 26 »	»	»		11	»

Come appare da questo spoglio, non ebbero affatto ore di calma i mesi di Luglio e Agosto. Il giorno che ebbe per il maggior numero di ore di calma fu il 9 Gennaio, che ne ebbe 12, delle quali 8 consecutive. Analizzando da quali direzioni prevalentemente spirarono i venti forti e fortissimi nei singoli mesi e in tutto l'anno, risulta che predominarono i venti forti di W (41 giorni) e E (40 giorni), e i venti fortissimi di E e NE (10 giorni ciascuno). I venti forti e fortissimi di E e NE ebbero la prevalenza massima nella primavera, e precisamente in Marzo pel NE e in Aprile per l'E. I venti forti e fortissimi di W prevalsero invece in estate e in Novembre.

Nebulosità.

Si è convenuto di chiamare *sereni* quei giorni nei quali la somma delle nebulosità, nelle tre osservazioni principali, è compresa fra 0 e 3 decimi; *misti* quelli in cui detta somma è compresa fra 4 e 26 decimi; *coperti* quelli in cui è compresa fra 27 e 30 decimi. In tutto l'anno si ebbero 42 giorni sereni, 213 misti, 110 coperti. Ebbe il maggior numero di giorni sereni l'Agosto (10 giorni), mentre non ne ebbero alcuno i mesi di Febbraio, Aprile e Maggio. Il maggior numero dei giorni misti (27) si riscontrò in Giugno; a questo mese si approssima il Luglio con 26 giorni. Si ebbe in Dicembre il maggior numero di giorni coperti (18).

Evaporazione.

L'evaporazione in tutto l'anno è stata di mm. 634,89, che corrisponde in media a mm. 1,74 al giorno. La maggiore quantità d'acqua evaporò in

Luglio (mm. 120,80), la minore in Dicembre (mm. 11,13). L'evaporazione per ogni singola stagione fu di mm. 41,87 nell'inverno; 161,08 nella primavera; 321,97 in estate; 109,97 in autunno.

Precipitazioni acquee.

In tutto l'anno si ebbero 158 giorni di precipitazioni, dei quali 20 di precipitazione incalcolabile, 128 di sola pioggia, 7 di sola neve, 7 di pioggia e neve, 1 di pioggia gelata, 6 di sola nebbia condensata (in quantità apprezzabile), 5 di pioggia e nebbia condensata, 4 di pioggia e grandine. L'altezza totale dell'acqua, proveniente dalle varie precipitazioni, fu di mm. 755,49, superiore di mm. 43,45 alla media del periodo 1830-1910 (compresi i due anni estremi). I mesi più ricchi di giorni di precipitazione furono Gennaio e Dicembre (17 giorni per ciascuno) il più povero fu Luglio (7 giorni). La quantità maggiore di acqua (mm. 115,25) si ebbe in Settembre; la minore (mm. 15,51) in Luglio. La più abbondante pioggia dell'anno fu quella del 13 Giugno, a riprese dalle 2^h alle 23^h, misurata in mm. 37,53. La quantità di neve asciutta misurata è stata di cm. 27,8.

OSSERVAZIONI SISMICHE

L' Osservatorio non ha ancora un vero e proprio reparto per lo studio dei terremoti: è provvisto soltanto di apparecchi sismoscopici, e precisamente di:

un Avvisatore sismico a verghetta del Cecchi,

un Sismoscopio a dischetto del Brassart,

un Sismoscopio elettrico a doppio effetto Agamennone per le scosse ondulatorie,

un Sismoscopio elettrico a doppio effetto Agamennone per le scosse sussultorie.

Le indicazioni quì riportate sono appunto desunte da questi apparecchi.

Si ebbero segnalazioni di scosse di terremoto alle seguenti date:

23 Gennaio — 1^h1^m — scossa ondulatoria di 1.° grado.
23 Marzo — 0^h25^m — scossa ondulatoria di 1.° grado.
2 Maggio — 12^h25^m — scossa ondulatoria di 1.° grado.

RISULTATI ELIOFANOMETRICI

OTTENUTI

AL R. OSSERVATORIO GEOFISICO DI MODENA

nell' anno 1910

I dati eliofanometrici vengono forniti da un Eliofanometro di Campbell e Stokes. Le osservazioni con questo strumento cominciarono regolarmente col 1.° Gennaio 1893 facendo uso dei soliti cartoncini a combustione: ma dal Dicembre 1894 i cartoncini eliofanometrici vengono spalmati di un leggero strato di paraffina, per renderli più sensibili, e cioè per raccogliere indicazioni che altrimenti sfuggirebbero, specialmente al nascere e al tramontare del Sole.

Nelle tavole che seguono sono riportati i valori diurni dei rapporti fra la durata dello splendore effettivo del sole e la durata del Sole sull' orizzonte, i valori decadici e mensili di questi rapporti, ed il riassunto annuo.

La durata dello splendore effettivo del Sole è indicata con A, la durata del Sole sull' orizzonte è indicata con B.

Risultati Eliofanometrici

A = Durata dello splendore del Sole in ore

GIORNI	Gennaio			Febbraio			Marzo			Aprile			Maggio			Giugno		
	A	B	A/B	A	B	A/B	A	B	A/B	A	B	A/B	A	B	A/B	A	B	A/B
1	0.3	8.8	0.03	3.6	9.8	0.37	5.9	11.1	0.53	—	12.8	0.00	4.4	14.2	0.31	12.3	15.2	0.81
2	8.0	8.8	0.91	8.1	9.8	0.83	—	11.2	0.00	—	12.8	0.00	6.7	14.2	0.47	13.0	15.2	0.86
3	6.9	8.8	0.78	1.4	9.8	0.14	2.0	11.2	0.18	—	12.8	0.00	12.2	14.2	0.86	12.1	15.2	0.80
4	7.6	8.8	0.86	0.6	9.9	0.06	8.9	11.3	0.79	4.9	12.8	0.38	11.2	14.2	0.79	13.6	15.3	0.89
5	8.3	8.8	0.94	5.5	10.0	0.55	10.5	11.4	0.92	6.2	13.0	0.48	3.0	14.4	0.21	—	15.3	0.00
6	5.6	8.8	0.64	8.9	10.0	0.89	11.0	11.4	0.96	4.2	13.0	0.32	11.2	14.4	0.78	10.4	15.4	0.68
7	—	8.8	0.00	7.8	10.0	0.78	10.8	11.4	0.95	10.9	13.0	0.84	10.6	14.4	0.74	14.9	15.4	0.97
8	—	9.0	0.00	0.6	10.0	0.06	11.0	11.5	0.96	8.9	13.0	0.68	4.6	14.4	0.32	14.5	15.4	0.94
9	—	9.0	0.00	—	10.1	0.00	10.5	11.6	0.91	—	13.2	0.00	6.8	14.5	0.47	12.6	15.4	0.82
10	2.1	9.0	0.23	0.3	10.2	0.03	10.5	11.6	0.91	7.7	13.2	0.58	1.5	14.6	0.10	7.7	15.4	0.50
11	—	9.0	0.00	8.4	10.2	0.82	7.2	11.6	0.62	12.0	13.2	0.91	—	14.6	0.00	9.3	15.4	0.60
12	—	9.0	0.00	7.2	10.2	0.71	6.0	11.8	0.51	10.9	13.2	0.83	11.5	14.6	0.79	8.8	15.4	0.57
13	—	9.0	0.00	—	10.3	0.00	4.0	11.8	0.34	7.7	13.3	0.58	14.3	14.6	0.98	1.9	15.4	0.12
14	8.6	9.0	0.95	2.5	10.4	0.24	—	11.8	0.00	2.6	13.4	0.19	6.9	14.7	0.47	4.0	15.4	0.26
15	5.9	9.0	0.65	2.2	10.4	0.21	—	11.8	0.00	7.9	13.4	0.59	9.0	14.7	0.61	7.5	15.4	0.49
16	8.4	9.1	0.92	—	10.4	0.00	8.4	11.9	0.71	7.9	13.4	0.59	5.3	14.8	0.36	14.8	15.4	0.96
17	0.7	9.2	0.08	9.0	10.4	0.86	11.0	12.0	0.92	3.8	13.4	0.28	4.9	14.8	0.33	14.0	15.4	0.91
18	6.1	9.2	0.66	5.1	10.5	0.48	4.0	12.0	0.33	6.7	13.6	0.49	11.1	14.8	0.75	9.2	15.4	0.60
19	6.5	9.2	0.71	—	10.7	0.00	1.4	12.0	0.12	11.2	13.6	0.82	10.7	14.9	0.72	12.5	15.4	0.81
20	6.7	9.2	0.73	—	10.7	0.00	2.4	12.0	0.20	8.6	13.6	0.63	9.4	14.9	0.63	13.9	15.4	0.90
21	—	9.3	0.00	4.0	10.7	0.37	0.4	12.2	0.03	12.3	13.6	0.90	12.1	15.0	0.81	12.4	15.4	0.81
22	—	9.4	0.00	5.0	10.8	0.46	11.1	12.2	0.91	10.2	13.7	0.74	4.7	15.0	0.31	13.9	15.4	0.90
23	5.1	9.4	0.54	4.9	10.8	0.45	11.1	12.2	0.91	11.6	13.8	0.84	6.1	15.0	0.41	10.2	15.4	0.66
24	6.2	9.4	0.66	0.7	10.8	0.06	11.2	12.3	0.91	2.2	13.8	0.16	1.9	15.0	0.13	10.3	15.4	0.67
25	3.4	9.4	0.36	0.5	10.8	0.05	10.9	12.4	0.88	7.7	13.8	0.56	10.3	15.0	0.69	13.3	15.4	0.86
26	6.7	9.5	0.70	6.7	10.9	0.61	11.1	12.4	0.90	7.8	14.0	0.56	8.1	15.0	0.54	9.6	15.4	0.62
27	—	9.5	0.00	6.0	11.0	0.54	7.8	12.4	0.63	7.8	14.0	0.56	7.4	15.2	0.49	14.5	15.4	0.94
28	8.0	9.6	0.83	0.9	11.0	0.08	7.7	12.6	0.61	10.4	14.0	0.74	11.1	15.2	0.73	14.5	15.4	0.94
29	—	9.6	0.00	...	...	...	11.6	12.6	0.92	13.4	14.0	0.96	11.5	15.2	0.76	15.2	15.4	0.99
30	—	9.6	0.00	...	...	...	8.0	12.6	0.63	12.6	14.1	0.89	11.3	15.2	0.74	13.9	15.4	0.90
31	—	9.7	0.00	...	...	...	—	12.6	0.00	...	...	...	14.2	15.2	0.93	...	...	...

diurni per l'anno 1910

B = Durata del Sole sull'orizzonte in ore

GIORNI	Luglio			Agosto			Settembre			Ottobre			Novembre			Dicembre		
	A	B	A/B	A	B	A/B	A	B	A/B	A	B	A/B	A	B	A/B	A	B	A/B
1	14.6	15.4	0.95	13.6	14.6	0.93	7.0	13.2	0.53	10.6	11.6	0.91	7.9	10.2	0.77	—	9.0	0.00
2	13.6	15.4	0.88	14.2	14.5	0.98	12.4	13.1	0.95	9.6	11.6	0.83	7.7	10.0	0.77	—	9.0	0.00
3	10.4	15.4	0.68	6.8	14.4	0.47	10.5	13.0	0.81	9.0	11.6	0.78	9.7	10.0	0.97	4.7	9.0	0.52
4	3.6	15.4	0.23	12.1	14.4	0.84	8.5	13.0	0.65	1.6	11.4	0.14	9.7	10.0	0.97	—	9.0	0.00
5	11.2	15.3	0.73	13.0	14.4	0.90	7.6	12.9	0.59	5.0	11.4	0.44	—	10.0	0.00	—	9.0	0.00
6	10.3	15.3	0.67	14.0	14.4	0.97	4.0	12.8	0.31	8.4	11.4	0.74	3.4	9.8	0.35	—	8.9	0.00
7	10.8	15.2	0.71	12.7	14.3	0.89	10.5	12.8	0.82	—	11.4	0.00	9.4	9.8	0.96	0.9	8.8	0.10
8	11.4	15.2	0.75	13.9	14.2	0.98	11.7	12.8	0.91	1.0	11.3	0.09	7.9	9.8	0.81	4.7	8.8	0.53
9	15.0	15.2	0.99	1.9	14.2	0.13	0.9	12.8	0.07	7.0	11.2	0.63	5.8	9.8	0.59	—	8.8	0.00
10	14.4	15.2	0.95	7.1	14.2	0.50	—	12.7	0.00	8.4	11.2	0.75	—	9.7	0.00	—	8.8	0.00
11	11.1	15.2	0.73	7.9	14.2	0.56	—	12.6	0.00	9.4	11.2	0.84	7.6	9.7	0.78	2.8	8.8	0.32
12	12.7	15.2	0.84	10.5	14.1	0.74	1.7	12.6	0.13	—	11.1	0.00	9.4	9.6	0.98	—	8.8	0.00
13	13.5	15.2	0.89	13.7	14.0	0.98	5.2	12.6	0.41	1.0	11.0	0.09	6.1	9.6	0.64	0.2	8.8	0.02
14	13.7	15.2	0.90	13.7	14.0	0.98	0.9	12.4	0.07	2.8	11.0	0.25	—	9.6	0.00	—	8.8	0.00
15	13.3	15.1	0.88	9.4	14.0	0.67	2.3	12.4	0.19	2.3	11.0	0.21	—	9.5	0.00	0.2	8.8	0.02
16	9.2	15.0	0.61	9.7	13.9	0.70	1.5	12.4	0.12	10.6	10.8	0.98	8.9	9.4	0.95	6.6	8.8	0.75
17	14.0	15.0	0.93	8.5	13.8	0.62	11.0	12.4	0.89	10.3	10.8	0.95	7.7	9.4	0.81	—	8.8	0.00
18	11.5	15.0	0.77	13.2	13.8	0.96	11.3	12.3	0.92	9.8	10.8	0.91	—	9.4	0.00	2.8	8.8	0.32
19	14.5	15.0	0.97	13.2	13.8	0.96	10.2	12.2	0.84	10.2	10.8	0.94	8.7	9.4	0.93	6.1	8.8	0.69
20	14.1	15.0	0.94	13.4	13.7	0.98	4.7	12.2	0.39	3.4	10.6	0.32	9.0	9.4	0.96	8.3	8.8	0.94
21	14.5	15.0	0.97	12.9	13.6	0.95	0.8	12.2	0.07	0.8	10.6	0.08	0.8	9.3	0.09	8.5	8.8	0.97
22	13.9	14.9	0.93	11.8	13.6	0.87	—	12.1	0.00	—	10.6	0.00	8.8	9.3	0.95	—	8.8	0.00
23	13.6	14.9	0.91	8.3	13.6	0.61	—	12.0	0.00	—	10.6	0.00	7.9	9.2	0.86	8.3	8.8	0.94
24	14.0	14.8	0.95	13.3	13.6	0.98	2.8	12.0	0.23	—	10.4	0.00	8.9	9.2	0.97	7.2	8.8	0.82
25	12.4	14.8	0.84	13.4	13.4	1.00	10.4	12.0	0.87	—	10.4	0.00	—	9.2	0.00	—	8.8	0.00
26	12.9	14.8	0.87	12.3	13.4	0.92	9.1	11.8	0.77	7.0	10.4	0.67	4.2	9.2	0.46	2.2	8.8	0.25
27	8.0	14.7	0.54	10.6	13.4	0.79	10.5	11.8	0.89	7.2	10.4	0.69	—	9.1	0.00	—	8.8	0.00
28	12.9	14.7	0.88	6.8	13.4	0.51	11.0	11.8	0.93	—	10.2	0.00	—	9.1	0.00	—	8.8	0.00
29	14.5	14.6	0.99	8.3	13.3	0.62	10.6	11.7	0.91	—	10.2	0.00	—	9.0	0.00	—	8.8	0.00
30	14.0	14.6	0.96	8.7	13.2	0.66	10.3	11.6	0.89	—	10.2	0.00	—	9.0	0.00	7.0	8.8	0.80
31	14.3	14.6	0.98	10.0	13.2	0.76	...	...	...	3.4	10.2	0.33	...	...	...	8.3	8.8	0.94

Risultati Eliofanometrici decadici e mensili.

1910	I.ª DECADE			II.ª DECADE			III.ª DECADE			MESE		
	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$
Gennaio . .	38.8	88.6	0.439	42.9	90.9	0.471	29.4	104.4	0.281	111.1	283.9	0.391
Febbraio . .	36.8	99.6	0.369	34.4	104.2	0.330	28.7	86.8	0.330	99.9	290.6	0.343
Marzo	81.1	113.7	0.713	44.4	118.7	0.374	90.9	136.5	0.666	216.4	368.9	0.587
Aprile. . . .	42.8	129.6	0.330	79.3	134.1	0.591	96.0	138.8	0.692	218.1	402.5	0.542
Maggio . . .	72.2	143.5	0.503	83.1	147.4	0.564	98.7	166.0	0.595	254.0	456.9	0.556
Giugno . . .	111.1	153.2	0.725	95.9	154.0	0.623	127.8	154.0	0.830	334.8	461.2	0.726
Luglio . . .	115.3	153.0	0.754	127.6	150.9	0.846	145.0	162.4	0.893	387.9	466.3	0.832
Agosto . . .	109.3	143.6	0.761	113.2	139.3	0.813	116 4	147.7	0.788	338.9	430.6	0.787
Settembre .	73.1	129.1	0.566	48.8	124.1	0.393	65.5	119.0	0.550	187.4	372.2	0.503
Ottobre . . .	60.6	114.0	0.532	59.8	109.1	0.548	18.4	114.2	0.161	138.8	337.3	0.412
Novembre .	61.5	99.1	0.621	57.4	95.0	0.604	30.6	91.6	0.334	149.5	285.7	0.523
Dicembre .	10.3	89.1	0.116	27.0	88.0	0.307	41.5	96.8	0.429	78.8	273.9	0.288

Riassunto annuo

1910	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12	12–13	13–14	14–15	15–16	16–17	17–18	18–19	19–20	A	B	A/B
Gennaio. .	...	...	...	3.2	10.8	13.5	14.7	14.3	14.5	13.8	12.9	11.9	1.5	...	...	...	111.1	283.9	0.391
Febbraio .	...	...	0.8	7.0	8.8	10.3	11.9	12.2	11.7	13.0	11.2	8.4	4.4	0.2	...	...	99.9	290.6	0.343
Marzo . . .	...	...	8.9	16.4	17.4	19.5	21.1	22.6	22.7	20.2	20.5	19.8	18.7	8.6	...	...	216.4	368.9	0.587
Aprile. . .	...	8.9	12.2	16.5	16.0	19.5	21.8	22.9	22.2	19.7	16.0	14.8	15.3	12.6	4.7	...	218.1	402.5	0.542
Maggio . .	1.0	10.0	15.5	19.4	22.9	23.1	20.4	20.6	19.2	18.8	19.1	18.5	15.0	15.5	13.5	1.5	254.0	456.9	0.556
Giugno . .	5.7	20.7	22.9	22.5	24.3	25.9	25.5	24.8	25.5	24.8	21.1	19.8	21.5	21.5	18.4	6.9	334.8	461.2	0.726
Luglio. . .	4.6	22.4	24.5	25.6	27.4	29.4	29.2	28.6	28.5	27.9	28.5	28.1	26.5	25.5	24.6	6.6	387.9	466.3	0.832
Agosto . .	0.2	13.3	19.6	23.7	26.3	27.0	28.9	27.4	27.7	27.2	26.3	25.4	24.8	24.4	16.0	0.7	338.9	430.6	0.787
Settembre	...	0.6	6.9	16.0	17.1	17.2	17.9	17.1	17.6	18.2	16.5	16.7	14.9	10.0	0.7	...	187.4	372.2	0.503
Ottobre . .	...	...	2.2	10.4	12.1	12.9	13.9	14.0	14.0	15.5	16.4	13.8	11.9	1.7	...	...	138.8	337.3	0.412
Novembre	...	...	...	10.5	15.9	17.0	16.4	17.0	18.5	16.1	16.1	14.4	7.6	...	...	...	149.5	285.7	0.523
Dicembre.	...	...	...	1.4	7.7	8.7	9.9	9.7	11.3	11.4	9.3	8.0	1.4	...	...	...	78.8	278.9	0.288
Anno . . .	11.5	70.9	113.5	172.6	206.7	224.0	231.6	231.2	233.4	226.6	216.9	199.6	163.5	120.0	77.9	15.7	2515.6	4430.0	0.568

Nell' anno 1910 si sono avuti 65 giorni senza Sole, per i quali cioè $\frac{A}{B} = 0$, e precisamente

in Gennaio	12	in Giugno	1
» Febbraio	5	» Settembre	4
» Marzo	4	» Ottobre	9
» Aprile	4	» Novembre	10
» Maggio	1	» Dicembre	15

Il periodo più lungo senza Sole fu di 6 giorni, dal 27 Novembre al 2 Dicembre; un periodo di 4 giorni lo si ebbe in Ottobre, dal 22 al 25; in Gennaio si ebbero senza sole tre periodi di 3 giorni: dal 7 al 9, dall' 11 al 13 e dal 29 al 31; pure di tre giorni s' ebbe un periodo in Aprile dall' 1 al 3, uno in Ottobre, dal 28 al 30, e due in Dicembre, dal 4 al 6 e dal 27 al 29.

In un sol giorno, il 25 Agosto, la durata dello splendore effettivo del Sole fu uguale alla durata del Sole sull' orizzonte (cioè fu $\frac{A}{B} = 1$).

Dallo spoglio dei risultati eliofanometrici pei giorni in cui il Sole è segnalato nella prima e nell' ultima ora, risulta che subito dopo il nascere del Sole, e poco prima del suo tramontare, l' Eliofanometro non segna tutto quello che dovrebbe segnare; il che va attribuito, oltre che alla debole intensità della radiazione solare in quei periodi, anche, e sopratutto, alla nebbia che avvolge il nostro orizzonte quasi costantemente.

Il massimo decadico di $\frac{A}{B}$ si è avuto nella 3.ª decade di Luglio col valore 0,893; il minimo, 0,116, lo si ebbe nella 1.ª decade di Dicembre. Pure in Luglio si ebbe il massimo mensile di $\frac{A}{B}$ col valore 0,832 e in Dicembre il minimo col valore 0,288.

Per tutto l' anno, poichè è $A = 2515^h,6$ e $B = 4430^h,0$, si ha $\frac{A}{B} = 0,568$. Questo valore è sensibilmente inferiore a quello dell' anno precedente (in cui si ebbe $\frac{A}{B} = 0,587$); non solo, ma è anche inferiore a tutti i valori annui di questo rapporto che si ebbero nel periodo in cui funziona in questo Osservatorio l' Eliofanometro con i cartoncini spalmati di paraffina, cioè dal 1895 in poi; infatti questi valori oscillano da un minimo di 0,581 (nel 1895) a un massimo di 0,627 (nel 1906) col valor medio di 6,00.

AVVERTENZE

Coordinate geografiche dell' Osservatorio.

Latitudine boreale . . . . = 44° 38′ 51″,36
Longitudine E da Greenwich . . . . = 0^h 43^m 43^s,4
Altezza del suolo sul livello medio del mare . . . . = metri 34

Le osservazioni furono compiute per la massima parte dal Custode-osservatore signor Vito Vellani. Esse furono calcolate dai Sigg.[i] Ing. Guido Siliprandi, che fu già assistente presso l' Osservatorio, Dott. Gino Roncaglia e Dott. Carlo Fabbri, che fanno tuttora parte del personale assistente.

Il pozzetto del barometro si trova a m. 64.2 di altitudine sul livello medio del mare, determinato dal mareografo di Genova. I dati della pressione atmosferica sono espressi in millimetri, ridotti a 0° e diminuiti di 700 mm.

Gli istrumenti che servono a raccogliere i dati sulla *temperatura*, *umidità* ed *evaporazione* si trovano nella balconata costruita nel giugno 1898 e modificata nel giugno 1908 (*). Nelle tabelle i dati della *temperatura* che non sono preceduti da alcun segno, s' intendono preceduti dal segno +. Il valore medio della temperatura si è ottenuto prendendo la media dei valori estremi e dei valori osservati alle 9^h e alle 21^h.

I dati dell' evaporimetro sono espressi in millimetri.

Per la *velocità del vento* alle 9^h, 15^h e 21^h s' intende la media delle velocità che il vento ha nei periodi 8^h-10^h, 14^h-16^h e 20^h-22^h rispettivamente. La banderuola dell' anemoscopio e il mulinello dell' anemometro si trovano sulla torre dell' Osservatorio rispettivamente a m. 45.1 e 46 sul suolo.

Per quel che riguarda la *direzione delle nubi*, è convenuto che si osservarono soltanto le nubi situate negli alti strati dell' atmosfera ed in prossimità dello Zenit.

Lo *stato del cielo* (o *nebulosità*) è stimato ad occhio, secondo la scala da 0 (sereno) a 10 (coperto) adottata generalmente.

Quanto alla *forma delle nubi* si tennero le seguenti notazioni:

Cu = cumuli; Ci = cirri; S = strati; N = nembi; Ci-Cu = cirro-cumuli; Cu-S = Cumulo-strati; Ci-S = Cirro-strati; Cu-N = Cumulo-Nembi. — Nell' indicare lo stato del cielo con nubi di varia forma, si segna dapprima la forma delle nubi predominanti.

(*) Vedi prefazione nella pubblicazione N.° 23 dell' Osservatorio.

Nella colonna « *Meteore* » sono adottati i simboli internazionali proposti dal Congresso di Vienna ed ora comunemente usati.

1. ● : pioggia.
2. ✳ : neve.
3. △ : nevischio.
4. ▲ : grandine.
5. ≡ : nebbia.
6. V : brina.
7. ∾ : gelicidio.
8. ⊔ : gelo.
9. ⌂ : rugiada.
10. ⟵ : aghi di ghiaccio.
11. ∞ : caligine.
12. ⟦ : temporale (con lampi e tuoni).
13. < : lampi senza tuoni.
14. ⚡ : lampi e tuoni.
15. T : temporale lontano (tuoni senza lampi visibili).
16. ⟶ : vento forte (da 20 a 30 km.).
17. ⟶ : » fortissimo (da 30 km. a più).
18. ✢ : uragano di neve.
19. ⊕ : alone solare.
20. ◡ : alone lunare.
21. ⊕ : corona solare.
22. ◡ : corona lunare.
23. ⌒ : arco baleno.

A questi segni crediamo necessario aggiungere i seguenti altri:

≡ *o* : nebbia all'orizzonte;
≡ *a* : nebbia alta;
≡ *b* : nebbia bassa.
≡ *c* : nebbia sulla campagna.
≡ *int.* : nebbia intorno, cioè stazione immersa nella nebbia.

Non si è fatta sempre speciale menzione della nebbia all'orizzonte, che è quasi continua: sono segnati invece i giorni e le ore di orizzonte assolutamente *limpido*, che è fenomeno poco frequente.

Gli esponenti ^{0} e ^{2} indicano rispettivamente che la meteora è di poca, oppure di massima entità. Le lettere *n. m.* e i numeri I, II, III significano che la meteora, alla quale si accenna, apparve di *notte*, al *mattino*, oppure verso le ore di osservazione 9^h, 15^h, 21^h. La lettera *p* indica *gocce* (o *frusche*, se si tratta di neve) o *poca pioggia* incalcolabile.

La misura delle precipitazioni si fa con tre pluviometri: uno tipo Bianchi (diametro della bocca cm. 64.3), a 24 collettori, che fornisce la pioggia oraria; uno, tipo Tecnomasio (diametro della bocca cm. 49,25), a lettura diretta; e infine un pluviografo Richard (diametro della bocca cm. 20). I valori udometrici segnati nelle tavole risultano dalla discussione dei dati forniti dai tre strumenti.

Come al sòlito, i vasi ricettori dei pluviometri vengono mantenuti, nei mesi d'inverno, a temperatura conveniente, così che la neve che arriva sopra di essi si fonda immediatamente; e perciò è possibile di avere anche i *valori orari* dell'altezza dell'acqua proveniente dalla neve.

Nelle tabelle dei valori udometrici se il numero corrisponde a neve fusa, o a nebbia precipitante, o a brina disciolta, vi è segnato di fianco il corrispondente simbolo internazionale.

L'altezza della neve si ottiene, oltrechè da misure dirette fatte in diversi punti della città, misurandola al *nevometro* (diametro della bocca cm. 35,68) esposto nel pubblico giardino. Dall'acqua di fusione della neve raccolta nel nevometro si deduce l'altezza dell'acqua corrispondente all'altezza della neve.

Riguardo alle stagioni si ritenne che l'inverno sia costituito dai tre mesi di Gennaio, Febbraio e Dicembre; la primavera dai tre mesi di Marzo, Aprile e Maggio; l'estate dai tre mesi di Giugno, Luglio e Agosto; e l'autunno dai tre mesi di Settembre, Ottobre e Novembre.

Le ore sono sempre espresse in tempo medio dell'Europa Centrale.

MEMORIE

DELLA

SEZIONE DI SCIENZE

PARTE SECONDA

Gruppi che ammettono una schiera invariante di ∞^2 curve

Capitolo IV.

Gruppi intransitivi.

35. — In questa seconda parte del nostro lavoro dobbiamo determinare i *gruppi continui infiniti di trasformazioni puntuali* (analitiche) *dello spazio che trasformano in sè una congruenza di curve*

$$\alpha(x,y,z) = \text{cost. arb.} \quad , \quad \beta(x,y,z) = \text{cost. arb.} \; .$$

Notiamo subito che si può sempre ridurre codesta congruenza invariante alla stella di rette

$$x = \text{cost.} \quad , \quad y = \text{cost.} \; , \tag{1}$$

eseguendo una trasformazione spaziale, in cui si assumano le α e β come nuove variabili x, y.

Sia dunque **G** un gruppo che ammetta la stella invariante (1). Ad esso sono *associati* due gruppi, che possiam dire ne caratterizzino la *struttura* (cfr. il Cap. I).

Abbiamo anzitutto il gruppo G (*gruppo accorciato*), secondo cui il gruppo **G** permuta le une nelle altre le rette della stella invariante; e in secondo luogo dobbiamo considerare quel sottogruppo $\mathbf{G}_1$ di **G**, che è costituito dalle trasformazioni di **G** che lasciano ferma *ogni singola retta* della stella (1). È questo manifestamente un *sottogruppo invariante* di **G**.

Il gruppo accorciato G è un gruppo in due variabili e, come tale apparterrà ad uno dei tipi, già determinati dal Lie, di gruppi

Per la *Parte prima* vedi: *Memoria della R. Acc. di Sc., Lett. ed A. in Modena*, Serie III, vol. X: (Sezione Scienze) pagg. 277-349.

continui (finiti e infiniti) del piano. Per costruire i nostri gruppi dovremo combinare opportunamente ciascuno dei tipi in due variabili coi vari gruppi spaziali G_1 che trasformano in sè *ogni* retta (1); cosicchè siamo in primo luogo condotti a studiare appunto *codesti gruppi intransitivi* G_1, *che lasciano ferma ogni retta parallela all'asse* z.

Dei tipi di gruppi di quest'ultima specie ha pubblicato una enumerazione il signor R. LE VAVASSEUR (*), incorrendo per altro in qualche inesattezza. Perciò noi in questo capitolo riprenderemo la determinazione; dopo di che, nel capitolo successivo, svolgeremo alcune considerazioni generali sul modo in cui i vari gruppi intransitivi G_1 vanno combinati coi singoli gruppi G in due variabili per costruire i gruppi infiniti dello spazio, a cui è dedicata questa seconda parte del nostro lavoro.

36. — Perchè una trasf. inf. spaziale

$$X = \xi(x, y, z)p + \eta(x, y, z)q + \zeta(x, y, z)r$$

lasci ferma ogni retta $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$, è necessario e sufficiente che essa imprima ad ogni punto dello spazio uno spostamento parallelo all' asse z, cosicchè, avendosi

$$\delta x = \xi \delta t \quad , \quad \delta y = \eta \delta t \quad , \quad \delta z = \zeta \delta t \ ,$$

la X dovrà soddisfare semplicemente alle due condizioni

$$\xi = 0 \quad , \quad \eta = 0 \ ,$$

e ogni gruppo G_1 sarà generato da trasf. inf. della forma

$$\zeta(x, y, z)r \ .$$

Il più ampio gruppo G_1 sarà, ove al solito $\chi(x, y, z)$ rappresenti una *funzione arbitraria* di x, y, z (**)

$$\chi(x, y, z)r \ .$$

(*) *Sur les groupes continus, finis ou infinis, de l'espace.* Comptes rendus t. 139 (Decembre 1904). In questa Nota di soli resultati non si ha cenno del metodo di ricerca seguito dall'autore.

(**) AVVERTENZA. — *Come già nella prima parte di questo lavoro, conveniamo, una volta per sempre, di rappresentare con* φ, ψ, χ (affette o no da indici) **funzioni arbitrarie** *rispettivamente di* **una, due, tre** *variabili. Con le lettere* ρ, σ, τ rappresenteremo invece funzioni determinate.

Noi dobbiamo ora determinare tutti i tipi di sottogruppi di questo gruppo, *distinti fra loro rispetto al più ampio gruppo spaziale che trasformi in sè la stella di rette* (1). Risulta di qui che in codesta riduzione a tipi ci potremo valere di ogni possibile trasformazione della forma

$$x' = x'(x, y)\ ,\ y' = y'(x, y)\ ,\ z' = z'(x, y, z)\ . \tag{3}$$

Ora i gruppi G_1 si possono distribuire in quattro classi, secondo che su ciascuna retta invariante $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$, subordinano un *gruppo finito* ad *uno* o *due* o *tre* parametri o il *gruppo infinito totale* nella variabile z.

Cominciamo dai gruppi della prima classe. Poichè per $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$ il gruppo deve essere riducibile al gruppo r (rappresentante dei gruppi ∞^1 sulla retta) potremo senz'altro supporre che nelle trasf. inf. ζr del nostro gruppo le componenti ζ siano indipendenti dalla z; cosicchè il tipo dei gruppi più ampi della classe sarà rappresentato da

$$[I] \qquad \psi(x, y) r$$

dove, al solito, la ψ è una *funzione arbitraria*.

È questo un gruppo abeliano: perciò ogni possibile *insieme lineare* di funzioni θ di x, y, *definito da equazioni differenziali*, darà luogo ad un sottogruppo continuo

$$[II] \qquad \theta(x, y) r$$

di [I], e questo sottogruppo sarà finito o infinito, secondo che l'insieme lineare delle θ dipende da un numero finito o infinito di costanti arbitrarie, o, in altri termini, secondo che il sistema differenziale, completamente integrabile, che definisce le θ è o no un sistema del Mayer. È quindi senz'altro chiaro che questi sottogruppi di [I] non possono essere ridotti a un numero finito di tipi, per ciascuno dei quali sia assegnabile in forma esplicita un rappresentante: questi tipi sono tanti, quanti i tipi (rispetto al gruppo totale in due variabili) dei sistemi completamente integrabili di equazioni lineari alle derivate parziali di una funzione incognita di due variabili indipendenti.

Noi, per intenderci, chiameremo questi gruppi « i gruppi [II] » e vedremo che, nella quasi totalità dei casi, quando siano associati a gruppi in due variabili per la costruzione di gruppi spaziali, sono soggetti a tali limitazioni, che potremo assegnare per essi una rappresentazione analitica esplicita.

Da codesti gruppi [II] ci tornerà utile separare, designandoli con una sigla speciale, i gruppi finiti, cioè i gruppi

$$\text{[III]} \qquad \left| \begin{array}{c} \rho_i(x, y)r \\ i=1,2,\ldots,n \end{array} \right|$$

dove le ρ_i rappresentano ***funzioni determinate, linearmente indipendenti:*** perciò nel seguito, parlando di un gruppo [II], intenderemo senz'altro che esso sia infinito, o, in altre parole, che le rispettive componenti $\theta(x, y)$, pur non essendo arbitrarie come nel gruppo totale [I], dipendano da ***infinite*** costanti arbitrarie.

Osserviamo che in un gruppo [III], ponendo $z' = z\rho_1^{-1}$, si può sempre ridurre $\rho_1 = 1$.

Notiamo infine che saremo spesso condotti a considerare gruppi [II] infiniti rispetto ad una sola variabile, cioè aventi, p. es., la forma

$$\varphi_i(x)\rho_i(x, y)r \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dove le φ_i sono funzioni arbitrarie e indipendenti, e le ρ_i sono funzioni determinate, linearmente indipendenti (rispetto all' insieme fondamentale delle funzioni di x).

37. — Passando ai gruppi G_1 che su ogni retta invariante subordinano un gruppo ∞^2, cioè un gruppo del tipo r, zr, avremo che il tipo dei gruppi più ampi della classe è rappresentato da

$$\text{[IV]} \qquad \left| \psi_0(x, y)r \ , \ \psi_1(x, y)zr \right|$$

dove ψ_0, ψ_1 sono funzioni arbitrarie e indipendenti.

Un qualsiasi sottogruppo di [IV] conterrà almeno due trasf. inf. della forma

$$(\alpha_0 + \alpha_1 z)r \ , \ (\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 z)r \ ,$$

dove $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_1$ sono funzioni di x, y, fra le quali una almeno delle due funzioni α_1, α_1 non sarà nulla. Supposto $\alpha_1 \gtrless 0$, potremo ridurre, per mezzo di una trasformazione (3), $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$. Allora dalla

$$\big((\alpha_0 + \alpha_1 z)r, zr\big) = \alpha_1 r$$

concludiamo che il nostro sottogruppo di [IV] contiene come sottogruppo o il gruppo [I] o un suo sottogruppo e che di più esso insieme con ogni trasf. inf. $(\alpha_0 + \alpha_1 z)r$ contiene le $\alpha_0 r, \alpha_1 zr$. In altre parole nelle trasf. inf. del nostro gruppo i coefficienti di r e zr sono *indipendenti* fra loro.

Se nel gruppo accanto alla zr esiste un'altra trasf. inf. $\alpha_1 zr$ (dove α_1 non è costante) potremo scegliere come nuova x la α_1; e allora dalle

$$(\alpha_0 r, xzr) = x\alpha_0 r \quad , \quad (x\alpha_0 r, xzr) = x^2\alpha_0 r \quad , \quad \dots \quad , \quad (x^l\alpha_0 r, xzr) = x^{l+1}\alpha_0 r \quad , \quad \dots$$

avremo che il sottogruppo di prima classe del nostro gruppo è tale che insieme con ogni sua trasf. inf. $\alpha_0 r$ appartiene ad esso anche

$$\varphi(x)\alpha_0 r$$

dove φ rappresenta una *funzione arbitraria* di x.

Ora possono presentarsi due casi, in quanto l'insieme delle determinazioni del coefficiente di r può dare per $x = \text{cost.}$ un numero *finito* o *infinito* di funzioni di y linearmente indipendenti.

Nel primo caso il sottogruppo di prima classe è della forma

$$\varphi_i(x)\rho_i(x, y)r \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{4}$$

dove al solito le φ_i sono funzioni arbitrarie e le ρ_i funzioni determinate linearmente indipendenti. Nel secondo caso invece il sottogruppo di prima classe è l'intero gruppo [I].

Resta a vedere quali determinazioni (oltre la 1) possa ammettere il coefficiente α_1 delle $\alpha_1 zr$.

Se il sottogruppo di prima classe è il gruppo [I], α_1 non è sottoposto ad alcuna condizione, tranne quella di essere variabile in un insieme lineare di funzioni; talchè, oltre il gruppo totale [IV] otteniamo infiniti tipi della forma

$$\text{[V]} \qquad \overline{\psi(x, y)r \quad , \quad \theta(x, y)zr}$$

dove ψ è arbitraria e θ è la soluzione generale di un sistema completamente integrale di equazioni lineari alle derivate parziali. Anche qui (cfr. il n. prec.) l'insieme delle determinazioni di θ può essere ad un numero infinito o finito di dimensioni, e pel seguito ci conviene separare i due casi, supponendo che nei gruppi [V] la θ dipenda da *infinite* costanti arbitrarie e considerando a parte i gruppi

$$[\mathrm{VI}] \qquad \left| \begin{array}{c} \psi(x,y)r \quad , \quad \rho_i(x,y)zr \\ {\scriptstyle i=1,2,\dots,n} \end{array} \right|$$

dove le ρ_i sono funzioni determinate linearmente indipendenti.

Se poi il sottogruppo di prima classe ha la forma (4), il coefficiente α_1 non può ammettere nessuna determinazione dipendente da y; giacchè se ve ne fosse una potremmo assumerla come nuova y e allora dalle

$$(\rho_i r, yzr) = y\rho_i r \quad , \quad (y\rho_i r, yzr) = y^2\rho_i r \quad , \quad \dots \quad , \quad (y^l\rho_i r, yzr) = y^{l+1}\rho_i r \quad , \quad \dots$$

si concluderebbe, contro l'ipotesi, che il coefficiente di r ammette, per $x = \text{cost.}$, infinite determinazioni linearmente indipendenti.

Allora per il coefficiente α_1 di zr, funzione della sola x, sono possibili soltanto due casi, secondo che è funzione arbitraria di x o ammette un numero finito di determinazioni $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_m(x)$, linearmente indipendenti. Otteniamo così i due gruppi:

$$[\mathrm{VII}] \qquad \left| \begin{array}{c} \varphi_i(x)\rho_i(x,y)r \quad , \quad \varphi(x)zr \\ {\scriptstyle (i=1,2,\dots n)} \end{array} \right|$$

$$[\mathrm{VIII}] \qquad \left| \begin{array}{c} \varphi_i(x)\rho_i(x,y)r \quad , \quad \sigma_j(x)zr \\ {\scriptstyle (i=1,2,\dots,n \;;\; j=1,2,\dots,m)} \end{array} \right|$$

Dopo ciò rimane soltanto da esaminare la ipotesi che il coefficiente di zr ammetta l'unica determinazione 1; e in tal modo si giunge, oltre che a casi particolari di [VI] e [VIII], all' unico tipo di gruppi finiti di seconda classe

$$[\mathrm{IX}] \qquad \left| \begin{array}{c} \rho_i(x,y)r \quad , \quad zr \\ {\scriptstyle (i=1,2,\dots,n)} \end{array} \right| .$$

Notiamo infine che nei gruppi VII, VIII e IX ponendo $z' = z\rho_1^{-1}$ possiamo ridurre $\rho_1 = 1$.

38. — Passiamo ai *gruppi di terza classe* (in cui il gruppo subordinato su ciascuna retta invariante è ∞^3 e perciò appartiene al tipo r, zr, z^2r). A rappresentare il tipo dei gruppi più ampi della classe possiamo assumere il gruppo a tre funzioni arbitrarie indipendenti di due variabili

$$[X] \qquad \boxed{\psi_0(x, y)r \quad , \quad \psi_1(x, y)zr \quad , \quad \psi_2(x, y)z^2r}$$

Sia G un sottogruppo di [X] che subordini, naturalmente, su ogni retta invariante un gruppo ∞^3. Fissando un punto come invariante su di un numero finito di rette $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$, od anche, ove occorra su tutte codeste rette (cfr. Cap. III, n. 28), determineremo un sottogruppo G_1 di G, il quale subordinerà su ogni retta invariante un gruppo ∞^2 e perciò apparterrà ad uno dei tipi di seconda classe determinati al n. prec. E potremo addirittura supporre, che mediante una opportuna trasformazione (3), G_0 sia già stato ridotto ad avere come sottogruppo G_1 uno dei nostri gruppi tipici [IV]-[IX].

Se G_1, come accade per [IV], [V] e [VI], contiene il sottogruppo di prima specie $\psi_0(x, y)r$, e $\alpha zr + \beta z^2r$ é una qualsiasi altra trasf. inf. di G, dalla

$$(\psi_0(x, y)r, \alpha zr + \beta z^2r) = \alpha\psi_0 r + 2\beta\psi_0 zr$$

ricaviamo che il coefficiente di zr è funzione arbitraria di x, y ed è di più indipendente dal coefficiente di z^2r, talchè G_1 è necessariamente della forma [IV]: $\psi_0(x, y)r$, $\psi_1(x, y)zr$.

Allora dalla

$$(\psi_1(x, y)zr, \beta z^2r) = \psi_1\beta z^2r$$

concludiamo che anche il coefficiente di z^2r è funzione arbitraria di x, y, e riotteniamo il gruppo massimo [X].

Supponiamo in secondo luogo che G_1 sia della forma [VII] od [VIII], talchè G contenga un sottogruppo di prima classe della forma

$$\varphi_i(x)\rho_i(x, y)r \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Allora, se $\alpha r + \beta zr + \gamma z^2 r$ è una trasf. inf. di **G**, dalle

$$(\varphi_i(x)\rho_i(x\,,y)r\,,\alpha r + \beta zr + \gamma z^2 r) = \varphi_i\rho_i\beta r + 2\varphi_i\rho_i\gamma zr$$
$$(\rho_j(x\,,y)r\,,\varphi_i\rho_i\beta r + 2\varphi_i\rho_i\gamma zr) = 2\varphi_i\rho_i\rho_j\gamma r$$

ricaviamo che a **G** appartengono tutte le trasf. inf.

$$\alpha r$$

dove α è un qualsiasi prodotto formato prendendo come fattori le

$$\varphi_i(x)\;,\;\gamma(x\,,y)\;,\;\rho_1(x\,,y)\;,\;\rho\,(x\,,y)\;,\;\ldots\;,\;\rho_n(x\,,y)\;,$$

presa ciascuna quante volte si vogliono.

Ma se escludiamo il caso già dianzi esaurito, in cui il coefficiente di r è una funzione arbitraria di x e y, il risultato precedente implica di necessità che le funzioni γ e ρ_i siano tutte indipendenti da y; talchè possiamo senz' altro supporre che le ρ_i si riducano alla sola $\rho_1 = 1$ e che il coefficiente γ di zr sia funzione della sola x. Avremo dunque intanto che il gruppo di prima specie contenuto in **G** è $\varphi(x)r$, dove φ è funzione arbitraria.

Ciò posto, ricordiamo che il gruppo **G**, poichè $\mathbf{G}_1$ è della forma [VII] od [VIII], contiene certamente delle trasf. inf. $\sigma(x)zr$, e, in base alla

$$(\sigma zr\;,\;\alpha r + \beta zr + \gamma z^2 r) = -\sigma\alpha r + * + \sigma\gamma z^2 r$$

troviamo che i coefficienti $\alpha\,,\beta\,,\gamma$, in quanto ammettono i moltiplicatori $-\sigma\,,0\,,\sigma$ fra loro differenti, sono *indipendenti* ciascuno da ciascuno (cfr. n. 13). Infine dalle

$$(\alpha r\,,\gamma z^2 r) = 2\alpha\gamma zr \quad , \quad (\beta zr\,,\gamma z^2 r) = \beta\gamma z^2 r\;,$$

concludiamo che, in quanto α è funzione arbitraria di x, sono tali altresì β e γ e otteniamo il gruppo, a tre funzioni arbitrarie indipendenti di una sola variabile

$$\text{[XI]} \qquad \left|\; \varphi_0(x)r \quad , \quad \varphi_1(x)zr \quad , \quad \varphi_2(x)z^2 r \;\right|$$

Da ultimo, se il sottogruppo $\mathbf{G}_1$ di seconda classe è della forma [IX], e se escludiamo i casi già esauriti sin qui, troviamo, in base

a considerazioni perfettamente analoghe a quelle svolte or ora, che il gruppo **G** è finito ed equivalente al gruppo

[XII] $$\left| r\ ,\ zr\ ,\ z^2r \right| .$$

39. — Non restano più da determinare se non i *gruppi della quarta classe*, cioè i gruppi che su ogni retta invariante subordinano il gruppo totale in una variabile. Il più ampio gruppo della classe è il gruppo intransitivo totale, dipendente da una funzione arbitraria di tre variabili, che già notammo (n. 36):

[XIII] $$\left| \chi(x, y, z)r \right| ,$$

mentre il gruppo minimo è

[XV] $$\left| \varphi(z)r \right| ,$$

dove appare un' unica funzione arbitraria di una sola variabile.

Consideriamo allora un sottogruppo **G** di [XIII] e, supponendo che anch' esso subordini su ogni retta invariante il gruppo totale, vediamo se esso possa appartenere ad un tipo distinto da [XV].

Supporremo, come è manifestamente lecito, che nell' intorno di $x = y = z = 0$ il coefficiente di r nella trasf. inf. generica di **G** sia regolare (in caso contrario basterebbe eseguire preventivamente una traslazione) e immaginando ordinato lo sviluppo di codesto coefficiente secondo le potenze crescenti di z, chiameremo *ordine* di una determinata trasf. inf. il minimo grado a cui compare la z nel corrispondente sviluppo.

Poichè **G** subordina su ogni retta invariante il gruppo totale in z, esso conterrà necessariamente trasf. inf. di ogni ordine possibile; e noi presane una di ordine zero, potremo ridurla, trasformando opportunamente la z, alla forma r.

Se dopo questa riduzione tutte le trasf. inf. del gruppo risultano indipendenti da x e y, il gruppo **G** appartiene al tipo [XV]. Escluso questo caso, avremo in **G** (anche dopo l' indicata riduzione) almeno una trasf. inf. dipendente da x, y (o da una di queste variabili). Qualunque sia il termine dello sviluppo di codesta trasf. inf.

(secondo le potenze di z), il cui coefficiente dipende da x, y noi, combinando la trasf. inf. un numero sufficiente di volte con la r, otterremo alla fine una trasf. inf. d'ordine zero

$$X_1 = \alpha_0 r + \dots$$

dove α_0 dipende da x, y e non da z, mentre i termini non scritti contengono tutti la z.

Ora è manifesto come combinando la X_0 (e, ove occorra, la r) con le trasf. inf. dei vari ordini, si ottengano nel gruppo trasf. inf. di ogni possibile ordine, in cui il coefficiente del termine di minimo grado in z dipenda da x, y; in particolare avremo certamente una trasf. inf. del 1.° ordine

$$X_1 = \alpha_1 z r + \dots$$

dove il coefficiente α_1 dipende da x, y.

Ciò premesso, scegliamo la α_1 come nuova x, talchè la X_1 diventi

$$X_1 = xzr + \dots ,$$

e anzitutto supponiamo che, dopo siffatta riduzione, *tutte le trasf. inf. di* G *risultino indipendenti dalla* y.

Allora al gruppo G insieme con una qualsiasi trasf. inf. d'ordine $n > 2$

$$\alpha_n z^n r + \dots ,$$

dove α_n sarà o una costante o una funzione della sola x, apparterranno le alternate

$$(xzr + \dots, \alpha_n z^n r + \dots) = (n-1)\alpha_n x z^n r + \dots$$
$$(xzr + \dots, \alpha_n x z^n r + \dots) = (n-1)\alpha_n x^2 z^n r + \dots$$

e così via; di modo che possiamo concludere (tenendo conto del fatto che il gruppo deve essere *continuo*, cioè definito da equazioni differenziali) che *per ogni valore dell'intero* n *esistono in* G *infinite trasf. inf. d'ordine* n

$$\varphi(x) z^n r + \dots \tag{5}$$

dove $\varphi(x)$ *è una funzione arbitraria e i termini non scritti sono indipendenti da* y *e di grado in* z *maggiore di* n.

Ciò che a questo punto resta ancora da indagare si è la possibilità di relazioni (differenziali lineari) di dipendenza fra il coefficiente $\varphi(x)$ del termine di grado minimo in z e i coefficienti degli altri termini. Ma è facile convincersi come non possa sussistere nessuna relazione siffatta, o, in altre parole, come il coefficiente ζ delle trasf. inf. $\zeta(x, z)r$ del nostro gruppo G non possa soddisfare a nessuna equazione differenziale all'infuori della

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 .$$

A tale scopo basta procedere in modo analogo a quello seguito nel Cap. III, n. 28. Le eventuali equazioni, cui può soddisfare la ζ, saranno lineari ed omogenee: immaginiamole ridotte alla seguente forma normale. Messe da parte le equazioni che rispetto a z sono di ordine superiore al primo, risolviamo le altre rispetto al massimo numero possibile di derivate del 1.° ordine rispetto a z (sian pure di ordine qualsiasi rispetto ad x). Poi, escluse le equazioni di ordine maggiore di 2 rispetto a z, risolviamo le altre rispetto al massimo numero possibile di derivate di second' ordine in z, e così via. Allora un'equazione generica del nostro sistema sarà della forma

$$\frac{\partial^{n+p} \zeta}{\partial z^n \partial x^p} = \sum_{u\,.\,v} \lambda_{u\,.\,v} \frac{\partial^{u+v} \zeta}{\partial z^u \partial x^v} , \tag{6}$$

dove le λ sono funzioni di x, z e al secondo membro è in ogni termine $u \leq n$.

Ma la ζ, corrispondentemente alla trasf. inf. (5), ammette una determinazione della forma

$$\varphi(x) z^n + \ldots \tag{7}$$

dove i termini non scritti sono rispetto a z di grado maggiore di n. Se allora sostituiamo nella (6) la (7) e indicando con $\lambda^0_{u\,.\,v}$ il termine indipendente da z nello sviluppo di $\lambda_{u\,.\,v}$ in serie di potenze di z, identifichiamo nei due membri i termini indipendenti da z, otteniamo l'equazione differenziale lineare ordinaria a coefficienti indipendenti da z

$$\frac{d^n \varphi}{dx^n} = \sum_{v} \lambda_{n\,.\,v} \frac{d^v \varphi}{dx^v} ,$$

la quale è assurda, in quanto φ è una funzione arbitraria di x.

Concludiamo quindi veramente che la ζ è una funzione di x, z, non legata da alcuna equazione differenziale, e otteniamo il gruppo G della forma

[XIV] $$\psi(x, z)r$$

Resta oramai da esaminare il caso in cui G contenga accanto alle trasf. inf.

$$r \quad , \quad X_1 = xzr + \ldots$$

delle trasf. inf. dipendenti da y. In tal caso, operando in modo analogo a quello seguito alle pag. prec., giungeremo ad una trasf. inf. della forma

$$\beta_1 zr + \ldots$$

dove β_1 dipende da y. Assunta allora la β_1 come nuova y e ottenuta così la

$$X_1' = yzr + \ldots ,$$

combiniamo successivamente quante volte si vogliono le X_1, X_1' con una trasf. inf. qualsiasi di G

$$\alpha_n z^n r + \ldots. ,$$

otterremo così infinite trasf. inf. della forma

$$\alpha_n x^l y^m z^n r + \ldots. \qquad (l, m, n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

cosicchè concludiamo che per ogni valore dell'ordine n esistono in G trasf. inf. della forma

$$\psi(x, y) z^n r + \ldots.$$

dove ψ è funzion arbitraria di x, y

Allora, in base ad un ragionamento analogo a quello svolto pocanzi, si trova senz'altro che il coefficienie di r nelle trasf. inf. di G è una funzione arbitraria di x, y, z e quindi il gruppo G coincide col gruppo totale [XII].

Concludendo, i soli sottogruppi di [XIII] che su ogni retta $x =$ cost., $y =$ cost. operino come il gruppo totale stesso sono i gruppi appartenenti ai tipi [XIV] e [XV].

Per il seguito sarà utile raccogliere in una tabella i rappresentanti dei tipi determinati in questo Capitolo.

TABELLA dei rappresentanti tipici dei gruppi che trasformano in sè ogni curva di una congruenza.

(*Congruenza di curve invarianti:* $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$)

A) **Gruppi che subordinano su ogni curva invariante un gruppo** ∞^1 .

[I] $\psi(x, y)r$

[II] $\theta(x, y)r$

[III] $\rho_i(x, y)r$ $\quad i = 1, 2, \ldots, n$

B) **Gruppi che subordinano un gruppo** ∞^2 .

[IV] $\psi_0(x, y)r$, $\psi_1(x, y)zr$

[V] $\psi(x, y)r$, $\theta(x, y)zr$

[VI] $\psi(x, y)r$, $\rho_i(x, y)zr$ $\quad i = 1, 2, \ldots, n$

[VII] $\varphi_i(x)\rho_i(x, y)r$, $\varphi(x)zr$ $\quad i = 1, 2, \ldots, n$

[VIII] $\varphi_i(x)\rho_i(x, y)r$, $\tau_j(x)zr$ $\quad i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m$

[IX] $\rho_i(x, y)r$, zr $\quad i = 1, 2, \ldots, n$

C) **Gruppi che subordinano un gruppo** ∞^3 .

[X] $\psi_0(x, y)r$, $\psi_1(x, y)zr$, $\psi_2(x, y)z^2r$

[XI] $\varphi_0(x)r$, $\varphi_1(x)zr$, $\varphi_2(x)z^2r$

[XII] r , zr , z^2r

D) **Gruppi che subordinano un gruppo** ∞^∞ .

[XIII] $\chi(x, y, z)r$

[XIV] $\psi(x, z)r$

[XV] $\varphi(z)r$

AVVERTENZA. — Ricordiamo che le φ, ψ, χ rappresentano *funzioni arbitrarie* rispettivamente di *una*, *due*, *tre* variabili, mentre le ρ_i, σ_j rappresentano funzioni determinate, linearmente indipendenti. Infine la θ rappresenta la soluzione generale (*dipendente da infinite costanti arbitrarie*) di un sistema completamente integrabile di equazioni lineari omogenee alle derivate parziali in due variabili indipendenti (non appartenenti alla classe del MAYER).

CAPITOLO V.

Considerazioni generali per la determinazione dei gruppi transitivi.

40. Consideriamo, come al n. 35, un gruppo G che trasformi in sè la stella di rette

$$(1) \qquad x = \text{cost.} \quad , \quad y = \text{cost.} \; ;$$

e supponiamo oramai che esso sia *transitivo*.

Il gruppo G conterrà, come notammo al n. 35, un sottogruppo invariante intransivo G_1 che lascierà ferma ogni retta (1); e questo sottogruppo, qualora non si riduca alla sola trasformazione identica, apparterrà ad uno dei tipi [I]-[XV] determinati al Capitolo precedente.

Sia allora

$$X = \xi(x, y, z)p + \eta(x, y, z)q + \zeta(x, y, z)r$$

una trasf. inf. generica di G, che non appartenga al sottogruppo intransitivo G_1 o, in altre parole, non lasci ferme le singole rette (1). Poichè la X deve trasformare le une nelle altre codeste rette, essa dovrà imprimere alle x, y degli incrementi costanti lungo ciascuna retta parallela all'asse z. Avremo quindi necessariamente

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \; ;$$

cosicchè, se noi consideriamo le trasf. inf. *accorciate*

$$\bar{X} = \xi p + \eta q \; ,$$

corrispondenti a tutte le trasf. inf. di G, queste $\bar{X}$ genereranno un

gruppo in due variabili, che è appunto quel gruppo accorciato G, secondo cui **G** permuta le une nelle altre le rette della stella invariante (cfr. n. 35) e che potrà essere finito o infinito, ma non potrà ridursi alla sola trasformazione identica, perchè abbiamo escluso che il gruppo **G** sia intransitivo.

Risulta di qui chiaramente quale via dovremo tenere per la determinazione dei nostri gruppi.

Noi dovremo assumere successivamente come gruppo accorciato G un rappresentante di ciascuno di tutti i possibili tipi di gruppi continui, finiti ed infiniti, in due variabili. Fissato come gruppo G uno di codesti gruppi, dovremo prolungarne le trasf. inf.

$$\xi(x, y)p + \eta(x, y)q$$

nella forma

$$X = \xi p + \eta q + \zeta(x, y, z)r ,$$

dove la componente ζ resta da determinarsi. Poi dovremo associare al nostro gruppo G successivamente, come sottogruppo invariante $\mathbf{G}_1$, dapprima la sola trasformazione identica e poi un gruppo appartenente a ciascuno dei tipi di gruppi intransitivi della Tabella della pag. 15; e da ultimo dovremo determinare le componenti ζ delle trasf. inf. prolungate, in modo che sia soddisfatta la proprietà gruppale e il $\mathbf{G}_1$ prefissato risulti invariante.

I tipi di gruppi in due variabili sono stati determinati dal Lie; e noi, in quanto ogni trasformazione della forma

$$x' = x'(x, y) \quad , \quad y' = y'(x, y) \quad , \quad z' = z \tag{2}$$

trasforma in sè la stella (1), potremo in ogni singolo caso supporre che il nostro gruppo accorciato sia stato preventivamente ridotto, mediante una trasformazione (2), alla corrispondente forma tipica del Lie. Ma importa notare che allora non sarà più lecito assumere pel sottogruppo invariante intransitivo $\mathbf{G}_1$ le nostre forme tipiche I-XV (pag. 15), bensì le loro trasformate per mezzo della più generale trasformazione (2)

Osserviamo per altro che fra i gruppi I-XV i soli che per effetto della (2) mutino forma sono i gruppi VII, VIII, XI e XIV. Questi gruppi richiederanno volta per volta considerazioni particolari.

41. — Prima di procedere alle effettive determinazioni, converrà enunciare alcune osservazioni generali sulla forma che nei vari casi possibili deve assumere la componente ζ delle trasf. inf. prolungate (n. prec.).

Perciò è necessario distinguere i gruppi spaziali **G**, che dobbiamo determinare, in varie classi.

Anzitutto in un gruppo siffatto il sottogruppo invariante che lascia ferma ogni singola retta della stella (1) può ridursi alla sola trasformazione identica; e in tal caso noi diremo che il gruppo spaziale è di *prima specie*. Secondo poi che il sottogruppo invariante intransitivo $\mathbf{G}_1$ è ∞^1 o ∞^2 o ∞^3 o ∞^∞ (cioè secondo che esso appartiene ad uno dei tipi A) o B) o C) o D) della solita Tabella) diremo che il gruppo spaziale è di *seconda* o *terza* o *quarta* o *quinta* specie.

a) Si fissi come gruppo accorciato un gruppo G in due variabili, di cui rappresentiamo al solito le trasf. inf. con

$$\xi(x, y)p + \eta(x, y)q \ .$$

I corrispondenti gruppi di *prima specie* saranno della forma

$$\xi p + \eta q + \zeta(x, y, z)r \ ,$$

dove la ζ dovrà dipendere *univocamente* dalle determinazioni della coppia ξ, η, perchè in caso contrario il gruppo conterrebbe, contro l'ipotesi che esso sia di *prima specie*, delle trasf. inf. della forma ζr.

Risulta di qui in particolare che non esistono gruppi *infiniti* di prima specie se non in corrispondenza di gruppi accorciati piani *infiniti*.

b) Pei gruppi di *seconda specie* il sottogruppo invariante intransitivo è della forma

$$\alpha(x, y)r$$

dove, secondo i tre tipi possibili I, II o III (pag. 15), α è arbitraria o variabile in uno spazio funzionale ad un numero infinito o finito di dimensioni. Ad ogni modo dalla

$$(\xi p + \eta q + \zeta r, \alpha r) = [\xi \alpha_x + \eta \alpha_y - \alpha \zeta_z]r$$

ricaviamo che l'espressione $\xi \alpha_x + \eta \alpha_y - \alpha \zeta_z$ deve essere indipendente da z; e, poichè sono tali le ξ, η, α si conclude che *nei gruppi di prima specie la componente ζ è lineare in z.*

c) Pei *gruppi di terza specie* il sottogruppo invariante intransitivo è della forma

$$\alpha(x, y)r \quad , \quad \beta(x, y)zr$$

dove α e β possono presentare i casi indicati pei tipi **IV-VIII** (pagina 15). In ogni caso la β ammette la determinazione 1 (n. 37) e in base alla

$$(\xi p + \eta q + \zeta r, zr) = [\zeta - z\zeta_z]r$$

si conclude

$$\zeta - z\zeta_z = 0 \qquad [\text{modd. } \alpha, \beta z]$$

ossia, indicando con α_1, β_1 due particolari determinazioni di α, β rispettivamente e con ζ una funzione indipendente da z,

$$\zeta = z\bar{\zeta}(x, y) + \alpha_1 + \beta_1 z \log z .$$

Soppresso in ζ il termine α_1 (il che è lecito in quanto il gruppo contiene la $\alpha_1 r$) dalla

$$(\xi p + \eta q + z[\bar{\zeta} + \beta_1 \log z]r \, , \, \alpha r) = [\xi\alpha_x + \eta\alpha_y - \alpha\bar{\zeta} - \beta_1\alpha(\log z + 1)]r$$

concludiamo che quest'ultima parentesi quadra deve essere lineare in z (e indipendente da z). Poichè le $\xi, \eta, \bar{\zeta}, \alpha, \beta_1$ sono indipendenti da z, si conclude necessariamente $\beta_1 = 0$, talchè risulta

$$\zeta = z\bar{\zeta}(x, y) .$$

Abbiamo cioè che *nei gruppi di terza specie la compenente ζ è lineare omogenea nella variabile* z.

Ma possiamo aggiungere una osservazione ulteriore. Le trasf. inf.

$$zr \quad , \quad \xi p + \eta q + z\bar{\zeta}r$$

generano manifestamente da sole un sottogruppo del nostro gruppo di terza specie, e questo sottogruppo, ove si assuma $\log z$ come nuova z, si trasforma nel gruppo

$$r \quad , \quad \xi p + \eta q + \bar{\zeta}r \; ,$$

dove, si ricordi, le componenti $\bar{\zeta}$ sono indipendenti da z.

È quest'ultimo un particolare gruppo di seconda specie, che, per intenderci, diremo *gruppo generatore* dei gruppi di terza specie,

corrispondenti a G. Appar manifesto come ***la determinazione dei gruppi di terza specie si riduca alla costruzione del relativo gruppo generatore.***

d) Nel caso dei ***gruppi di quarta specie*** il sottogruppo invariante intransitivo è della forma

$$\alpha r \ , \ \beta z r \ , \ \gamma z^2 r \ ,$$

dove le α, β, γ sono funzioni ***indipendenti da*** z, suscettibili di varie determinazioni, a seconda del tipo di gruppo che si considera (tipi X-XII della solita Tabella). In ogni caso il gruppo contiene le trasf. inf. r, zr, z^2r. Allora in base alle

$$(r, \xi p + \eta q + \zeta r) = \zeta_z r \ , \ (zr, \xi p + \eta q + \zeta r) = [z\zeta_z - \zeta]r \ ,$$
$$(z^2 r, \xi p + \eta q + \zeta r) = z[z\zeta_z - 2\zeta]r \ ,$$

si conclude senza difficoltà

$$\zeta \equiv 0 \qquad\qquad [\text{modd. } \alpha, \beta z, \gamma z^2],$$

onde abbiamo che ***nei gruppi di quarta specie la componente*** ζ ***si può assumere senz' altro nulla.***

Tutto quindi si ridurrà a indagare se il gruppo in due variabili G sia compatibile col gruppo X, col gruppo XII e con qualche gruppo del tipo XI (cfr. l' osservazione alla fine del n. 40).

e) È infine facile vedere ***come anche pei gruppi di quinta specie la componente*** ζ ***si possa assumere nulla.***

Infatti i gruppi intransitivi dei tipi XIII, XIV, XV sono tutti tali che insieme con ogni loro trasf. infinitesima contengono anche la trasf. inf. stessa moltiplicata per z. Ora dalla

$$(r, \xi p + \eta q + \zeta r) = \zeta_z r$$

si ricava che al gruppo deve appartenere la $\zeta_z r$ e quindi anche la $z\zeta_z r$; e allora dalla

$$(zr, \xi p + \eta q + \zeta r) = [z\zeta_z - \zeta]r$$

concludiamo che ζr appartiene anch' essa al gruppo; talchè, come dicemmo, si può senz' altro porre $\zeta = 0$.

Anche qui dunque tutto si ridurrà a constatare se il gruppo in due variabili G sia compatibile col gruppo XIII, col gruppo XV e con qualche gruppo del tipo XIV.

42. — Dopo queste generalità, possiamo senz'altro procedere alla effettiva determinazione dei nostri gruppi.

Nei seguenti quattro Capitoli noi assumeremo come gruppi accorciati in due variabili ordinatamente:

α) [Cap. VI] *i gruppi piani finiti primitivi;*

β) [Cap. VII] *i gruppi piani infiniti primitivi;*

γ) [Cap. VIII] *i gruppi piani finiti imprimitivi;*

δ) [Cap. IX] *i gruppi piani infiniti imprimitivi.*

Prendendo come gruppi accorciati gruppi piani primitivi (Cap. VI e VII) otterremo *gruppi spaziali semplicemente imprimitivi* nel senso che le rette della stella invariante non saranno associabili in modo da formare una schiera invariante di ∞^1 superficie (cilindriche).

Quando invece come gruppi accorciati assumeremo gruppi piani imprimitivi (Cap. VIII e IX) otteremo *gruppi spaziali doppiamente imprimitivi,* cioè tali che le rette della stella invariante si potranno distribuire su ∞^1 superficie (cilindriche) che dal gruppo saranno permutate le une nelle altre (*).

Capitolo VI.

Gruppi che ammettono un gruppo accorciato finito primitivo.

43. — I gruppi piani finiti primitivi si riducono, come ricordammo al n. 12, a tre tipi rappresentati rispettivamente da:

a) il *gruppo proiettivo totale; b*) il *gruppo lineare generale* (o delle affinità); *c*) il *gruppo lineare speciale* (o delle trasformazioni proiettive equivalenti).

Noi assumeremo questi gruppi successivamente (nell'ordine *c*, *b*, *a*) come gruppi accorciati.

Poichè qui i gruppi accorciati sono finiti, i corrispondenti *gruppi di prima specie* (cioè quelli che non ammettono nessun sottogruppo [invariante] che lasci ferma ogni singola retta $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$) sono anch'essi finiti, cosicchè escono dal quadro del nostro lavoro. Del resto, pel caso che qui consideriamo del gruppo accorciato pri-

(*) Assunti come gruppi accorciati i gruppi tipici del Lie, codeste superficie cilindriche sono semplicemente piani.

mitivo essi furono determinati dal LIE (*). Noi dunque avremo ad occuparci dei gruppi di specie superiore alla prima.

E fra questi, per analoghe ragioni, dovremo considerare solo quelli, il cui sottogruppo invariante intransitivo sia *infinito;* più precisamente dovremo escludere che il sottogruppo invariante intransitivo appartenga ai tipi III, IX e XII della solita Tabella.

Gruppo accorciato lineare speciale: $p \,,\, q \,,\, xp - yq \,,\, yp \,,\, xq$.

44. — GRUPPI DI SECONDA SPECIE. — Qui le componenti ζ delle trasf. inf. prolungate sono lineari in z (n. 41, *b*). Ma se come sottogruppo invariante si assume il gruppo

$$\psi(x\,,y)r \tag{I}$$

dove al solito la ψ è arbitraria, potremo addirittura assumere le trasf. inf. del nostro gruppo sotto la forma

$$p + \alpha_0 zr \quad , \quad q + \beta_0 zr \quad , \quad xp - yq + \gamma zr \quad , \quad yp + \alpha_1 zr \quad , \quad xq + \beta_1 zr \ ,$$

dove le $\alpha_0 \,, \beta_0 \,, \ldots , \beta_1$ sono indipendenti da z, e debbono essere determinate in modo che sia soddisfatta la proprietà gruppale.

Ora notiamo che nella riduzione a forma tipica dei gruppi di seconda specie possiamo usare (senza alterare la forma tipica del gruppo accorciato e la forma lineare delle componenti ζ) di ogni trasformazione della forma

$$x' = x \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = \lambda(x\,,y)z + \mu(x\,,y) \ . \tag{1}$$

Ciò posto, mediante una trasformazione (1) possiamo ridurre subito $\alpha_0 = 0$, e allora, in base alla

$$(p\,, q + \beta_0 zr) = \frac{\partial \beta_0}{\partial x} zr \ ,$$

ricaviamo che β_0 sarà indipendente da x; cosicchè, assumendo come nuova z la $ze^{-\int \beta_0^{-1} dy}$, si ridurrà $\beta_0 = 0$ senza alterare la p. Allora le $p \,, q$, combinate colle altre tre trasf. inf. ci dicono che le $\gamma \,, \beta_1 \,, \alpha_1$

(*) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III; §§ 41-44.

sono costanti e basta combinare queste tre ultime trasf. inf. fra loro per trovare che codeste costanti sono nulle. Otteniamo così il gruppo

$$[C, I] \qquad \begin{array}{|c|} p, q, xp - yq, yp, xq \\ \psi(x, \quad , \end{array}$$

45. — Vediamo in secondo luogo se al gruppo C) si possa associare come sottogruppo invariante un gruppo

$$[II] \qquad \theta(x, y)r ,$$

dove θ è definito da un sistema completamente integrabile di equazioni lineari alle derivate, *non appartenente alla classe del* MAYER. Qui la θ, pur dipendendo da *infinite* costanti arbitrarie, non è arbitraria come dianzi la ψ; perciò le componenti ζ non si potranno senz' altro assumere lineari *omogenee* in z; ma le stesse riduzioni del n. prec. ci permettono di considerarle addirittura indipendenti da z, cosicchè avremo cinque trasf. inf. della forma

$$p + \alpha_0 r \quad , \quad q + \beta_0 r \quad , \quad xp - yq + \gamma r \quad , \quad yp + \alpha_1 r \quad , \quad xq + \beta_1 r \ ,$$

dove le $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \beta_1$ sono funzioni delle sole x, y.

Ma è facile vedere che, sotto le poste ipotesi, il sistema differenziale che definisce la θ deve svanire, cosicchè si ricade sul gruppo $[C, I]$ del n. prec.

Supponendo, com' è lecito, che nell' intorno di $x = y = 0$ le varie determinazioni di θ siano regolari, ordiniamone lo sviluppo secondo le potenze crescenti di x e y, disponendo i termini di ugual grado secondo il crescere dell' esponente di x. Chiamando *ordine* di una determinazione di θ e della corrispondente trasf. inf. θr il minimo grado in x, y dei termini di θ, avremo nel gruppo $[II]$ considerato trasf. inf. di *ogni* ordine, in quanto codesto gruppo è infinito e il nostro gruppo contiene le $p + \alpha_0 r$, $q + \beta_0 r$.

Presa una determinazione di θ che non sia di ordine zero, p. es. la

$$\overline{\theta} = x^m y^n + \ldots ,$$

dove i termini non scritti saranno di grado maggiore di $m + n$ o, almeno, essendo di grado $m + n$ in x, y, saranno in x di grado

maggiore di m, ne dedurremo per combinazione iterata della $xq + \beta_1 r$ colla $\overline{\theta r}$, una determinazione di θ della forma

$$x^{m+n} + \ldots,$$

dove i termini non scritti sono *tutti* di grado maggiore di $m + n$, ed allora, in base alla

$$(yp + \alpha_1 r\ ,\ [x^{m+n} + \ldots]r) = [(m + n)x^{m+n-1}y + \ldots]r$$

e alle alternate ottenute di qui iterando la combinazione con la $yp + \alpha_1 r$, concluderemo che θ ammette $m + n + 1$ determinazioni della forma

$$x^{m+n-l}y^l + \ldots \qquad (l = 0, 1, \ldots, m + n),$$

dove i termini non scritti sono *tutti* di grado maggiore di $m + n$. Potendosi ciò ripetere per funzioni di ogni ordine, abbiamo da ultimo che, per ogni copia di valori interi i, j, la θ ammette (almeno) una determinazione della forma

$$x^i y_i + \ldots,$$

dove i termini non scritti sono di grado maggiore di $i + j$. Basta questa perchè si possa concludere, in base a considerazioni analoghe a quelle del n. 39, che la θ non può essere legata da nessuna equazione differenziale ed è perciò funzione arbitraria di x, y. Riotteniamo dunque il gruppo [C, I], il quale è l'unico gruppo infinito di seconda specie, corrispondente al gruppo lineare speciale.

46. — Gruppi di terza specie — Dobbiamo anzitutto procurarci il *gruppo generatore* (n. 41, C), cioè il gruppo della forma

$$p + \alpha_0 r \quad , \quad q + \beta_0 r \quad , \quad xp - yq + \gamma r \quad , \quad yp + \alpha_1 r \quad , \quad xq + \beta_1 r \quad , \quad r$$

dove le $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \beta_1$ sono indipendenti da z. Con un calcolo elementare, che è inutile riprodurre (*), si trova che un gruppo siffatto si può sempre ridurre alla forma

$$p \quad , \quad q + axr \quad , \quad xp - yq \quad , \quad yp + \frac{1}{2}ay^2zr \quad , \quad xq + \frac{1}{2}ax^2zr \ .$$

(*) Lie-Engel, Op. cit. Bd. III, § 42.

dove a è una costante *essenziale* (cioè non riducibile a valori particolari determinati per mezzo di trasformazioni che lascino inalterata la forma del gruppo).

Resta a vedere quali gruppi intransitivi dei tipi IV-VIII (pagina 15) siano compatibili, come sottogruppi invarianti, colle

$$(2) \qquad p \;,\; q + axzr \;,\; xp - yq \;,\; yp + \frac{1}{2} ay^2zr \;,\; xq + \frac{1}{2} ax^2zr \;.$$

Il tipo IV, cioè $\psi_0(x, y)r$, $\psi_1(x, y)zr$, dà senz'altro il gruppo

$$[C, IV] \qquad \left|\begin{array}{c} p \;,\; q \;,\; xp - yq \;,\; yp \;,\; xq \\ \psi_0(x, y) \;,\; \psi_1(x, y)zr \end{array}\right| .$$

Se assumiamo come sottogruppo intransitivo un gruppo del tipo

$$[V] \qquad \psi_0(x, y)r \;,\; \theta(x, y)zr \;,$$

dove ψ_0 è arbitraria e θ è definita da un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali non appertenente alla classe del MAYER, troviamo, combinando le (2) colla θzr, che l'insieme lineare delle determinazioni di θ deve soddisfare al sistema di congruenze

$$(3) \qquad \theta_x \equiv 0 \;,\; \theta_y \equiv 0 \;,\; x\theta_x - y\theta_y \equiv 0 \;,\; y\theta_x \equiv 0 \;,\; x\theta_y \equiv 0 \qquad [\text{mod. } \theta].$$

E di qui, in base alle stesse considerazioni del n. prec., si conclude che la θ deve essere una funzione arbitraria di x e y, cosicchè si riottiene il gruppo [C, IV].

Il sottogruppo intransitivo sia invece del tipo

$$[VI] \qquad \psi_0(x, y)r \;,\; \rho_i(x, y)zr \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \;,$$

dove le ρ_i sono funzioni determinate, linearmente indipendenti.

Per queste ρ_i, come dianzi per le determinazioni della θ, si trova il sistema di congruenze

$$(4) \qquad \frac{\partial \rho_i}{\partial x} \equiv 0 \;,\; \frac{\partial \rho_i}{\partial y} \equiv 0$$

$$(5) \qquad x\frac{\partial \rho_i}{\partial x} - y\frac{\partial \rho_i}{\partial y} \equiv 0 \;,\; y\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \equiv 0 \;,\; x\frac{\partial \rho_i}{\partial y} = 0 \;. \qquad [\text{modd. } \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n]$$

Le (4) non sono altro che un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti, cosicchè risulta senz'altro

che le ρ_i sono combinazioni lineari a coefficienti costanti arbitrari di funzioni della forma

$$\pi_{l,m} e^{a_l x + b_l y} \tag{6}$$

dove le a_l, b_l sono costanti determinate e le $\pi_{l,m}$ sono polinomi in x, y.

Ma la prima delle (5), applicata ad una qualsiasi delle funzioni (6), ci dice che la

$$\left[x \left(a_l \pi_{l,m} + \frac{\partial \pi_{l,m}}{\partial x} \right) - y \left(b \pi_{l,m} + \frac{\partial \pi_{l,m}}{\partial y} \right) \right] e^{a_l x + b_l y}$$

deve essere una combinazione lineare a coefficienti costanti delle (6); onde, considerando fra le (6) una in cui il polinomio $\pi_{l,m}$ è di massimo grado in x o in y, concludiamo che le costanti a_l, b_l debbono essere tutte nulle, cosicchè le (6), in ultima analisi, si riducono ai polinomi in x e y.

Allora basta tener conto delle (4) (5) per trovare che, se m è il massimo grado di codesti polimoni in x, y, le ρ_i ammettono tutte e sole le determinazioni

$$x^i y^j$$

dove $i + j = 0, 1, 2, \ldots, m$. Si ha dunque il gruppo

$$[\mathrm{C, VI}] \qquad \begin{array}{|c|} p \;,\; q + axzr \;,\; xp - yq \;,\; yp + \frac{1}{2} ay^2 zr \;,\; xq + \frac{1}{2} ax^2 zr \\ \psi(x, y) r \;,\; x^i y^j zr \\ {\scriptstyle i+j=0,1,2,\ldots,m} \end{array}$$

Notiamo che se è $m \geq 2$, si può porre senz' altro $a = 0$.

47. — Consideriamo in terzo luogo il caso in cui il sottogruppo invariante sia del tipo [VII]

$$\varphi_i(x) \rho_i(x, y) r \quad , \quad \varphi(x) zr \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

dove le φ_i, φ sono funzioni arbitrarie e le ρ_i funzioni determinate, di cui nessuna combinazione lineare a coefficienti funzioni della sola x è identicamente nulla. Di più abbiamo $\rho_1 = 1$.

Ricordiamo che, volendo tener fissa la forma tipica del gruppo lineare speciale, come gruppo accorciato, non possiamo associargli

senz' altro il gruppo VII, ma un suo trasformato per mezzo della più generale trasformazione della forma (cfr. n. 40)

$$x' = x'(x, y) \quad , \quad y' = y'(x, y) \quad , \quad z' = z \; .$$

Ora un tale gruppo trasformato avrà, ove μ indichi una funzione determinata di x e y, la forma

$$\varphi_i(\mu)\rho_i(x, y)r \quad , \quad \varphi(\mu)zs \qquad (i = 1, 2, \dots n) \; , \tag{7}$$

dove, per semplicità di notazione, abbiamo rappresentato con ρ_i le funzioni trasformate delle ρ_i primitive.

Ma è facile convincersi che se un gruppo di terza specie contiene un sottogruppo (7) contiene anche l' intero sottogruppo intransitivo IV, cioè $\psi_0(x, y)r$, $\psi_1(x, y)zr$. Infatti le trasf. inf. $\varphi(\mu)zr$ generano un sottogruppo invariante del nostro gruppo e per le funzioni $\varphi(\mu)$, dipendenti da infinite costanti arbitrarie, possiamo ripetere ciò che al n. prec. si è detto per le θ; talchè risulta che il coefficiente di zr nel gruppo spaziale deve essere necessariamente una funzione arbitraria di x, y. Allora, poichè nel sottogruppo (7) è pur sempre $\rho_1 = 1$ e quindi abbiamo nel gruppo la r, concludiamo, in base alla

$$(r \quad , \quad \psi_1(x, y)zr) = \psi_1(x, y)r \; ,$$

che anche il coefficiente di r è funzione arbitraria di x, y, e quindi il nostro gruppo spaziale, contenendo il sottogruppo intransitivo IV, si riduce al tipo [C , IV] del n. prec.

Ad analogo risultato, ma attraverso una discussione un po' laboriosa, si giunge anche nel caso in cui il nostro gruppo contenga un sottogruppo invariante intransitivo del tipo

$$\varphi_i(x)\rho_i(x, y)r \quad , \quad \sigma_j(x)zr \qquad (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m) \tag{VIII}$$

dove le ρ_i, σ_j sono funzioni determinate e le φ_i funzioni arbitrarie. Anche qui naturalmente assumeremo come sottogruppo invariante un trasformato di VIII, aventi la forma

$$\varphi_i(\mu)\rho_i(x, y)r \quad , \quad \sigma_j(\mu)zr \; ,$$

dove μ è una funzione determinata di x, y e si è scritto senz' altro ρ_i al posto della trasformata delle ρ_i primitive.

Quanto alle $\sigma_j(\mu)zr$, avremo, in base alle stesse considerazioni del n. prec., che esse, saranno della forma

$$x^i y^l zr \tag{8}$$

dove i, l assumono tutti i possibili valori, interi e positivi, per cui è $i+l=0, 1, 2, \ldots$ fino ad un certo numero intero m_1. Ma se è $m_1 > 0$, alternando iteratamente le (8) con le $\varphi_i(\mu)\rho_i(x, y)r$, troviamo che le determinazioni del coefficiente di r costituiscono un insieme che ha infinite dimensioni tanto rispetto alla x quanto rispetto alla y, o in altre parole, che codesto coefficiente è una funzione arbitraria di x, y; cosicchè ricadiamo nei casi esauriti nel n. prec. Dobbiamo dunque supporre $m_1 = 0$, e le $\sigma_j(\mu)zr$ si ridurranno all'unica zr.

Resterebbe da determinare il sottogruppo invariante

$$\varphi_i(\mu)\rho_i(x, y)r \qquad (i=1, 2, \ldots, n) ; \tag{9}$$

ma vedremo che questo non può essere il *massimo* sottogruppo della forma αr contenuto in un gruppo spaziale soddisfacente alle nostre precedenti ipotesi, e che anzi quest' ultimo, comprendendo il sottogruppo $\psi(x, y)r$, deve essere un caso particolare del tipo [C, VI] del n. prec.

Supposto pel momento che il gruppo (9) sia il massimo sottogruppo della forma αr, indichiamo con λ la più generale funzione dell' insieme lineare delle $\varphi_i\rho_i$; in quanto (9) è invariante nel gruppo, λ dovrà soddisfare al sistema di congruenze differenziali

$$\lambda_x \equiv 0, \lambda_y - ax\lambda \equiv 0, x\lambda_x - y\lambda_y \equiv 0, y\lambda_x - \frac{1}{2}ay^2\lambda \equiv 0, x\lambda_y - \frac{1}{2}ax^2\lambda \equiv 0 \quad [\text{mod. } \lambda]$$

Ora per tener conto di siffatte congruenze, convien prendere le mosse dalle equazioni di definizione del gruppo (9). Ora ricordiamo che quest' ultimo gruppo è il trasformato, per mezzo di una trasformazione

$$x = \mu(x', y') \quad , \quad y = \mu(x', y') \quad , \quad z = z' \tag{11}$$

del gruppo

$$\varphi_i(x)\rho_i(x, y)r \qquad (i=1, 2, \ldots, n) ,$$

il quale è definito dalle equazioni

$$\xi = \eta = 0 \quad , \quad \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0 \tag{12}$$

e da un' equazione differenziale lineare

$$\alpha_0\zeta + \alpha_1\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{1}{2!}\alpha_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\alpha_n\frac{\partial^n\zeta}{\partial y^n} = 0 , \tag{13}$$

dove i coefficienti α sono funzioni determinate di x, y.

Per avere le equazioni di definizione di (9) dovremo trasformare le (12), (13) per mezzo della (11); cosicchè, oltre le (12) che restano inalterate, otterremo per la trasformata di ζ, che convenimmo di rappresentare con λ, un' equazione lineare alle derivate parziali d' ordine n

$$\Sigma \frac{1}{m!\,l!} \mu_{m,l} \frac{\partial^{m+l}\lambda}{\partial x^m \partial y^l} = 0 , \tag{13'}$$

trasformata della (13), dove le μ sono funzioni determinate di x, y. Quest' equazione, appunto in quanto è ottenuta per trasformazione di un' equazione (9) nelle sole derivate rispetto ad y, gode di particolari proprietà, che noi per altro non indagheremo, perchè a condurci al nostro risultato basterà il tener conto delle congruenze (10), cui deve soddisfare la soluzione generale λ della (13'). Si vedrà appunto che non esiste nessuna equazione (13') la quale soddisfi alle condizioni or ora indicate.

48. — Ci varremo qui, per la prima volta nel corso di questo lavoro, delle notazioni e dei concetti più elementari del *Calcolo funzionale distributivo* del PINCHERLE, che nel seguito di queste ricerche e sopratutto nei Cap. VIII e IX, ci torneranno di validissimo sussidio. È quindi opportuno che qui ci indugiamo un poco a chiarire quei simboli, quelle convenzioni e quei pochissimi risultati generali che avremo poi frequenti occasioni di richiamare (*)

Indicando con D_x, D_y le operazioni di *derivazione parziale* rispetto ad x e rispetto ad y (operazioni fra loro *commutabili*) e convenendo che i simboli D_x^0, D_y^0 stiano entrambi a rappresentare l'*opeperazione identica* (cioè quella operazione che eseguita su di una qualsiasi funzione dà per risultato la funzione medesima) consideriamo la operazione

$$F = \Sigma \frac{1}{m!\,l!} \mu_{m,l} D_x^m D_y^l \qquad m + l \leq n ,$$

o *forma lineare alle derivate parziali* d' ordine n, che applicata ad una funzione indeterminata λ e uguagliata a zero dà la equazione

(*) Cfr. PINCHERLE-AMALDI, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all' Analisi.* Bologna, Zanichelli, 1901. — Vedi in particolare la *Nota IV* (pagg. 477-479).

(13'). Il fatto che λ sia la più generale soluzione della (13') è espresso dal Pincherle, dicendo che l'insieme lineare di tutte le determinazioni di λ costituisce lo ***spazio delle radici*** della operazione F. Ora, accanto alla operazione F, il Pincherle considera quelle operazioni che egli chiama ***derivate funzionali parziali*** della ***F rispetto alla D_x e alla D_y***. Queste si ottengono formalmente, considerando la F come un polinomio ordinato secondo le potenze dei simboli D_x, D_y e derivando la F parzialmente rispetto a codesti simboli secondo la regola di derivazione delle funzioni razionali intere. Così le derivate funzionali di F dell'indice 1 sono date dalle due forme di ordine $n-1$:

$$F_{1,0} = \sum_{m,l} \frac{1}{m!\,l!} \mu_{m+1,l} D_x^m D_y^l \quad , \quad F_{0,1} = \sum_{m,l} \frac{1}{m!\,l!} \mu_{m,l+1} D_x^m D_y^l \; .$$

L'importanza della considerazione di queste derivate funzionali appar senz'altro dalla seguente formola fondamentale (analoga in qualche modo alla formola del Taylor per le funzioni razionali intere) che dà lo sviluppo della F applicata al prodotto di due funzioni α e β di x, y (*):

$$F(\alpha\beta) = \sum_{m,l} \frac{1}{m!\,l!} \frac{\partial^{m+l}\alpha}{\partial x^m \partial y^l} F_{m,l}(\beta) \; . \tag{14}$$

49. — Ciò premesso, torniamo al nostro gruppo (n. 47) e teniamo conto del fatto che l'insieme delle radici λ della forma F deve soddisfare alle congruenze (10).

Le quattro congruenze

$$\lambda_x \equiv 0 \quad , \quad \lambda_y - ax\lambda \equiv 0 \quad , \quad x\lambda_x - y\lambda_y \equiv 0 \quad , \quad x\lambda_y - \frac{1}{2}ax^2\lambda \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \lambda)$$

ci dicono che ogni radice λ di F soddisfa simultaneamente alle

$$F(\lambda_x) = 0 \quad , \quad F(\lambda_y - ax\lambda) = 0 \quad , \quad F(x\lambda_x - y\lambda_y) = 0 \quad , \quad F(x\lambda_y - \frac{1}{2}ax^2\lambda) = 0 \; .$$

Cominciando dalla prima di queste equazioni, abbiamo che la forma di ordine $n+1$

$$FD_x$$

(*) Questa formola vale anche, sotto opportune limitazioni relative alla convergenza, per le più generali operazioni, rappresentate da *serie di potenze* dei simboli D_x, D_y.

(con cui intendiamo rappresentare l'operazione che si ottiene eseguendo prima la D_x e poi la F) ammette come radice ogni radice della forma F. Ma a siffatta condizione soddisfa anche la $D_x F$ (in generale distinta dalla F) e quindi anche la

$$D_x F - F D_x ,$$

e, poichè questa è al più di ordine n, si conclude che per una certa determinata funzione α sarà *identicamente*

$$D_x F - F D_x = \alpha F .$$

Ora quest'equazione funzionale implica pei coefficienti di F le relazioni

$$\frac{\partial \mu_{m.l}}{\partial x} = \alpha \mu_{m.l}$$

e quindi

$$\mu_{m.l} = \nu_{m.l}(y) e^{\int \alpha dx} ,$$

dove le $\nu_{m,l}$ sono *indipendenti da* x.

Basta allora dividere ambo i membri della (13') per $e^{\int \alpha dx}$ per rendere i coefficienti di F indipendenti da x: compiuta questa riduzione avremo *identicamente*

$$F_x D = D_x F . \tag{16}$$

Passando alla seconda delle (15), abbiamo, in base ad essa e alla formola fondamentale (14) del n. prec., che la forma d'ordine $n+1$

$$F D_y - a r F - a F_{1.0}$$

e quindi anche la

$$F D_y - a F_{1.0}$$

ammette tutte le radici di F. Tale sarà ancora la $D_y F$ e quindi la

$$D_y F - F D_y + a F_{1.0} ,$$

e poichè questa è di ordine non superiore ad n, avremo *identicamente* per una certa funzione β della sola y (che può anche esser nulla)

$$D_y F - F D_y + a F_{1.0} = \beta F .$$

Di qui, identificando i coefficienti, si ricava

$$\frac{d\mu_{m.l}}{dy} + a\mu_{m+1.l} = \beta\mu_{m.l}$$

ossia

$$\mu_{m.l} = k_{m.l}e^{\int \beta dy}$$

dove

$$\frac{dk_{m.l}}{dy} + ak_{m+1.l} = 0.$$

Immaginando anche qui di aver diviso preventivamente ambo i membri della (13′) per $e^{\int\beta dy}$, avremo *identicamente*

$$FD_y = D_yF + aF_{1.0} \tag{17}$$

e potremo senz'altro supporre

$$\frac{d\mu_{m.l}}{dy} + a\mu_{m+1,l} = 0 .$$

Ciò premesso, consideriamo le due ultime equazioni (15), le quali ci dicono, in base alla (14) del n. prec.. che le forme

$$xFD_x + F_{1.0}D_x - yFD_y - F_{0.1}Dy$$
$$xFD_y + F_{1.0}D_y - \frac{1}{2}ax^2F - axF_{1.0} - \frac{1}{2}aF_{2.0}$$

ammettono come radici tutte le radici di F. Di qui tenuto conto delle identità (16) (17) e trascurati i termini che si annullano singolarmente per ogni radice di F, deduciamo che per certe due funzioni determinate γ e k sarà *identicamente*

$$F_{1.0}D_x - ayF_{1.0} - F_{0.1}D_y = \gamma F$$
$$F_{1.0}D_y - \frac{1}{2}aF_{2.0} \qquad = kF .$$

Queste due identità funzionali si traducono nei due sistemi di relazioni fra coefficienti

$$a) \qquad (m - l - \gamma)\mu_{m.l} = ay\mu_{m+1.l}$$
$$b) \qquad 2l\mu_{m+1,l-1} - a\mu_{m+2.l} = 2k\mu_{m.l} .$$

Considerando i coefficienti μ dei termini di ordine n in F, cioè ponendo $m = n - l$ ricaviamo dalla a) che uno al più di codesti

coefficienti può essere diverso da zero. Ma se si suppone che sia $\mu_{n-p,p} \gtrless 0$, rileviamo dalla b), ponendo $m = n - p$, $l = p$ che è $k = 0$ e allora, ponendo $m = n - p - 1$, $l = p + 1$, si deduce dalla b)

$$2(p+1)\mu_{n-p,p} = 0 \ ;$$

il che ci dice che nella F *tutti* i coefficienti dei termini di ordine n sono nulli, o, in altre parole, non vi è nessuna forma F la cui soluzione generale soddisfi il sistema di congruenze (10).

Abbiamo dunque che la λ, non essendo legata da nessuna equazione differenziale tranne la $\frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0$, è una funzione arbitraria di x, y e il nostro gruppo è un caso particolare di [c, VI] (corrispondente all'ipotesi $m = 0$). In conclusione i gruppi di terza specie corrispondenti al gruppo lineare speciale sono tutti riducibili ai due tipi [c, IV] (pag. 25) e [c, VI] (pag. 26).

50. — GRUPPI DI QUARTA E QUINTA SPECIE. — Si ha pei gruppi di quarta e quinta specie l'unico tipo

$$[c, X] \quad \left| \begin{array}{c} p\ ,\ q\ ,\ xp - yq\ ,\ yp\ ,\ xq \\ \psi_0(x,y)r\ ,\ \psi_1(x,y)zr\ ,\ \psi_2(x,y)z^2r \end{array} \right| ,$$

in quanto un sottogruppo intransitivo del tipo XI, vale a dire della forma

$$\varphi_0(\mu)r \quad , \quad \varphi_1(\mu)zr \quad , \quad \varphi_2(\mu)z^2r$$

dove μ è funzione di x, y implica, come risulta da considerazioni analoghe a quelle del n. prec. l'esistenza di un più ampio sottogruppo intransitivo della forma XI.

In modo analogo pei gruppi di quinta specie si esclude la possibilità che il massimo sottogruppo intransitivo sia del tipo XIV; cosicchè si hanno soltanto i due tipi

$$[c, XIII] \quad \left| \begin{array}{c} p\ ,\ q\ ,\ xp - yq\ ,\ yp\ ,\ xq \\ \chi(x,y,z)r \end{array} \right| \qquad [c, XV] \quad \left| \begin{array}{c} p\ ,\ q\ ,\ xp - yq\ ,\ yp\ ,\ xq \\ \varphi(z)r \end{array} \right|$$

Gruppo accorciato lineare: p, q, xp, yp, xq, yq.

51. — Poichè il gruppo lineare contiene come sottogruppo invariante il gruppo lineare speciale, qui basterà aggiungere una trasf. inf. della forma

$$xp + yq + \zeta(x, y, z)r$$

ai gruppi dianzi ottenuti corrispondentemente al gruppo lineare speciale.

La determinazione della componente ζ si compie con calcoli così agevoli che basterà indicare i risultati. I tipi di gruppi che si ottengono sono i seguenti:

[b, I] $p, q, xp - yq, yp, xq, xp + yq + azr$
$\psi(x, y)r$

[b, IV] p, q, xp, yp, xq, yp
$\psi_0(x, y)r, \psi_1(x, y)zr$

[b, VI] p, q, xp, yp, xq, yq
$\psi(x, y)r, x^i y^j zr$
$i + j = 0, 1, 2, \ldots, m$

[b, X] p, q, xp, yp, xq, yq
$\psi_0(x, y)r, \psi_1(x, y)zr, \psi_2(x, y)z^2r$

[b, XIII] p, q, xp, yp, xq, yq
$\chi(x, y, z)r$

[b, XV] p, q, xp, yp, xq, yq
$\varphi(z)r$

Gruppo accorciato proiettivo totale

$p, q, xp, yp, xq, yq, x[xp + yq], y[xp + yq]$.

52. — I *gruppi di seconda specie* che contengono il sottogruppo intransitivo [I]: $\psi(x, y)r$, appartengono tutti al tipo (*):

[a, I] $p, q, xp + azr, yp, xq, yq + azr, x^2p + xyq + 3axzr, xyp + y^2q + 3ayzr$
$\psi(x, y)r$

(*) I calcoli elementari cui si è qui condotti non diversificano sostanzialmente da quelli svolti in Lie-Engel, op. cit. Bd. III, pag. 168.

E le stesse considerazioni del n. 45 valgono a dimostrare anche qui la impossibilità che il sottogruppo intransitivo massimo sia del tipo [II]: $\theta(x, y)r$, dove θ sia una funzione dipendente da ***infinite*** costanti arbitrarie, ma non essa stessa arbitraria.

Fra i *gruppi di terza specie* abbiamo anzitutto il solito gruppo massimo

$$[a, IV] \qquad \left| \begin{array}{c} p, q, xp, yp, xq, yq, x[xp+yq], y[xp+yq] \\ \psi_0(x, y)r, \psi_1(x, y)zr \end{array} \right|$$

Per avere gli altri gruppi di terza specie dobbiamo prendere le mosse dal *gruppo generatore* (n. 41, *c*), il quale, come si trova agevolmente, è in questo caso

$$p, q, xp, yp, xq, yq, x[xp+yq+ar], y[xp+yq+ar], r.$$

Come al n. 46 si trova che il sottogruppo intransitivo ***massimo*** non può essere del tipo [V]; $\psi(x, y)r$, $\theta(x, y)zr$, dove θ dipenda da ***infinite*** costanti arbitrarie, senz'essere addirittura arbitraria.

Se poi il sottogruppo intransitivo massimo è del tipo [VI]: $\psi(x, y)r$, $\rho_i(x, y)zr$ basta ripetere le considerazioni dello stesso numero 46 e tener conto della presenza nel gruppo delle

$$x^2p + xyq + axzr, \quad xyp + y^2q + ayzr,$$

per concludere che le ρ_i si debbono ridurre all'unica $\rho_1 = 1$; si ha così il gruppo

$$[a, VI] \qquad \left| \begin{array}{c} p, q, xp, yp, xq, yq, x[xp+yq+azr], y[xp+yq+azr] \\ \psi(x, y)r, \; zr \end{array} \right|$$

E nessun gruppo ammette un sottogruppo intransitivo massimo dei tipi VII, VIII.

Infine i *gruppi di quarta e quinta specie* sono riducibili ai seguenti tre tipi:

$$[a, X] \qquad \left| \begin{array}{c} p, q, xp, yp, xq, yq, x[xp+yq], y[xp+yq] \\ \psi_0(x, y)r, \; \psi_1(x, y)zr, \; \psi_2(x, y)z^2r \end{array} \right|$$

[a, XIII]	$p, q, xp, yp, xq, yq, x[xp+yq], y[xp+yq]$ $\chi(x, y, z)r$
[a, XV]	$p, q, xp, yp, xq, yq, x[xp+yq], y[xp+yq]$ $\varphi(z)r$

Capitolo VII.

Gruppi che ammettono un gruppo accorciato infinito primitivo.

53. — In questo capitolo assumeremo come gruppi accorciati i gruppi infiniti primitivi in due variabili, che, come già abbiamo ricordato al n. 27, si riducono ai seguenti due tipi:

A) *gruppo totale in due variabili;*

B) *gruppo delle trasformazioni proporzionali;*

C) *gruppo delle trasformazioni equivalenti.*

Procederemo nell'ordine C, B, A, e, a differenza di quanto facemmo nel cap. prec., avremo a considerare anche i *gruppi di prima specie*, cioè quelli, in cui il sottogruppo che lascia ferma ogni retta della stella invariante si riduce alla sola trasformazione identica.

Gruppo accorciato equivalente: $-\psi_x(x, y)p + \psi_y(x, y)q$.

54. — Gruppi di prima specie. — Un gruppo siffatto sarà della forma

$$-\psi_y p + \psi_x q + \zeta(x, y, z)r ,$$

dove la componente ζ sarà una funzione dipendente dalla *funzione generatrice* ψ della trasf. inf. accorciata, ed anzi, poichè nel gruppo spaziale non deve esistere nessuna trasf. inf. della forma αr, ad ogni determinazione di ψ corrisponderà una determinazione *unica* per la ζ. Tenuto conto del fatto che qui consideriamo gruppi *continui*, cioè definiti da equazioni differenziali, avremo che la relazione tra ψ e ζ sarà definita da una equazione

$$\zeta = A(\psi) ,$$

dove A rappresenta una forma lineare alle derivate parziali di un certo ordine s

$$A = \Sigma \frac{1}{m!\,n!}\,\alpha_{m,n} D_x^m D_y^n \qquad\qquad m + n < s\ ,$$

dove le $\alpha_{m,n}$ sono funzioni determinate di x, y, z.

Ora si tratta appunto di trovare effettivamente codeste funzioni α.

Siccome il gruppo piano equivalente contiene come sottogruppo il gruppo lineare speciale, il nostro gruppo spaziale conterrà un sottogruppo finito di prima specie della forma

$$(1) \qquad p + \dots\ ,\ q + \dots\ ,\ xp - yq + \dots\ ,\ yp + \dots\ ,\ xq + \dots\ ,$$

dove abbiamo designato con *puntini* le componenti ζr della trasf. inf. considerate.

Ora i gruppi (1) sono riducibili ai due tipi seguenti (*):

$$\alpha) \qquad p\ ,\ q\ ,\ xq + r\ ,\ xp - yq - 2zr\ ,\ yp - z^2 r$$
$$\beta) \qquad p\ ,\ q\ ,\ xq\ ,\ xp - yq\ ,\ yp\ .$$

Noi dovremo esaminare separatamente i due casi, che il nostro gruppo spaziale contenga un sottogruppo del tipo α) o del tipo β).

Cominciamo dal primo caso, e supponiamo senz'altro che sul gruppo spaziale sia stata preventivamente eseguita una trasformazione che abbia ridotto il sottogruppo (1) alla forma tipica α).

Poichè le funzioni generatrici delle trasf. inf. accorciate delle α) sono rispettivamente

$$-y\ ,\ x\ ,\ \frac{1}{2}x^2\ ,\ -xy\ ,\ -\frac{1}{2}y^2$$

e poichè la costante non è funzione generatrice di alcuna trasf. inf., avremo intanto, per la forma differenziale A le condizioni

$$A(1) = 0\ ,\ A(x) = 0\ ,\ A(z) = 0\ ,\ A(x^2) = 2\ ,\ A(xy) = 2z\ ,\ A(y^2) = 2z^2$$

ossia

$$(2) \qquad \alpha_{0,0} = \alpha_{1,0} = \alpha_{0,1} = 0\ ,\ \alpha_{2,0} = 2\ ,\ \alpha_{1,1} = 2z\ ,\ \alpha_{0,2} = 2z^2\ .$$

(*) LIE ENGEL, *Op. cit.*, Bd. III, § 42.

Ciò premesso, combiniamo le α) colla trasf. inf. generale del nostro gruppo. Dalle

$$(p\ ,\ -\psi_y p+\psi_x q+A(\psi)r)=-\psi_{xy}p+\psi_{xx}q+D_xA(\psi)r\ ,$$
$$(q\ ,\ -\psi_y p+\psi_x q+A(\psi)r)=-\psi_{yy}p+\psi_{xy}q+D_yA(\psi)r\ ,$$

ricaviamo, poichè le funzioni generatrici delle trasf. inf. accorciate dei secondi membri sono rispettivamente ψ_x, ψ_y, che per *ogni* possibile funzione ψ deve essere

$$D_xA(\psi)=A(\psi_x)\ ,\ D_yA(\psi)=A(\psi_y)\ ;$$

cioè, in simboli operatori, dobbiamo avere identicamente

$$D_xA=AD_x\ ,\ D_yA=AD_y\ . \tag{3}$$

In altre parole la forma A è commutabile colle D_x, D_y, e ciò basta perchè si possa concludere che i coefficienti $\alpha_{m,n}$ della A sono indipendenti da x, y (*).

Teniamo conto, allora, delle

$$(xq+r,-\psi_y p+\psi_x q+A(\psi)r)=-x\psi_{yy}p+[x\psi_{xy}+\psi_y]q+[xD_yA(\psi)+D_zA(\psi)]r$$
$$(yp-z^2r,-\psi_y p+\psi_x q+A(\psi)r)=-[y\psi_{xy}+\psi_x]p+y\psi_{xx}q+$$
$$+[yD_xA(\psi)-z^2D_zA(\psi)+2zA(\psi)]r\ .$$

Le funzioni generatrici corrispondenti ai secondi membri sono rispettivamente $x\psi_y$ e $y\psi_x$, talchè dovremo avere, per *ogni* funzione ψ,

$$A(x\psi_y)=xD_yA(\psi)+D_zA(\psi)$$
$$A(y\psi_x)=yD_xA(\psi)-z^2D_zA(\psi)+2zA(\psi)\ ,$$

ossia, traducendo in simboli operatori e tenendo conto delle (3) e della solita formola fondamentale del PINCHERLE (n. 48),

$$A_{1,0}D_y-D_zA=0$$
$$A_{0,1}D_x+z^2D_zA-2zA=0\ .$$

Queste due equazioni simboliche dànno pei coefficienti $\alpha_{m,n}$ di A, che sono funzioni della sola z, i due sistemi di relazioni

$$\alpha'_{m,n}=n\alpha_{m+1,n-1} \tag{a}$$
$$z^2\alpha'_{m,n}-2z\alpha_{m,n}+m\alpha_{m-1,n+1}=0\ , \tag{b}$$

dove con l'accento si indica la derivazione rispetto a z.

(*) Cfr. p. es., PINCHERLE-AMALDI, *Op. cit.*, Cap. VII.

Notiamo che le (a) (b) sono soddisfatte dai coefficienti (2), già determinati dianzi, dei termini di ordine inferiore a 3.

Restano da determinare gli altri di ordine superiore a 2: le (a) ci dicono che i coefficienti dei termini di ordine m

$$\alpha_{m,0}\ ,\ \alpha_{m-1,1}\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_{0,m}$$

costituiscono un sistema completo di *polinomi dell'* APPELL corrispondenti a certe costanti (*)

$$c_{m,0}\ ,\ c_{m-1,1}\ ,\ \ldots\ .\ c_{0,m}\ ;$$

cioè otteniamo

$$\alpha_{m-p,p}=c_{m,0}z^p+\binom{p}{1}c_{m-1,1}z^{p-1}+\binom{p}{2}c_{m-2,2}z^{p-2}+\ldots+c_{m-p,p}\ .$$

Ma ponendo nella (b)

$$n=0\ ,\ \alpha_{m,0}=c_{m,0}\ ,\ \alpha_{m-1,1}=c_{m,0}z+c_{m-1,1}\ .$$

si trova

$$(m-2)c_{m,0}=0\ ,\ mc_{m-1,1}=0$$

cosicchè si conclude che per $m>2$ è $\alpha_{m,0}=\alpha_{m-1,1}=0$; e allora le (b) dànno, per via ricorrente, che tutti i coefficienti $\alpha_{m,n}$ dei termini di ordine maggiore di 2 sono identicamente nulli.

In conclusione la forma A è del second'ordine ed è data, ove si tenga conto delle (2), da

$$A=D_x^2+2zD_xD_y+z^2D_y^2\ .$$

cosicchè otteniamo il gruppo di prima specie

$$[C,0]\qquad -\psi_y(x,y)p+\psi_x(x,y)q+[\psi_{xx}+2z\psi_{xy}+z^2\psi_{yy}]r$$

Resta da esaminare il caso in cui il nostro gruppo spaziale contenga il sottogruppo β) della pag. 37. Ma allora si trova anzitutto che nella forma differenziale A mancano tutti i termini di

(*) Cfr. p. es., PINCHERLE-AMALDI, *Op. cit.*, pag. 130 e segg.

ordine inferiore a 3 e, di conseguenza, le stesse considerazioni svolte pocanzi portano a concludere che la A è identicamente nulla. Si è così condotti al gruppo in due variabili $-\psi_y p + \psi_x q$.

55. — Gruppi di seconda specie. — Ricordiamo che per i gruppi di questa specie la componente ζ delle trasf. inf. prolungate.

$$-\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q + \zeta(x, y, z)r$$

deve essere lineare in z (n. 41, c); cosicchè, quando assumiamo come sottogruppo intransitivo il gruppo [I]: $\psi_0(x, y)r$, potremo porre senz'altro

$$\zeta = z\bar{\zeta}(x, y),$$

dove la $\bar{\zeta}$ sarà una funzione dipendente dalla funzione generatrice ψ della trasf. inf. acconciata. Anzi, poichè nel gruppo non deve esistere nessuna trasf. inf. della forma $z\alpha(x, y)r$, ad ogni determinazione della ψ dovrà corrispondere per la $\bar{\zeta}$ una determinazione *unica*, onde sarà

$$\bar{\zeta} = A(\psi),$$

dove A rappresenta una forma lineare alle derivate parziali e *a coefficienti indipendenti* da r, e il nostro gruppo sarà della forma

$$-\psi_y p + \psi_x q + zA(\psi)r, \quad \psi_0(x, y)r. \tag{4}$$

Esso conterrà un sottogruppo avente come gruppo accorciato il gruppo lineare speciale, cioè precisamente il sottogruppo

$$\left\{ \begin{array}{l} p - zA(y)r, \quad q + zA(x)r, \quad xp - yq - zA(xy)r, \\ yp - \frac{1}{2}zA(y^2)r, \quad xq + \frac{1}{2}zA(x^2)r, \quad \psi_0(x, y)r, \end{array} \right. \tag{5}$$

il quale come si è visto al n. 44, si può ridurre *con trasformazioni parziali che non alterano la forma di* (4), alla forma tipica

$$p, \quad q, \quad xp - yq, \quad xq, \quad \psi_0(x, y)r. \tag{c, I}$$

Supposta eseguita siffatta riduzione, avremo per la forma A le condizioni

$$A(x) = 0, \quad A(y) = 0, \quad A(x^2) = 0, \quad A(xy) = 0, \quad A(y^2) = 0. \tag{6}$$

Di più la presenza nel gruppo delle traslazioni infinitesime p, q implica per la forma A la commutabilità con le D_x, D_y (Cfr. n. prec.); onde si conclude che i coefficienti di A sono ***costanti***. Posto

$$A = \Sigma \frac{1}{m!\,n!} a_{m,n} D_x^m D_y^n \ ,$$

dove le $a_{m,n}$ indicano costanti, avremo, in base alle (6),

$$a_{0,0} = a_{0,1} = a_{1,0} = a_{2,0} = a_{1,1} = a_{0,2} = 0 \ ; \tag{7}$$

e di più, tenuto conto delle alternate

$$\begin{aligned}(yp\,, -\psi_y p + \psi_x q + zA(\psi)r) &= -[y\psi_{xy} + \psi_x]p + y\psi_{xx}q + zyD_xA(\psi)r\\ (xq\,, -\psi_y p + \psi_x q + zA(\psi)r) &= -x\psi_{yy} + [x\psi_{xy} + \psi_y]q + zxD_yA(\psi)r \ ,\end{aligned}$$

i cui secondi membri corrispondono alle funzioni generatrici $y\,\psi_x$, $x\,\psi_y$, dovremmo avere per qualsiasi

$$yD_xA(\psi) = A(y\psi_x) \quad , \quad xD_yA(\psi) = A(x\psi_y) \ .$$

ossia, traducendo in simboli operatori e sviluppando i secondi membri,

$$A_{0,1}D_x = 0 \quad , \quad A_{1,0}D_y = 0 \ .$$

Queste identità funzionali non possono essere verificate, se non sono identiche nelle due derivate funzionali del 1.° ordine $A_{0,1}$, $A_{1,0}$ di A, il che implica che la A deve essere, al più, di ordine zero. Allora in base alle (7) si conclude senz'altro che la A è identicamente nulla e si ottiene il gruppo

$$\text{[C, I]} \qquad \left|\, -\psi_y(x,y)p + \psi_x(x,y)q \ , \ \psi_0(x,y)r \,\right| \ .$$

56. — Se assumiamo come sottogruppo invariante un gruppo della forma

$$\text{[II]} \qquad \theta(x,y)r \ ,$$

dove θ dipenda da ***infinite*** costanti arbitrarie, si dimostra, colle stesse considerazioni delle pagg. 23-24, che la θ non può essere che una funzione arbitraria di x, y; cosicchè si ritorna al caso esaurito nel n. prec.

Resta dunque da considerare l'ipotesi che il sottogruppo invariante sia un gruppo finito del tipo

$$\text{[III]} \qquad \rho_i(x, y)r \qquad (i = 1, 2, \dots, n) .$$

Le trasf. inf. prolungate saranno qui della forma

$$(8) \qquad -\psi_y p + \psi_x q + |zA(\psi) + \zeta| r ,$$

dove, al solito, A rappresenta una forma lineare alle derivate parziali o coefficienti indipendenti da r e la ζ è una funzione di x, y, dipendente dalla ψ; ma, poichè nel gruppo abbiamo le trasf. inf. $\rho_i r$, per una data determinazione di ψ la ζ sarà, in generale, determinata soltanto *a meno di una combinazione lineare a coefficienti costanti delle* ρ_i, o, come noi diremo in casi analoghi, le eventuali infinite determinazioni di ζ, corrispondenti ad una data determinazione di ψ, saranno fra loro *congrue* mod. $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Beninteso, la corrispondenza fra le funzioni ψ e ζ deve essere definita da equazioni differenziali (e non da equazioni funzionali più generali).

Qui anzitutto possiamo mostrar subito come si possa supporre che la forma A sia identicamente nulla. Infatti le trasformazioni che occorrono per ridurre un gruppo della forma (5) [pag. prec.] alla forma [c, I] sono del tipo

$$x' = x , \quad y' = y , \quad z' = z\lambda(x, y) + \mu(x, y) ,$$

come risulta dalla pag. 22, e come tali non alterano la forma delle (8). Perciò noi possiamo qui supporre che il nostro gruppo contenga un sottogruppo della forma

$$p + \dots , \quad q + \dots , \quad xp - yq + \dots , \quad yp + \dots , \quad xq + \dots ,$$

dove abbiamo indicato con *puntini* i termini aggiuntivi ζr, i quali sono indipendente dalla z. Si possono allora ripetere inalterate le considerazioni del n. prec. e si conclude ancora che la forma A è identicamente nulla.

Insomma siamo condotti a studiare i gruppi della forma

$$-\psi_y p + \psi_x q + \zeta(x, y)r , \quad \rho_i(x, y)r .$$

Ma dalla alternata

$$(-\psi_y p + \psi_x q + \zeta r , \ \rho_i r) = \left[-\psi_y \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + \psi_x \frac{\partial \rho_i}{\partial y}\right] r$$

deduciamo subito che le ρ_i non possono costituire un insieme ad un numero finito di dimensioni se non è

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x} = \frac{\partial \rho_i}{\partial y} = 0 \,,$$

vale a dire, se esse non si riducono tutte alla sola $\rho_1 = 1$. Abbiamo così un gruppo della forma

$$(9) \qquad -\psi_y p + \psi_x q + \zeta r \;,\; r$$

dove, per ogni determinazione della ψ, la ζ deve risultar determinata ***a meno di una eventuale costante additiva arbitraria,*** la quale è del resto messa in evidenza dalla presenza nel gruppo della r.

Per ottenere una determinazione della ζ, per ogni determinazione della ψ, procederemo per via ricorrente e cominceremo dal notare che il nostro gruppo (9) contiene un sottogruppo della forma

$$p + \dots \,,\; q + \dots \,,\; xp - yq + \dots \,,\; yp + \dots \,,\; xq + \dots \,,\; r \,,$$

il quale, per mezzo di trasformazioni lineari in z, è sempre riducibile ad una delle due forme tipiche seguenti [*]:

$$\alpha) \qquad p \,,\; q + xr \,,\; 2yp + y^2 r \,,\; xp - yq \,,\; 2xq + x^2 r \,,\; r$$

$$\beta) \qquad p \,,\; q \,,\; yp \,,\; xp - yq \,,\; xq \,,\; r \,.$$

Noi potremo quindi supporre che il nostro gruppo (9) contenga addirittura il sottogruppo α) o il sottogruppo β).

Cominciando dal primo caso, cerchiamo di costruire le trasf. inf. di 2.° e 3.° ordine, (cioè corrispondenti a funzioni generatrici di 3.° e 4.° grado) le quali alternate fra loro iteratamente ci condurranno a formare le trasf. inf. di ogni possibile ordine.

Corrispondentemente alla funzione generatrice y^3 si ha nel gruppo una trasf. inf. della forma

$$-3y^2 p + \alpha_3(x, y) r \,,$$

e basta combinarla colle p, $q + xr$, $xp - yq$ per trovare

$$\alpha^3 = -2y^3 \,.$$

(*) LIE-ENGEL, *Op. cit.*, Bd. III, § 42.

Allora dalle alternate

$$\begin{aligned}(2xq + x^2r\ ,\ -3y^2p - 2y^3r) &= 6[-2xyp + y^2q - xy^2r]\\ (2xq + x^2r\ ,\ -2xyp + y^2q - xy^2r) &= 4[-x^2p + 2xyq]\\ (2xq + x^2r\ ,\ -x^2p + 2xyq) &= 2[3x^2q + x^3r]\end{aligned}$$

ricaviamo che alle funzioni generatrici xy^2, x^2y, x^3 corrispondono rispettivamente le trasf. inf.

$$-2xyp + y^2q - xy^2r\ ,\ -x^2p + 2xyq\ ,\ 3x^2q + x^3r\ .$$

In modo analogo si trovano, come corrispondenti alle funzioni generatrici

$$y^4\ ,\ xy^3\ ,\ x^2y^2\ ,\ x^3y\ ,\ x^4$$

le trasf. inf. del 3.° ordine

$$-4y^3p - 3y^4r\ ,\ -3xy^2p + y^3q - 2xy^3r\ ,\ -2x^2yp + 2xy^2q - x^2y^2r\ ,\\ -x^3p + 3x^2yq\ ,\ 4x^3q + x^4r\ ;$$

e, combinando iteratamente fra loro le trasf. inf. del 2.° e del 3.° ordine, si dimostra, per induzione completa relativa a due indici, che la trasf. inf. corrispondente alla funzione generatrice $x^m\ y^n$ è data da

$$-nx^my^{n-1}p + mx^{m-1}y^nq + (1-n)x^my^nr$$

e quindi in generale ad una funzione qualsiasi $\psi(x, y)$ corrisponderà la trasf. inf.

$$-\psi_yp + \psi_xq + [\psi - y\psi_y]r\ ,$$

la quale per $\psi = 1$ dà la r, e per determinazioni della ψ differenti per una costante additiva dà trasf. inf. corrispondenti alla stessa trasf. inf. accorciata e aventi il coefficiente di r, diverso per una costante additiva. Abbiamo così il gruppo

$$[\mathrm{C}, \mathrm{III}]_1 \qquad \boxed{-\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q + [\psi(x, y) - y\psi_y(x, y)]r}$$

Passando al caso, in cui il gruppo contenga il sottogruppo β) della pag. prec., si dimostra, collo stesso procedimento seguito dianzi, che, come la trasf. inf. β) di ordine inferiore a 2, anche tutte le

altre si riducono alle semplici trasf. inf. accorciate, talchè otteniamo il seguente secondo tipo di gruppi di seconda specie:

$$[C, III]_2 \qquad \left| -\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q \ , \ r \right| .$$

57. — Gruppi di terza specie. — Il gruppo massimo, corrispondente al sottogruppo intransitivo $\psi_0(x, y)r, \psi_1(x, y)zr$, è senz' altro

$$[C, IV] \qquad \left| -\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q \ , \ \psi_0(x, y)r \ , \ \psi_1(x, y)zr \right|$$

Per costruire gli altri gruppi di terza specie, notiamo che il gruppo generatore sarà del tipo $[C,III]_1$ o del tipo $[C,III]_2$ ossia, indicando con ε una costante uguale ad 1 o a 0, sarà della forma

$$-\psi_y p + \psi_x q + \varepsilon[\psi - y\psi_y]r \ , \ r \qquad \varepsilon(\varepsilon - 1) = 0 .$$

Ora, come al n. 45, si esclude la possibilità di un sottogruppo intransitivo massimo del tipo [V]: $\psi_0(x, y)r, \theta(x, y)zr$; e se il sottogruppo intransitivo è del tipo [VI] $\psi_0(x, y)r, \rho_i(x, y)zr$, si trova che le ρ_i si debbono ridurre all'unica $\rho_i = 1$, talchè risulta il gruppo:

$$[C, VI] \qquad \left| \begin{array}{c} -\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q + \varepsilon z[\psi(x, y) - y\psi_y(x, y)]r \\ \psi_0(x, y)r \ , \ zr \\ \varepsilon(\varepsilon - 1) = 0 \end{array} \right|$$

Come al n. 47 si dimostra che il sottogruppo intransitivo massimo non può appartenere al tipo [VII] ed VIII]; e se è finito del tipo [IX]: $\rho_i(x, y)r, zr$, dalla

$$(-\psi_y p + \psi_x q + \varepsilon z[\psi - y\psi_y]r \ , \ \rho_i r) = \left[\psi_y \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + \psi_x \frac{\partial \rho_i}{\partial y} - \varepsilon[\psi - y\psi_y]\rho_i\right] r$$

risulta che l'insieme della ρ_i non può essere ad un numero finito di dimensioni se non è

$$\varepsilon = 0 \ , \ \frac{\partial \rho_i}{\partial x} = \frac{\partial \rho_i}{\partial y} = 0 \ ,$$

cosicchè otteniamo il gruppo

[C, IX] $\left| \begin{array}{c} -\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q \\ r, zr \end{array} \right|$

58. — Gruppi di quarta e quinta specie. — Senza difficoltà si esclude la possibilità che il sottogruppo intransitivo massimo sia del tipo [XI] o [XIV] e si trovano i quattro gruppi:

[C, X] $\left| \begin{array}{c} -\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q \\ \psi_0(x, y)r, \psi_1(x, y)zr, \psi_2(x, y)z^2r \end{array} \right|$ [C, XII] $\left| \begin{array}{c} -\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q \\ r, zr, z^2r \end{array} \right|$

[C, XIII] $\left| \begin{array}{c} -\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q \\ \chi(x, y, z)r \end{array} \right|$ [C, XV] $\left| \begin{array}{c} -\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q \\ \varphi(z)r \end{array} \right|$

Gruppo accorciato proporzionale: $-\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q, yq.$

59. — Poichè il gruppo equivalente è un sottogruppo invariante del gruppo proporzionale, qui non avremo che da aggiungere una trasf. inf. proporzionale prolungata, p. es. della forma

$$xp + yq + \zeta(x, y, z)r,$$

ai gruppi corrispondenti al gruppo piano equivalente, da noi determinati nei nn. 54-58. Otteniamo così senza difficoltà i gruppi seguenti:

$[B, 0]_1$ $\left| -\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q + [\psi_{xx} + 2z\psi_{xy} + z^2\psi_{yy}]r, xp + yq \right|$

$[B, 0]_2$ $\left| -\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q, xp + yq + r \right|$

[B, I] $\left| \begin{array}{c} -\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q, xp + yq + azr \\ \psi_0(x, y)r \end{array} \right|$

[B, III]$_1$ | $-\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q + [\psi - y\psi_y]r$, $xp + yq + 2zr$; r |

[B, III]$_2$ | $-\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q$, $xp + yq + azr$; r |

[B, IV] | $-\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q$, $xp + yq$; $\psi_0(x, y)r$, $\psi_1(x, y)zr$ |

[B, V] | $-\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q$, $xp + yq$; $\psi_0(x, y)r$, zr |

[B, IX] | $-\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q$, $xp + yq$; r , zr |

[B, X] | $-\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q$, $xp + yq$; $\psi_0(x, y)r$, $\psi_1(x, y)zr$, $\psi_2(x, y)z^2r$ |

[B, XII] | $-\psi_y(x, x)p + \psi_x(x, z)q$, $xp + yq$; r , zr , z^2r |

[B, XIII] | $-\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q$, $xp + yq$; $\chi(x, y, z)r$ |

[B, XV] | $-\psi_y(x, y)p + \psi_x(x, y)q$, $xp + yq$; $\varphi(z)r$ |

Gruppo accorciato totale in due variabili. $\psi_1(x, y)p$, $\psi_2(x, y)q$

60. — Gruppi di prima specie. — I gruppi di cui qui ci dobbiamo occupare saranno della forma

$$\psi_1(x, y)p + A(\psi_1)r \ , \ \psi_2(x, y)q + B(\psi_2)r \ , \tag{10}$$

dove le A, B sono due certe determinate forme lineari alle derivate parziali.

Ogni gruppo siffatto conterrà un sottogruppo, avente come gruppo accorciato il gruppo proiettivo piano totale, cioè un sottogruppo della forma

$$p + \ldots, q + \ldots, xp + \ldots, yp + \ldots, xq + \ldots, yq + \ldots, x[xp + yq] + \ldots, y[xp + yq] + \ldots, \tag{11}$$

e questo sottogruppo, come il gruppo (10), non conterrà nessuna trasf. inf. che lasci ferma ogni retta $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$ I gruppi (11) soddisfacenti a quest' ultima condizione sono stati determinati dal Lie, il quale ha dimostrato che essi mediante trasformazioni della forma

$$x' = x \ , \ y' = y \ , \ z' = z'(x, y, z) \ ,$$

che non alterano la forma delle (10), sono riducibili tutti all' uno o all' altro dei seguenti tre tipi (*):

$$\alpha) \qquad p, q, xp - zr, yp - z^2 r, xq + r, yq + zr, x^2 p + xyq + (y - xz)r, \\ xyp + y^2 q + z(y - xz)r ;$$

$$\beta) \qquad p, q, xp + \frac{1}{2} r, yp, xq, yq + \frac{1}{2} r, x^2 p + xyq + \frac{3}{2} xr, xyp + y^2 q + \frac{3}{2} yr ;$$

$$\gamma) \qquad p, q, xp, yp, xq, yq, x^2 p + xyq, xyp + y^2 q .$$

Noi potremo senz' altro supporre che il nostro gruppo (10) contenga come sottogruppo uno di questi tre gruppi. Posto

$$A = \Sigma \frac{1}{m!\,n!} \alpha_{m,n} D_x^m D_y^n \quad , \quad B = \Sigma \frac{1}{m!\,n!} \beta_{m,n} D_x^m D_y^n \ ,$$

dove le α, β sono funzioni da determinare, notiamo che in tutti e tre i casi α), β), γ) fanno parte del gruppo le traslazioni infinitesime p e q; dal che risulta, in base alle

$$(p, \psi_1 p + A(\psi_1) r) = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} p + D_x A(\psi_1) r \ , \ (q, \psi_1 p + A(\psi_1) r) = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} p + D_y A(\psi_1) r$$

$$(p, \psi_2 q + B(\psi_2) r) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} q + D_x B(\psi_2) r \ , \ (q, \psi_2 q + B(\psi_2) r) = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} q + D_y B(\psi_2) r ,$$

che deve essere identicamente

$$D_x A = A D_x \, , \, D_y A = A D_y \ ; \ D_x B = B D_x \, , \, D_y B = B D_y \ ;$$

e quindi *i coefficienti* α, β *delle forme* A, B *debbono essere indipendenti da* x, y, ossia funzioni della sola z.

Ciò posto cominciamo col supporre che il gruppo (10) contenga il sottogruppo α); avremo allora per le forme A, B, corrispondentemente alle otto trasf. inf. α), le condizioni

$$A(1) = 0 \ , \ A(x) = -z \ , \ A(y) = -z^2 \ , \ B(1) = 0 \ , \ B(x) = 1 \ , \ B(y) = z \ , \\ A(x^2) + B(xy) = y - xz \ , \ A(xy) + B(y^2) = yz - xz^2 \ ,$$

(*) Lie-Engel, *Op. cit.*, Bd. II, pag. 167.

ossia

$$
(12) \quad \begin{cases} \alpha_{0,0}=0 \;,\; \alpha_{1,0}=-z \;,\; \alpha_{0,1}=-z^2 \;,\; \beta_{0,0}=0 \;,\; \beta_{1,0}=1 \;,\; \beta_{0,1}=z \\ \alpha_{2,0}+\beta_{1,1}=0 \;,\; \alpha_{1,1}+\beta_{0,2}=0 \;. \end{cases}
$$

Poichè abbiamo $A(x^2)=\alpha_{2,0}-2xz$, dalle alternate

$$
\begin{aligned}
&(xp-zr \;,\; x^2p+[\alpha_{2,0}-2xz]r)=x^2p+[\alpha_{2,0}-2xz-z\alpha'_{2,0}]r \\
&(yq+2zr \;,\; x^2p+[\alpha_{2,0}-2xz]r)=2[z\alpha'_{2,0}-\alpha_{2,0}]r
\end{aligned}
$$

dove con accenti indichiamo le derivate rispetto a z, si conclude, tenuto conto delle (12),

$$
\alpha_{2,0}=0 \;,\; \beta_{1,1}=0 \;.
$$

Abbiamo allora nel gruppo le trasf. inf. (si tenga conto delle α))

$$
x^2p-2xzr \;,\; xyp-[y+xz]zr \;,\; y^2q+2yzr \;;
$$

e di qui, combinando colle $yp-z^2r$, $xq-zr$, si ricavano le

$$
y^2p-2yz^2r \;,\; xyq+[y+xz]r \;,\; x^2q+2xr \;.
$$

talchè possediamo oramai un sistema completo di trasf. inf. del 2.° ordine del nostro gruppo (10), le quali mostrano intanto che nelle forme A, B sono nulli tutti i coefficienti dei termini del 2.° ordine.

Passando alle trasf. inf. del 3.° ordine e ricordando che in base allo sviluppo di A e alle (12) è

$$
A(x^3)=\alpha_{3,0}-3x^2z \;,
$$

si considerino le alternate

$$
\begin{aligned}
&(xp-zr \;,\; x^3p+[\alpha_{3,0}-3x^2z]r)=2x^3p+[\alpha_{3,0}-6x^2z-z\alpha'_{3,0}]r \\
&(yq+2zr \;,\; x^3p+[\alpha_{3,0}-3x^2z]r)=2[z\alpha'_{3,0}-\alpha_{3,0}]r \;.
\end{aligned}
$$

Risulta di qui anzitutto $\alpha_{3,0}=0$, e allora combinando iteratamente x^3p-3x^2zr colle $yp-z^2r$, $xq-zr$, si costruisce un sistema completo di trasf. inf. del 3.° ordine, dalle quali risulta che nelle A, B sono nulli i coefficienti di tutti i termini del 3.° ordine. Infine, alternando iteratamente le trasf. inf. del 2.° e del 3.° ordine si trova, per induzione completa, che per ogni coppia di interi m, n fanno parte del gruppo le trasf. inf.

$$
x^my^np-z[mx^{m-1}y^n+nx^my^{n-1}z]r \;,\; x^my^nq+[mx^{m-1}y^n+nx^my^{n-1}z]r \;,
$$

onde risulta che nelle A, B sono nulli anche tutti i coefficienti dei termini di ordine maggiore di 3; più precisamente, si ha, tenendo conto dei coefficienti dei termini di 1.° ordine dati dalle (12),

$$A = -zD_x - z^2 D_y \ , \ B = D_x + zD_y \ ;$$

e, poichè una facile verifica permette di constatare la proprietà gruppale per ogni determinazione di ψ_1 e ψ_2, concludiamo che il nostro gruppo appartiene al tipo

$$[\mathrm{A}, 0]_1 \qquad \psi_1(x, y)p - z\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + z\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right]r \ , \ \psi_2(x, y)q + \left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + z\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right]r \ .$$

61. — Supponiamo in secondo luogo che il nostro gruppo (10) contenga il sottogruppo β della pag. 48. Si trova allora pei coefficienti dei termini di 1.° ordine nelle A, B:

$$\alpha_{0,0} = 0 \ , \ \alpha_{1,0} = \frac{1}{2} \ , \ \alpha_{0,1} = 0 \ ; \ \beta_{0,0} = 0 \ , \ \beta_{1,0} = 0 \ , \ \beta_{0,1} = \frac{1}{2} \ :$$

e, costruendo come dianzi, un sistema completo di trasf. inf. del 2.° e 3.° ordine, si conclude che per ogni coppia di numeri interi m, n appartengono al gruppo le due trasf. inf.

$$x^m y^n p + \frac{m}{2} x^{m-1} y^n r \ , \ x^m y^n q + \frac{n}{2} x^m y^{n-1} r \ .$$

onde risulta

$$A = \frac{1}{2} D_x \ , \ B = \frac{1}{2} D_y \ ;$$

e, poichè si constata facilmente che la proprietà gruppale è verificata, si trova che il nostro gruppo è riducibile alla forma tipica

$$[\mathrm{A}, 0]_2 \qquad \psi_1(x, y)p + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} r \ , \ \psi_2(x, y)q + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi_2}{\partial y} r$$

Se infine supponiamo che il gruppo (10) contenga il sottogruppo γ, troviamo col solito procedimento che la forma A, B sono identicamente nulle, cosicchè il gruppo si riduce a due variabili.

62. — Gruppi di seconda specie. — Ogni gruppo siffatto conterrà un massimo sottogruppo, pure di seconda specie, avente per gruppo accorciato il gruppo proiettivo totale. Se questo sottogruppo è infinito, sarà riducibile all'unico tipo da noi trovato al n. 52 (pag. 34), cioè al tipo

$$[a\,,\mathrm{I}]\quad \left\{ \begin{array}{c} p\,,q\,,xp+azr\,,yp\,,xq\,,yq+azr\,,x[xp+yq+3azr]\,,y[xp+yq+3azr]\,, \\ \psi(x\,,y)r \end{array} \right.$$

Se invece quel sottogruppo è finito, esso sará riducibile ad uno dei due tipi determinati dal Lie (*) pei gruppi finiti di seconda specie, il cui accorciato sia il gruppo proiettivo totale:

$$\alpha)\quad \left\{ \begin{array}{c} p\,,q\,,xp+\frac{1}{3}mzr\,,yp\,,xq\,,yq+\frac{1}{3}mzr\,,x[xp+yq+mzr]\,,y[xp+yq+mzr]\,, \\ x^iy^ir \qquad\qquad (i+j=0\,,1\,,\ldots\,,m) \end{array} \right.$$

$$\beta)\quad \left\{ \begin{array}{c} p\,,q\,,xp\,,yp\,,xq\,,yq\,,x[xp+yq+r]\,,y[xp+yq+r]\,, \\ r \end{array} \right.$$

Discutiamo anzitutto il caso, in cui il nostro gruppo contiene il sottogruppo infinito $[a\,,\mathrm{I}]$. Allora le trasf. inf. prolungate saranno della forma

$$\psi_1(x\,,y)p+zA(\psi_1)r\ ,\ \psi_2(x\,,y)q+zB(\psi_2)r\ ,$$

dove $A\,,B$ sono forme lineari alle derivate parziali che, tenuto conto delle $p\,,q$, sappiamo senz'altro essere a coefficienti indipendanti da $x\,,y$.

Posto al solito,

$$A=\Sigma\frac{1}{m!\,n!}\alpha_{m,n}(z)D_x^mD_y^n\ ,\ B=\Sigma\frac{1}{m!\,n!}\beta_{m,n}(z)D_x^mD_y^n\ ,$$

troviamo, in base alle trasf. inf. $[a\,,\mathrm{I}]$,

$$\alpha_{0,0}=0\ ,\ \alpha_{1,0}=a\ ,\ \alpha_{0,1}=0\ ;\ \beta_{0,0}=0\ ,\ \beta_{1,0}=0\ ,\ \beta_{0,1}=a\ ;$$

e le $A\,,B$ debbono soddisfare alle medesime condizioni, che incontrammo per esse al n. prec., all'infuori della sostituzione della costante a al fattore $\frac{1}{2}$.

(*) Lie-Engel, *Op. cit.*, Bd. III, pagg. 168-169. Il gruppo β) è ottenuto dal gruppo [31] del Lie [pag. 169] ponendo $z'=\log z$.

Otteniamo così senz' altro il gruppo

$$[A, I] \qquad \psi_1(x, y)p + az\frac{\partial\psi_1}{\partial x}r \ , \ \psi_2(x, y)q + az\frac{\partial\psi_2}{\partial y}r \qquad \psi(x, y)r$$

Esaminiamo in secondo luogo il caso, in cui il nostro gruppo contenga il sottogruppo finito α) o β). Allora le trasf. inf. prolungate avranno la forma

$$\psi_1(x, y(p + [zA(\psi_1) + \zeta]r \ , \ \psi_2(x, y)q + [zB(\psi_2) + \bar{\zeta}]r \ ,$$

dove la $\zeta, \bar{\zeta}$ sono funzioni di x, y dipendenti rispettivamente da ψ_1, ψ_2, che, per una data determinazione di ψ_1, ψ_2, potranno ammettere infinite determinazioni differenti fra loro per funzioni γ tali che le trasf. inf. γr appartengano al gruppo.

Supponiamo ora precisamente che il sottogruppo sia della forma α. Allora dalla

$$(\psi_1 p + [zA(\psi_1) + \zeta]r \ , \ x^i y^j r) = [i\psi_1 - x A(\psi_1)] x^{i-1} y^j r$$

concludiamo, tenendo conto della arbitrarietà della ψ_1, che, se α) è veramente il *massimo* sottogruppo di 2.ª specie corrispondente al gruppo proiettivo totale, deve essere $i = j = 0$ o, più precisamente, $m = 0$; e il sottogruppo α) si riduce ad

$$\alpha') \qquad p, q, xp, yp, xq, yq, x[xp + yq], y[xp + yq], r.$$

Di qui risulta intanto che nelle A, B sono nulli i coefficienti dei termini di ordine inferiore al 2.°

Costruiamo allora un sistema completo di trasf. inf. del 2.° ordine. Anzitutto, combinando la $x^2p + [\alpha_{1,0}z + \zeta_{2,0}]r$ colle p, q, xp, si trova $\alpha_{2,0} = 0$, $\zeta_{2,0} = ax$, dove a è una costante; talchè, tenuto conto della $x[xp + yq]$, avremo nel gruppo le

$$x^2p + axr \ , \ xyq - axr \ .$$

Ma allora dalle

$$(yp, x^2p + axr) = 2xyp + ayr, (xyp + \frac{1}{2}ayr, xq) = -x^2p + xyp - \frac{1}{2}axr$$

deduciamo che deve essere

$$(13) \qquad -x^2p + xyq - \frac{1}{2}axr = xyq - axr - [x^2p + axr]$$

e quindi $a = 0$. Troviamo così il sistema completo di trasf. inf. del 2.° ordine

$$x^2p\ ,\ xyp\ ,\ y^2p\ ;\ x^2q\ ,\ xyq\ ,\ y^2q\ ,$$

le quali, combinati reiteratamente fra loro, dànno luogo, per ogni coppia di interi m, n, alle

$$x^m y^n p\ ,\ x^m y^n q\ ;$$

onde otteniamo infine il gruppo

$$[A, III]_1 \qquad \left| \begin{matrix} \psi_1(x, y)p\ ,\ \psi_2(x, y)q \\ r \end{matrix} \right|$$

Supponiamo, da ultimo, che il nostro gruppo contenga, come sottogruppo massimo di 2.ª specie corrispondente al gruppo proiettivo totale, il gruppo β) della pag. prec.

Qui ancora avremo subito che le A, B hanno nulli i coefficienti dei termini di ordine inferiore al 2.° E passando alle trasf. inf. del 2.° ordine troveremo ancora la $x^2p + axr$. Ma in quanto ora abbiamo nel gruppo la $x^2p + xyq + xr$, vi comparirà, accanto alla trasf. inf. or ora indicata, la $xyq + (1 - a)xr$; cosicchè l'analoga della identità (13) darà $a = \frac{2}{3}$. Si ottiene allora il sistema completo di trasf. inf. del 2.° ordine

$$x^2p + \frac{2}{3}xr\ ,\ xyp + \frac{1}{3}yr\ ,\ y^2p\ ;\ x^2q\ ,\ xyq + \frac{1}{3}xr\ ,\ y^2q + \frac{2}{3}yr\ ,$$

e quindi ancora, per combinazione iterata, le

$$x^m y^n p + \frac{m}{3}x^{m-1}y^n r\ ,\ x^m y^n q + \frac{n}{3}x^m y^{n-1} r\ .$$

Abbiamo così pel nostro gruppo la forma tipica

$$[A, III]_2 \qquad \left| \begin{matrix} \psi_1(x, y)p + \frac{1}{3}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\ ,\ \psi_2(x, y)q + \frac{1}{3}\frac{\partial \psi_2}{\partial y}r \\ r \end{matrix} \right|$$

63. — Gruppi di terza specie. — Il gruppo massimo è al solito

[A, IV]
$$\left|\begin{array}{c}\psi_1(x,y)p \;,\; \psi_2(x,y)q \\ \psi_0(x,y)r \;,\; \psi_1(x,y)zr\end{array}\right|$$

Per gli altri gruppi di terza specie il *gruppo generatore* (n. 41, c) sarà del tipo $[A, III]_1$ o $[A, III]_2$ del n. prec., ossia, indicando con ε un numero uguale a 0 o ad 1, sarà della forma

$$\psi_1(x,y)p + \frac{\varepsilon}{3}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}r \;,\; \psi_2(x,y)q + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}r \;,\; r \;.$$

Così otteniamo anzitutto, corrispondentemente al gruppo [a, VI] della pag. 35, il gruppo

[A, VI]
$$\left|\begin{array}{c}\psi_1(x,y)p + \frac{\varepsilon}{3}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}r \;,\; \psi_2(x,y)q + \frac{\varepsilon}{3}z\frac{\partial\psi_2}{\partial y}r \\ \psi_0(x,y)r \;,\; zr \\ \varepsilon(\varepsilon-1)=0\end{array}\right|$$

Come nel caso del gruppo accorciato proiettivo totale (n. 52) si esclude la possibilità che il sottogruppo intransitivo massimo sia del tipo IV o VII od VIII; ma qui va invece considerato il caso, in cui codesto sottogruppo sia finito e del tipo IX: $\rho_i(x,y)r \,,\, zr$.

In base alle alternate

$$\left(\psi_1 p + \frac{\varepsilon}{3}z\frac{\partial\psi_1}{\partial x} \,,\, \rho_i r\right) = \left[\psi_1\frac{\partial\rho_i}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{3}\rho_i\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right]r \,,$$
$$\left(\psi_2 q + \frac{\varepsilon}{3}z\frac{\partial\psi_2}{\partial y}r \,,\, \rho_i r\right) = \left[\psi_2\frac{\partial\rho_i}{\partial y} - \frac{\varepsilon}{3}\rho_i\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right]r \,,$$

tenuto conto che le ρ_i debbono variare in uno spazio ad un numero finito di dimensioni, si conclude che deve essere

$$\varepsilon = 0 \;,\; \frac{\partial\rho_i}{\partial x} = \frac{\partial\rho_i}{\partial y} = 0 \,,$$

cosicchè otteniamo il gruppo

[A, IX]
$$\left|\begin{array}{c}\psi_1(x,y)p \;,\; \psi_2(x,y)q \\ r \;,\; zr\end{array}\right|$$

64. — Gruppi di quarta e quinta specie — Si trovano senz'altro i gruppi:

[A, X] $\left| \begin{matrix} \psi_1(x,y)p \, , \psi_2(x,y)q \\ \psi_0(x,y)r \; , \; \overline{\psi}_1(x,y)zr \; , \; \overline{\psi}_2(x,y)z^2r \end{matrix} \right|$ [A, XII] $\left| \begin{matrix} \psi_1(x,y)p \; , \; \psi_2(x,y)q \\ r \; , \; zr \; , \; z^2r \end{matrix} \right|$

[A, XIII] $\left| \begin{matrix} \psi_1(x,y)p \; , \; \psi_2(x,y)q \\ \chi(x,y,z)r \end{matrix} \right|$ [A, XV] $\left| \begin{matrix} \psi_1(x,y)p \; , \; \psi_2(x,y)q \\ \varphi(z)r \end{matrix} \right|$

Notiamo che il gruppo [A, XIII] è il più ampio gruppo dello spazio che trasforma in sè la stella di rette $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$, talchè contiene come sottogruppi tutti i gruppi di cui ci occupiamo in questa seconda parte del nostro lavoro.

Capitolo VIII.

Gruppi che ammettono un gruppo accorciato finito imprimitivo.

65. — In questo Capitolo e nel successivo, col quale si concluderà il nostro lavoro, determineremo i *gruppi doppiamente imprimitivi,* cioè i gruppi (cfr. il n. 42), che trasformano in sè la stella di rette

$$x = \text{cost.} \; , \; y = \text{cost.} \; , \tag{1}$$

e permutano le une nelle altre codeste rette secondo un gruppo *imprimitivo* in due variabili.

Al posto di siffatto gruppo *accorciato* noi assumeremo successivamente i singoli gruppi in due variabili, assegnati dal Lie nelle sue tabelle come rappresentanti dei vari possibili *tipi* di gruppi imprimitivi del piano. E notiamo subito che, in quanto codesti rappresentanti tipici sono stati scelti in modo che trasformino in sè, nel piano, il fascio di rette

$$x = \text{cost.} \; , \tag{2}$$

noi avremo che pei nostri gruppi spaziali le superficie (cilindriche) di imprimitività saranno precisamente i piani (2); in altre parole

i gruppi che noi determineremo in questi due ultimi Capitoli del nostro lavoro trasformeranno in sè simultaneamente la stella di rette (1) e il fascio di piani (2) (*).

Qui in primo luogo noi determineremo i gruppi che ammettono un gruppo accorciato *finito*, rimandando al Cap. IX i gruppi spaziali a gruppo accorciato *infinito*.

A base della nostra determinazione non assumeremo la tabella dei gruppi finiti imprimitivi in due variabili, tal quale essa è assegnata dal Lie (**), che, classificando i gruppi secondo che essi lasciano invariante una sola schiera di ∞^1 curve (contata semplicemente o doppiamente) oppure due o ∞^1 o ∞^∞ schiere siffatte, è stato condotto ad assegnare a categorie diverse, come rappresentanti di tipi distinti, gruppi che differiscono solo per i valori particolari diversi che hanno in essi le costanti essenziali che compaiono nelle rispettine trasf. inf. Ora per la determinazione che noi dobbiamo compiere è inutile conservare codeste distinzioni; cosicchè i gruppi che noi dovremo assumere successivamente come *gruppi accorciati* sono i seguenti:

[1] q;

[2] q, p:

[3] $q, xp + yq$;

[4] q, yq;

[5] q, yq, y^2q;

[6] q, yq, p;

[7] $q, p, xp + cyq, c \gtrless 0$;

[8] q, yq, p, xp;

[9] $q \cdot yq, y^2q, p$;

[10] q, yq, y^2q, p, xp;

[11] q, yq, y^2q, p, xp, x^2p;

[12] $p, 2xp + yq, x^2p + xyq$;

[13] $p, xp, yq, x^2p + xyq$;

[14] $p, q, xp + [x + y]q$;

(*) I gruppi spaziali doppiamente imprimitivi *finiti* furono da me determinati altrove [Giorn. di Matematiche; s. 2.ª; vol. IX (1901)].

(**) Cfr. p. es.: Lie-Engel: Op. cit. Bd. III, pagg. 71-73.

[15] $p, q, xq, x^2q, \dots, x^{s-1}q, xp + [sy + x^s]q$, $s > 1$;

[16] $p, q, xq, x^2q, \dots, x^sq, xp + cyq$, $s > 0$;

[17] $p, q, xq, x^2q, \dots, x^sq, xp, yq$, $s > 0$;

[18] $p, q, xq, x^2q, \dots, x^sq, 2xp + syq, x^2p + sxyq$, $s > 0$;

[19] $p, q, xq, x^2q, \dots, x^sq, xp, yq, x^2p + sxyq$, $s > 0$;

[20] $p + q, xp + yq, x^2p + y^2p$

[21] $q, xq, \alpha_1(x)q, \alpha_2(x)q, \dots, \alpha_s(x)q$;

[22] $q, xq, \alpha_1(x)q, \alpha_2(x)q, \dots, \alpha_s(x)q, yq$;

[23] $p, e^{a_ix}q, x^2e^{a_ix}q, x^2e^{a_ix}q, \dots, x^{m_i}e^{a_ix}$, $i = 1, 2, \dots, k$;

[24] $p, q, xq, x^2p, \dots, x^mq, x^le^{a_ix}q, yq$, $l = 0, 1, \dots, m_i$; $i = 1, 2, \dots, k$.

[1] Gruppo accorciato: q

66. — Qui, come in ogni altro caso in cui il gruppo accorciato sia finito, non avremo a considerare *gruppi di prima specie* (cfr. n. **41**), in quanto codesti gruppi sono *finiti* (1).

Cominciando allora dai *gruppi di seconda specie*, avremo da associare una trasf. inf. della forma (n. **41**, 6)

$$q + \{z\beta_0(x, y) + \bar{\beta}_0(x, y)\}r$$

al gruppo

[I] $$\psi(x, y)r$$

o ad un gruppo

[II] $$\theta(x, y)r,$$

dove θ è definita da un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, non appartenente alla classe del Mayer, o, in altre parole, dipende da infinite costanti arbitrarie.

In entrambi i casi, mediante una trasformazione della forma

$$x' = x, y' = y, z' = z\lambda(x, y) + \mu(x, y)$$

possiamo ridurre a zero le β_0, $\bar{\beta}_0$; cosicchè anzitutto otteniamo il gruppo

[1, I] $$q, \psi(x, y)r$$

Nel caso del sottogruppo [II], il sistema che definisce la θ dovrà ammettere la traslazione infinitesima q, onde risulta senz' altro che esso dovrà avere ***coefficienti indipendenti da y***. Abbiamo così

$$[1, II] \qquad q, \bar{\theta}(x, y)r$$

dove θ è una funzione dipendente da infinite costanti arbitrarie, definita da un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali ***a coefficienti indipendenti da* y**.

66. — Pei ***gruppi di terza specie*** il gruppo generatore (n. 41, c) è riducibile senz' altro a q, r, talchè corrispondente ai sottogruppi intransitivi [IV] e [V], otteniamo

$$[1, IV] \quad q, \psi_0(x, y)r, \psi_1(x, y)zr \qquad\qquad [1, V] \quad q, \psi(x, y)r, \bar{\theta}(x, y)zr$$

dove $\bar{\theta}$ ha lo stesso significato che le abbiamo attribuito nel caso del gruppo [1, II], e, corrispondentemente alla zr, ammette la determinazione $\theta = 1$.

Se il sottogruppo intransitivo massimo è del tipo

$$[VI] \qquad \psi(x, y)r, \rho_i(x, y)zr \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

dalle

$$(q, \rho_i(x, y)zr) = \frac{\partial \rho_i}{\partial y} zr$$

ricaviamo

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial y} \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n];$$

e questo sistema di equazioni differenziali lineari ***a coefficienti costanti*** ci dà senz' altro che le ρ_i sono combinazioni lineari, a coefficienti costanti arbitrari, di funzioni della forma

$$\sigma_{ijl}(x) y^i e^{c_j y} \qquad j = 1, 2, \dots, s; \ i = 0, 1, \dots, n_j, \ l = 1, 2, \dots, h_{ij}$$

dove le $\sigma_{i.j}$ sono funzioni determinate di x. Abbiamo così il gruppo

$$[1, VI] \qquad \begin{array}{c} q, \psi(x, y)r, zr, \sigma_{ijl}(x) y^i e^{c_i y} zr \\ j = 1, 2, \dots, s; \ i = 0, 1, \dots, n_j; \ l = 1, 2, \dots, h_{ij} \end{array}$$

68. — Una discussione meno breve richiede il caso, in cui il sottogruppo intransitivo massimo appartiene al tipo [VII] od [VIII].

Cominciando dal gruppo

$$[\mathrm{VII}] \qquad \varphi_i(x)\rho_i(x,y)r \ , \ \varphi(x)zr \qquad i=1,2,\dots,n$$

ricordiamo che (n. 40) non possiamo senz'altro assumere come sottogruppo il gruppo [VII], ma bensì il suo trasformato per mezzo di una trasformazione affatto generale in x, y, cioè un gruppo della forma

$$(3) \qquad \varphi_i(\mu)\rho_i(x,y)r \ , \ \varphi(\mu)zr \ , \qquad i=1,2,\dots,n,$$

dove le φ_i, φ sono ancora simboli di funzioni arbitrarie del rispettivo argomento μ, che è una funzione determinata qualsiasi delle x, y, e abbiamo, per semplicità, rappresentato con x, y le variabili trasformate e con ρ_i le trasformate delle ρ_i primitive.

Le trasf. inf. $\varphi(\mu)zr$ generano un sottogruppo del nostro gruppo che deve manifestamente esser trasformato in sè stesso dalla q (*), talchè il sistema differenziale che definisce la $\varphi(\mu)$ deve essere a coefficienti indipendenti da y (o riducibile ad esser tale mediante operazioni algebriche). Ma la $\varphi(\mu)$, dove ricordiamo che φ è simbolo di funzione arbitraria, é definita dall' unica equazione

$$\mu_y \frac{\partial f}{\partial x} - \mu_x \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ ,$$

cosicchè dovremo avere

$$(4) \qquad \mu_x = \alpha(x,y)\beta(x) \ , \ \mu_y = \alpha(x,y) \ ,$$

dove le α, β sono funzioni determinate non nulle, salvo il caso in cui sia addirittura

$$\mu_x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \mu_y = 0 \ .$$

Se si verifica una di queste due ultime ipotesi. talchè la μ sia funzione della sola y o della sola x, il gruppo (3) diventa rispettivamente della forma

$$(5) \qquad \varphi_i(y)\rho_i(x,y)r \ , \ \varphi(y)zr$$

(*) Infatti la $\varphi(\mu)zr$ è la *più generale* trasf. inf. del nostro gruppo che abbia la forma $\alpha(x,y)zr$.

oppure

$$\varphi_i(x)\rho_i(x, y)r \ , \ \varphi(x)zr \ . \tag{6}$$

Ma è facile vedere che anche le ipotesi (4) conducono al gruppo (5).

Infatti dalla condizione di integrabilità delle (4)

$$\beta\alpha_y = \alpha_x$$

risulta che la α è una funzione (determinata) dell' argomento

$$x + \int \beta dx \ , \tag{7}$$

e allora, in base alle (4), anche la μ è una funzione determinata del medesimo argomento.

Assunta allora come nuova y la (7), la q evidentemente non muta forma e il gruppo (3), poichè la μ risulta indipendente dalla x, si identifica col gruppo (5). In conclusione siamo condotti ad assumere come sottogruppo intransitivo il gruppo (5) o il gruppo (6); e nell'uno e nell'altro caso resta da determinare la forma delle ρ_i.

Nel primo caso, in base alle

$$(q, \varphi_i(y)\rho_i(x, y)r) = \left[\varphi'_i\rho_i + \frac{\partial\rho_i}{\partial y}\right]r \ ,$$

avremo

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial y} = 0 \qquad |\text{modd. } \varphi_i(y)\rho_i(x, y)| \ ; \tag{8}$$

e poichè questo è un sistema di equazioni differenziali lineari *a coefficienti indipendenti dalla* x, concludiamo che le ρ_i sono della forma

$$\rho_i(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_j(x)\tau_{ij}(y) \ , \tag{9}$$

dove, in quanto le ρ_i debbono costituire, tanto rispetto alla x quanto alla y, uno spazio ad un numero finito di dimensioni, le σ_{ij} e τ_{ij} sono funzioni determinate (*).

(*) In altre parole le ρ_i debbono essere una soluzione particolare delle (8), mentre nella soluzione generale le σ_j sono funzioni arbitrarie di x.

Ma nel gruppo (5) l'insieme dei coefficienti

$$\varphi_i(y)\rho_i(x, y)$$

di r è tale che, insieme con ogni sistema di quante si vogliano due funzioni, contiene anche ogni loro combinazione lineare a coefficienti che siano *funzioni arbitrarie* di y; talchè risolvendo le (9) rispetto alle $\sigma_i(x)$, troviamo

$$\sigma_i(x) \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \varphi_i(x)\rho_i(x, y)]$$

e otteniamo il gruppo

$$[1, \mathrm{VII}]_1 \qquad \left| q, \ \varphi_j(y)\sigma_j(x)r, \ \varphi(y)rz \right|_{j=1,2,\ldots,n}$$

Assunto, in secondo luogo, come sottogruppo intransitivo invariante il gruppo

$$(6) \qquad \varphi_i(x)\rho_i(x, y)r, \ \varphi(x)zr$$

avremo per le ρ_i il sistema di congruenze

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial y} \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \varphi_j(x)\rho_j(x, y)]$$

il quale è un sistema di equazioni differenziali lineari *a coefficienti indipendenti da* y. Tenendo conto del fatto che l'insieme dei coefficienti di r nella prima schiera di trasf. inf. (6) contiene, accanto ad ogni sistema di quanto si vogliano sue funzioni, anche ogni loro combinazione lineare a coefficienti che siano *funzioni arbitrarie di* x, e applicando la ben nota teoria di integrazione dei sistemi d'equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti, concludiamo che le ρ_i saranno della forma

$$y^i e^{y\alpha_j(x)} \qquad j = 1, 2, \ldots, s\ ;\ i = 0, 1, \ldots, m_j,$$

dove la α_j sono funzioni determinate della x e gli m_j sono altrettanti numeri interi dati. Abbiamo così il gruppo

$$[1, \mathrm{VII}]_2 \qquad \left| q, \ \varphi_{ij}(x)y^i e^{y\alpha_j(x)}r, \ \varphi(x)zr \right|_{j=1,2,\ldots,s\ ;\ i=0,1,\ldots,m_j}$$

69. — Ad esaurire i gruppi di terza specie ci resta da considerare il caso, in cui il sottogruppo invariante sia del tipo [VIII], cioè della forma

$$\varphi_i(\mu)\rho_i(x, y)r \ , \ \sigma_j(\mu)zr \qquad i = 1, 2, \dots, m \ ; \ j = 1, 2, \dots, n$$

dove i simboli hanno gli stessi significati di pocanzi. Ora le stesse considerazioni del n. prec. ci permettono di concludere che sarà $\mu = y$ oppure $\mu = x$, talchè il sottogruppo intransitivo avrà una delle due forme seguenti:

$$\varphi_i(y)\rho_i(x, y)r \ , \ \sigma_j(y)zr \tag{10}$$

$$\varphi_i(x)\rho_i(x, y)r \ , \ \sigma_j(x)zr \ . \tag{11}$$

Nel primo caso dalle

$$(q \ , \ \sigma_j zr) = \sigma'_j zr$$

risulta che le σ_j debbono soddisfare ad un sistema

$$\sigma'_j = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, t \ ; \ i = 0, 1, \dots, n_j$$

di equazioni differenziali lineari del 1.° ordine *a coefficienti costanti*, talchè avranno la forma

$$y^i e^{c_j y} \qquad (j = 1, 2, \dots, t ; i = 0, 1, \dots, n_j)$$

dove le c_j sono costanti date e gli n_j numeri interi dati. Per le ρ_j si può ripetere quanto fu detto al n. prec., talchè otteniamo il gruppo

$$[1, \mathrm{VIII}]_1 \qquad q \ , \ \varphi_i(y)\sigma_j(x)r \ , zr \ , y^i e^{c_l y} \qquad {\scriptstyle j = 1, 2, \dots, m \ ; \ l = 1, 2, \dots, t \ ; \ i = 0, 1, 2, \dots, n_j}$$

Quando poi il sottogruppo intransitivo sia della forma (11), le $\sigma_j(x)$ sono sottoposte alla sola condizione di essere linearmente indipendenti, e per le ρ_i si può ripetere quanto si disse al n. prec. Otteniamo così il gruppo

$$[1, \mathrm{VIII}]_2 \qquad q \ , \ \varphi_{ij}(x) y^i e^{y\alpha_j(x)} r \ , zr \ , \sigma_l(x)zr \qquad {\scriptstyle j = 1, 2, \dots, s \ ; \ i = 0, 1, \dots, m_j \ ; \ l = 1, 2, \dots, n}$$

70. — Fra i *gruppi di quarta specie* abbiamo anzitutto il gruppo massimo

$$[1, X] \qquad \left| \, q \, , \, \psi_0(x, y)r \, , \, \psi_1(x, y)zr \, , \, \psi_2(x, y)z^2r \, \right|$$

Dobbiamo poi assumere come sottogruppo un gruppo della forma

$$\varphi_0(\mu)r \, , \, \varphi_1(\mu)zr \, , \, \varphi_2(\mu)z^2r \, ,$$

dove μ è una funzione determinata di x e y. Ma le considerazioni del n. 67, applicate alle $\varphi_0(\mu)$, ci permettono di concludere che si può assumere senz'altro $\mu = y$ o $\mu = x$; cosicchè otteniamo così i due tipi distinti:

$$[1, XI]_1 \left| \, q \, , \, \varphi_0(y)r \, , \, \varphi_1(y)zr \, , \, \varphi_2(y)z^2r \, \right| \qquad [1, XI] \left| \, q \, , \, \varphi_0(x)r \, , \, \varphi_1(x)zr \, , \, \varphi_2(x)z^2r \, \right|$$

Analogamente si trovano i tre tipi di *gruppi di quinta specie:*

$$[1, XIII] \left| \, q \, , \, \chi(x, y, z)r \, \right| \qquad [1, XIV]_1 \left| \, q \, , \, \psi(y, z)r \, \right| \qquad [1, XIV]_2 \left| \, q \, , \, \psi(x, z)r \, \right|$$

$$[1, XV] \left| \, q \, , \, \varphi(z)r \, \right|$$

Siccome tutti i gruppi tipici in due variabili, che noi dovremo successivamente assumere come gruppi accorciati, contengono la q e d'altra parte valgono le osservazioni del n. 41 *d*), *e*), i gruppi di *quarta* e *quinta specie* relativi ad ogni gruppo accorciato si ridurranno a tipi perfettamente analoghi a $[1, X] - [1, XV]$.

Soltanto, pei gruppi tipici simmetrici rispetto ad x e y (cioè trasformati in sè dalla $x' = y, y' = x$) le coppie di gruppi analoghe a $[1, XI]_1, [1, XI]_2$ e $[1, XIV]_1, [1, XIV]_2$ si ridurranno ciascuna ad un unico tipo.

Ciò posto, noi nel seguito tralascieremo senz'altro di enumerare i *gruppi di quarta* e *quinta specie*.

[2] Gruppo accorciato: q, p.

71. — I gruppi corrispondenti a questo gruppo accorciato si otterranno aggiungendo ai gruppi corrispondenti ad [1], determinati nei nn. 65-69, una trasf. inf. della forma

$$p + \zeta(x, y, z)r .$$

Cominciando dai *gruppi di seconda specie,* ricaviamo dalla

$$(q \, , \, p + |\overline{\alpha}_0 z + \alpha_0| r) = \left[\frac{\partial \overline{\alpha}_0}{\partial y} z + \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} \right] r$$

che $\overline{\alpha}_0$ deve essere indipendente da y, cosicchè basta assumere come nuova z la

$$ze^{-\int \alpha_0 dx}$$

per ridurre $\overline{\alpha}_0 = 0$ senza alterare la forma della q. Avremo quindi anzitutto il gruppo

$$[2, I] \qquad \overline{| q \, , \, p \, , \, \psi(x, y) r |}$$

Passando ad ampliare il gruppo

$$[1, II] \qquad q \, , \, \overline{\theta}(x, y) r \, ,$$

dove $\overline{\theta}$ dipende da infinite costanti arbitrarie, ma è vincolata da un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali *a coefficienti indipendenti da* y, notiamo, in base alla

$$(p + \alpha_0 r \, , \, \theta(x, y) r = \frac{\partial \theta}{\partial x} r \, ,$$

che il suindicato sistema differenziale, che definisce θ, deve ammettere anche la traslazione infinitesima p, e perciò sarà *a coefficienti indipendenti anche dalla* x (o riducibile a tale per mezzo di sole operazioni algebriche). Abbiamo dunque che nel nostro gruppo il coefficiente di r è dato da una funzione $\overline{\overline{\theta}}$, definita da un sistema (*non* appartenente alla classe del Mayer) di equazioni lineari alle derivate parziali *a coefficienti costanti.*

Quanto alla funzione α_0, dalla

$$(q\ ,\ p+\alpha_0 r)=\frac{\partial \alpha_0}{\partial y}\, r$$

ricaviamo

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial y}=\overline{\overline{\theta}}_1\ ,$$

dove la $\overline{\overline{\theta}}_1$ è una determinazione particolare di θ, talchè indicando, come faremo sempre nel seguito con D_y^{-1} la integrazione parziale rispetto ad y, otteniamo il gruppo

$$[2\,,\mathrm{II}]\qquad \boxed{q\ ,\ p+D_y^{-1}\overline{\overline{\theta}}_1 r\ ,\ \overline{\overline{\theta}}(x\,,y)\, r}$$

72. — Pei *gruppi di terza specie* il gruppo *generatore* ha la forma

$$q+\beta(x\,,y)r\ ,\ p+\alpha(x\,,y)r\ ,\ r$$

ed è perciò riducibile a

$$q\ ,\ p+ayr\ ,\ r$$

dove a è una costante determinata; cosicchè, corrispondentemente ai gruppi $[1\,,\mathrm{IV}]$, $[1\,,\mathrm{V}]$, $[1\,,\mathrm{VI}]$, troviamo senza difficoltà i gruppi:

$$[2\,,\mathrm{IV}]\quad \boxed{q\,,p\,,\psi_0(x\,,y)r\,,\psi_1(x\,,y)zr} \qquad [2\,,\mathrm{V}]\quad \boxed{q\,,p+ayzr\,,\psi(x\,,y)r\,,zr\,,\overline{\overline{\theta}}(x\,,y)zr}$$

$$[2\,,\mathrm{VI}]\quad \boxed{\begin{matrix} q\ ,\ p+ayzr\ ,\ \psi(x\,,y)r\ ,\ zr\ ,\ x^i y^j e^{b_l x+c_h y} zr \\ l=1,2,\dots,t\ ;\ h=1,2,\dots,s\ ;\ i=0,1,\dots,m_l\ ;\ j=0,1,\dots,n_h \end{matrix}}$$

Aggiungendo la $p+xyzr$ al gruppo (n. 67)

$$[1\,,\mathrm{VII}]_2 \qquad q\ ,\ \varphi_{ij}(x)y^i e^{y\alpha_j(x)}r\ ,\ \varphi(x)zr \qquad j=2\,,2\,,\dots,s\,;\,i=0\,,1\,,\dots,m_j$$

troviamo, in base alle

$$(p+ayzr\ ,\ y^{m_j}e^{y\alpha_j(x)}r)=[\alpha'_j-a]y^{m_j+1}e^{y\alpha_j(x)}r\ ,$$

che deve essere

$$\alpha'_j = a$$

ossia

$$\alpha_j = ax + a_j$$

dove le a_j sono costanti date. E allora, ponendo

$$z' = ze^{-axy}$$

e indicando con a la $-a$ primitiva, otteniamo il gruppo

[2, VII] $$\left| \begin{matrix} q + axzr \ , \ p \ , \ \varphi_{ij}(x) y^i e^{a_j y} r \ , \ \varphi(x) zr \\ {\scriptstyle j=1,2,\dots,s \ ; \ i=0,1,\dots,m_j} \end{matrix} \right|$$

Ed allo stesso gruppo, salvo lo scambio di x e y, si giunge partendo da $[1, \text{VII}]_1$.

Analogamente, ampliando i gruppi $[1, \text{VIII}]_1$, $[1, \text{VIII}]_2$ otteniamo il tipo

[2, VIII] $$\left| \begin{matrix} q + axzr \ , \ p \ , \ \varphi_{ij}(x) y^i e^{a_j y} r \ , \ x^l e^{b_p x} zr \\ {\scriptstyle j=1,2,\dots,s \ ; \ i=0,1,\dots,m_j \ ; \ p=1,2,\dots,t \ ; \ l=0,1,\dots,n_p} \end{matrix} \right|$$

dove le b_p sono costanti date e, in quanto nel gruppo si ha la zr, possiamo senz'altro supporre $b_1 = 0$.

[3] **Gruppo accorciato:** $q \ , \ xp + yq$.

73. — Qui dobbiamo riprendere i gruppi corrispondenti al gruppo q (nn. 65-63) e ampliarli con l'aggiunta di una trasf. inf.

$$xp + yq + [\overline{\alpha}_1(x, y)z + \alpha_1(x, y)]r \ .$$

Nel caso dei *gruppi di seconda specie*, poichè dalla

$$(q \ , \ xp + yq + [z\overline{\alpha}_1 + \alpha\,]r) = q + \left[z \frac{\partial \overline{\alpha}_1}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right] r$$

risulta che α_1 è indipendente dalla y, si riduce codesta funzione a zero con una opportuna trasformazione lineare della z. Abbiamo così anzitutto il gruppo

$$[3, I] \qquad q\ ,\ xp + yq\ ,\ \psi(x, y)r$$

E in secondo luogo dovremo considerare un gruppo della forma

$$q\ ,\ xp + yq + \alpha_1(x, y)r\ ,\ \theta(x, y)r$$

dove θ è l'integrale generale di un sistema involutorio S di equazioni lineari alle derivate parziali *a coefficienti indipendenti da* y *e non appartenente alla classe del* MAYER.

Poichè al gruppo debbono appartenere le

$$(q\ ,\ \theta r) = \theta_y r\ ,\ (xp + yq + \alpha_1 r\ ,\ \theta r) = [x\theta_x + y\theta_y]r\ ,$$

il sistema differenziale S, che definisce θ, deve ammettere le due trasf. inf.

$$q\ ,\ xp + yq\ . \tag{12}$$

Possiamo di qui dedurre facilmente quale debba essere la forma delle equazioni di S, valendoci della teoria degli invarianti differenziali. Estendendo le (12) e considerando la θ come una variabile, che sia funzione di x, y e rimanga inalterata rispetto alle (12), otteniamo

$$q \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$xp + yq \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - \theta_{1\cdot 0}\frac{\partial f}{\partial \theta_{1\cdot 0}} - \theta_{0\cdot 1}\frac{\partial f}{\partial \theta_{0\cdot 1}} - \dots - [m+n]\theta_{mn}\frac{\partial f}{\partial \theta_{mn}} - \dots$$

dove si è posto

$$\theta_{mn} = \frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n}\ .$$

Allora, con una integrazione immediata, si trova che un ***sistema completo di invarianti differenziali d' ordine h*** del gruppo (12) è dato da

$$x^{m+n}\theta_{mn} \qquad m + n = 0, 1, 2, \dots, h\ ;$$

e si conclude senz' altro che il sistema S sarà della forma

$$\sum_{m, n} a_{i, m, n} x^{m+n} \frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 \qquad m + n = 0, 1, 2, \dots, h\ ; \tag{S}$$

dove le $a_{i,m,n}$ sono costanti date. Nulla di più possiamo dire circa la θ e qui e nei nn. immediatamente successivi designeremo con $\lambda(x, y)$ la soluzione generale di un sistema involutorio (non appartenente alla classe del MAYER) della forma (S).

Resta infine da tener conto della

$$(q\ ,\ xp + yq + \alpha_1 r) = q + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} r\ ,$$

la quale, se indichiamo con λ_1 una soluzione particolare determinata del nostro sistema (S), dà

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = \lambda_1(x, y)$$

e quindi

$$\alpha_1 = \int \lambda_1 dy + \beta(x)\ .$$

Assunta come nuova z la

$$z - \int \beta x^{-1} dx$$

si annulla il secondo termine, ma il primo in generale non si può mandar via. Otteniamo così il gruppo

$$[3, II] \qquad \left|\ q\ ,\ xp + yq + D_y^{-1} \lambda_1 r\ ,\ \lambda(x, y) r\ \right|\ ,$$

dove i simboli hanno il senso dianzi fissato.

74. — Per determinare i *gruppi di terza specie*, consideriamo anzitutto il *gruppo generatore*, che deve essere della forma

$$q\ ,\ xp + yq + \alpha_1(x, y) r\ ,\ r\ .$$

Dalla

$$(q\ ,\ xp + yq + \alpha_1 r) = q + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} r$$

si ricava

$$\alpha_1 = ay + \bar{\alpha}_1(x)$$

dove a è una costante data e $\bar{\alpha}_1$ è una funzione determinata di x. Posto allora

$$z' = z - ay - \int \frac{\bar{\alpha}_1}{x} dx \ ,$$

si riduce $\alpha_1 = 0$ e si ottiene il gruppo generatore

$$q \ , \ xp + yq \ , \ r \ .$$

Avremo così anzitutto, corrispondentemente ai gruppi [1, IV], [1, V] (n. 66),

[3, IV] $\left| \; q \, , xp + yq \, , \psi_0(x \, , y)r \, , \psi_1(x \, , y)zr \; \right|$ [3, V] $\left| \; q \, , xp + yq \, ; \psi(x, y)r \, , \lambda(x, y)zr \; \right|$

dove λ ha lo stesso senso che nel gruppo [3, II].

Ampliando poi il gruppo [1, VI]

$$q \ , \ \psi(x \, , y)r \ , \ zr \ . \ \sigma_{ijl}(x) y^i e^{c_j y} zr$$

con l'aggiunta della $xp + yq$, troviamo che, in base alle

$$(xp + yq \ , \ \sigma_{ijl} y^i e^{c_j y} zr) = [x\sigma'_{ijl} + i\sigma_{ijl}] y^i e^{c_i y} zr + c_j \sigma_{ijl} y^{i+1} e^{c_j y} \ ,$$

applicate per i massimi valori dell'esponente i, devono annullarsi tutte le costanti c_j e d'altra parte le σ, nelle quali ormai possiamo sopprimere il secondo indice, devono soddisfare ai sistemi di congruenze

$$x\sigma'_{il} \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \sigma_{i1} \ , \ \sigma_{i2} \ , \dots , \ \sigma_{ih_i}] \ .$$

Questi sono sistemi di equazioni differenziali lineari, i cui secondi membri hanno per coefficienti delle σ_{il} costanti determinate, cosicchè, assumendo come nuova x il log x, si riducono senz'altro a coefficienti costanti. Perciò le σ_{il} saranno della forma

$$x^{\alpha_{ij}} \log^s x \qquad (j = 1, 2, \dots, k_i \, ; s = 0, 1, \dots, m_{ij})$$

e otteniamo il gruppo

$$[3, \text{VI}] \qquad \left| \; \underset{i=0,1,\dots,n \, ; \, j=1,2,\dots,k_i \, ; \, s=0,1,\dots,m_{ij}}{q \ , \ xp + yq \ , \ \psi(x, y)r \ , \ zr \ , \ y^i x^{\alpha_{ij}} \log^s xzr} \; \right|$$

Considerazioni analoghe a quelle or ora svolte conducono ai seguenti gruppi ottenuti ampliando i gruppi $[1, \mathrm{VII}]_1$ — $[1, \mathrm{VIII}]_2$

$[3, \mathrm{VII}]_1$
$$q\ ,\ xp + yq\ ,\ \varphi_{jl}(y)x^{\alpha_j(y)} \log^l x r\ ,\ \varphi(y)zr \qquad j = 1, 2, \dots, s\ ;\ l = 0, 1, \dots, m_j$$

$[3, \mathrm{VII}]_2$
$$q\ ,\ xp + yq\ ,\ \varphi_{ij}(x)y^i e^{a_j \frac{y}{x}} r\ ,\ \varphi(x)zr \qquad j = 1, 2, \dots, s\ ;\ i = 0, 1, \dots, m_j$$

$[3, \mathrm{VIII}]_1$
$$q\ ,\ xp + yq\ ,\ \varphi_{jl}(y)x^{\alpha_j(y)} \log^l x r\ ,\ y^i zr \qquad j = 1, \dots, s\ ;\ l = 0, 1, \dots, m_j\ ;\ i = 0, 1, \dots, n$$

$[3, \mathrm{VIII}]_2$
$$q\ ,\ xp + yq\ ,\ \varphi_{ij}(x)y^i e^{a_j \frac{y}{x}} r\ ,\ zr\ ,\ x^{b}{}^{p} \log^l xzr$$

$[4]$ **Gruppo accorciato:** $q\ ,\ yq$.

75. — Dobbiamo aggiungere ai gruppi corrispondenti al gruppo $[1]$ (nn. 65-69) una trasf. inf.

$$yq + [z\bar{\beta}_1(x, y) + \beta_1(x, y)]r\ .$$

Cominciando dai *gruppi di seconda specie*, ricaviamo dalla

$$(q\ ,\ yq + [z\bar{\beta}_1 + \beta_1]r) = q + \left[z\frac{\partial\bar{\beta}_1}{\partial y} + \frac{\partial\beta_1}{\partial y}\right]r$$

che deve essere

$$\frac{\partial\bar{\beta}_1}{\partial y} = 0\ ,$$

e allora o $\bar{\beta}_1$ è costante, oppure assumeremo la $\bar{\beta}_1(x)$ come nuova x, talchè abbiamo anzitutto i due gruppi

$[4, \mathrm{I}]_1$ $\quad q\ ,\ yq + azr\ ,\ \psi(x, y)r \quad$. $\quad [4, \mathrm{I}]_2$ $\quad q\ ,\ yq + xzr\ ,\ \psi(x, y)r$

In secondo luogo avremo da considerare i gruppi della forma

$$(12) \qquad q \ , \ yq + [az + \beta_1(x\,,y)]r \ , \ \theta(x\,,y)r \ ,$$

$$(12') \qquad q \ , \ yq + [xz + \beta_1(x\,,y)]r \ , \ \theta(z\,,y)r \ ,$$

dove θ rappresenta la soluzione generale dipendente da *infinite* costanti arbitrarie, di un sistema (S) di equazioni lineari alle derivate parziali.

Si tratta anzitutto di precisare la natura del sistema (S). Cominciando dai gruppi (12), abbiamo, in base alle

$$(q\ ,\ \theta r) = \theta_y r \ , \ (yq + [az + \beta_1]r\ ,\ \theta r) = [y\theta_y - a\theta]r \ ,$$

che il sistema (S) deve ammettere le due trasf. inf. in $x\,, y\,, \theta$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \ , \ y\frac{\partial f}{\partial y} - a\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} \ ,$$

le quali, estese agli elementi differenziali, diventano

$$\frac{\partial f}{\partial y} \ , \ y\frac{\partial f}{\partial y} - \sum_m [a+n]\left[\theta_{0\,.\,n}\frac{\partial f}{\partial \theta_{0\,.\,n}} + \theta_{1\,.\,n}\frac{\partial f}{\partial \theta_{1\,.\,n}} + \theta_{2\,.\,n}\frac{\partial f}{\partial \theta_{2\,.\,n}} + \ldots\right] .$$

La prima di queste due trasf. inf. implica pel sistema (S) la riducibilità, mediante sole eliminazioni, ad aver coefficienti indipendenti da y. E applicando iteratamente la seconda, troviamo che se in (S) compare l'equazione

$$(13) \qquad \sum_{m,n} \alpha_{m\,,\,n}(x)\,\frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 \ ,$$

vi compaiono altresì le infinite equazioni

$$\sum_{m\,.\,n} [a+n]^i \alpha_{m\,.\,n}\,\frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 \qquad (i = 1\,,2\,,3\,,\ldots,\infty)$$

ossia

$$\sum_n [a+n]^i \sum_m \alpha_{m\,.\,n}\,\frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 \ .$$

Si conclude di qui che la (13) si spezza in tante equazioni aventi la forma

$$\sum_m \alpha_{m,n}(x) \frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 , \tag{14}$$

in ciascuna delle quali varia da termine a termine il solo indice m, mentre l'indice n conserva il medesimo valore in ogni termine.

Il sistema (S) sarà dunque costituito da equazioni della forma (14) e noi procederemo ben tosto alla integrazione di un sistema siffatto. Prima per altro conviene integrare una singola equazione (14), che pel momento, tralasciando nei coefficienti l'indice fisso n, scriveremo sotto la forma

$$\sum_{m=0}^{m=h} \alpha_m(x) \frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 . \tag{14'}$$

La forma differenziale al primo membro è il prodotto operatorio delle due forme differenziali lineari, una nella sola D_x, l'altra nella sola D_y

$$\sum_{m=0}^{m=h} \alpha_m(x) D_x^m \quad , \quad D_y^m ,$$

le quali, poichè la prima ha coefficienti indipendenti da y, *sono fra loro commutabili.*

In base a questa osservazione si può subito mostrare come ogni soluzione della (14′) sia decomponibile nella somma di una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^n \theta_1}{\partial y^n} = 0 \tag{15}$$

e di una soluzione della

$$\sum_{m=0}^{m=h} \alpha_m(x) \frac{\partial^m \theta_2}{\partial x^m} = 0 ; \tag{16}$$

ossia, come dice il PINCHERLE, si può dimostrare che lo spazio delle soluzioni della (14′) è la *somma* degli spazi delle soluzioni delle (15) e (16).

Notiamo intanto che la soluzione generale della (15) è data da

$$\varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + y^2\varphi_2(x) + \dots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x) \;,$$

dove le φ_i sono, al solito *funzioni arbitrarie, fra loro indipendenti, della* x; e se indichiamo con

$$\sigma_1(x) \;,\; \sigma_2(x) \;,\; \dots \;,\; \sigma_h(x)$$

un sistema fondamentale di soluzioni della (16), considerata come equazione differenziale nella sola x, la soluzione generale della (16), nell'insieme di tutte le funzioni di x e y, sarà data da

$$\bar{\varphi}_1(y)\sigma_1(x) + \bar{\varphi}_2(y)\sigma_2(x) + \dots + \bar{\varphi}_h(y)\sigma_h(x) \;,$$

dove le φ_i sono *funzioni arbitrarie e indipendenti* della y.

Ciò posto, poichè, come notammo, la (14') si può scrivere indifferentemente

$$(14'') \qquad \sum_{m=0}^{m=h} \alpha_m(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left[\frac{\partial^n \theta}{\partial y^n}\right] = 0$$

oppure

$$(14''') \qquad \frac{\partial^n}{\partial y^n} \sum_{m=0}^{m=h} \alpha_m(x) \frac{\partial^m \theta}{\partial x^m} = 0 \;,$$

è chiaro che, se θ_1 è una qualsiasi soluzione della (15) e θ_2 è una qualsiasi soluzione della (16), la $\theta_1 + \theta_2$ soddisfa alla (14').

Ora si tratta di invertire questo risultato. — Sia θ una soluzione della (14'), che non soddisfaccia già alla (15) o alla (16). Allora, poichè la (14') si può considerare sotto la forma (14''), avremo che la funzione

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial y^n} \;,$$

per ipotesi diversa da zero, soddisfarà alla (16); cioè, indicando con λ_i certe h funzioni determinate di y, avremo

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial y^n} = \lambda_1(y)\sigma_1(x) + \lambda_2(y)\sigma_2(x) + \dots + \lambda_h(y)\sigma_h(x) \;;$$

e qui basta integrare n volte consecutive ambo i membri rispetto ad y per concludere che θ è uguale ad una combinazione lineare, a coefficienti funzioni di y, delle σ_i, aumentata di un polinomio in y di grado $n-1$ al più, avente per coefficienti funzioni della x; cioè, appunto, ***la funzione*** θ ***è somma di una soluzione della*** (15) ***e di una soluzione della*** (16).

Concludendo, un sistema fondamentale di soluzioni della equazione (14) è dato dalle funzioni

$$\varphi_i(x)y^i \quad , \quad \bar{\varphi}_j(y)\sigma_j(x) \qquad (i=0,1,\dots,n-1\,;\ j=1,2,\dots,h)$$

dove le $\varphi_i, \bar{\varphi}_j$ sono funzioni arbitrarie indipendenti e le σ_j sono funzioni determinate (a meno di una sostituzione lineare a coefficienti costanti).

75. — Ciò premesso, consideriamo il sistema (S) di equazioni, che nel nostro gruppo (12), definisce le θ. Esso, per quanto si è visto sarà della forma

$$\text{(S)} \qquad \frac{\partial^{n_i}}{\partial y^{n_i}} \sum_0^{h_i}{}^m \alpha_{m,i}(x) \frac{\partial^m \theta}{\partial x^m} = 0 \qquad (i=1,2,\dots,s)$$

o come possiamo scrivere simbolicamente

$$\text{(S)} \qquad D_y^{n_i} F_i(\theta) = 0 \qquad (i=1,2,\dots,s)\,,$$

dove le F_i sono forme differenziali lineari nella sola D_x, a coefficienti indipendenti da y. E possiamo supporre che gli indici siano messi in modo che si abbia

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots \leq n_s\ .$$

Se $n_1 > 0$ il sistema è certamente integrabile e non appartiene alla classe del MAYER, in quanto ammette, *almeno*, le soluzioni

$$\varphi_i(x)y^i \qquad (i=0,1,2,\dots,n_1-1);$$

ad ogni modo noi supporremo che le (S) ammettano una soluzione comune.

Se le equazioni

$$\text{(17)} \qquad F_i(\theta)=0 \qquad (i=1,2\dots,s),$$

considerate come equazioni differenziali ordinarie, ammettono soluzioni comuni, queste costituiscono un insieme lineare; e noi possiamo determinare, con sole operazioni razionali, una forma differenziale lineare F (***massimo comune divisore operatorio*** delle forme F_i) tale che l'equazione

$$F(\theta)=0$$

definisca ***tutte e sole*** le soluzioni comuni alle (17). Ciascuna delle F_i si potrà allora decomporre nel prodotto operatorio della F per un'altra forma $\overline{F}_i$, talchè avremo identicamente

$$F_i = \overline{F}_i F \ ,$$

e le forme $\overline{F}_i$, saranno ***prime fra loro,*** cioè non esisterà nessuna funzione λ, per cui sia simultaneamente

$$\overline{F}_i(\lambda)=0 \qquad (i=1,2,3,\dots,s).$$

D'altra parte le $\overline{F}_i$, come le F_i e la F, hanno i coefficienti indipendenti dalla y e sono quindi commutabili colla D_y, talchè il nostro sistema si potrà scrivere sotto la forma

$$\text{(S)} \qquad D_y^{n_i-n_1}\overline{F}_i\, D_y^{n_1}F(\theta)=0 \qquad (i=1,2,\dots,s).$$

Perciò ogni soluzione dell'equazione

$$\text{(17)} \qquad D_y^{n_1}F(\theta)=0$$

soddisferà simultaneamente a tutte le equazioni (S); e poichè l'equazione precedente è della forma stessa della (14') della pag. 72, concludiamo intanto che il sistema (S) ammette delle soluzioni del tipo

$$\text{(18)} \qquad \varphi_i(x)y^i \ , \quad \bar{\varphi}_j(y)\sigma_j(x) \qquad (i=0,1,\dots,n_1-1\,;\ j=1,2,\dots,h)\ ,$$

dove le φ_i, φ_j sono funzioni arbitrarie e indipendenti, le σ_j funzioni determinate e h è l'ordine della forma F.

Per determinare la soluzione generale del sistema (S), consideriamo accanto a codesto sistema il sistema

$$\text{(S}_1\text{)} \qquad D_y^{n_i-n_1}\overline{F}_i(\theta_1)=0 \qquad (i=1,2,\dots,s)$$

Dalla forma sotto cui ponemmo da ultimo il sistema (S) risulta senz'altro che ogni soluzione θ di esso, che non appartenga all'insieme lineare definito dal sistema fondamentale (18) e perciò non soddisfaccia alla (17), deve esser tale che la

$$\theta_1 = D_y^{n_1} F(\theta)$$

soddisfaccia al sistema (S_1) e viceversa. Risulta intanto di qui che se il sistema (S_1) non ammette soluzioni, l'insieme lineare definito dalle (18) costituisce la soluzione generale del nostro sistema primitivo (S).

Ma escludiamo codesto caso; cioè supponiamo che il sistema (S_1) sia integrabile. Noi dimostreremo che in ogni caso il sistema (S_1) è un ***sistema del*** MAYER, cioè ammette solo un numero finito di soluzioni linearmente indipendenti.

A tale scopo consideriamo anzitutto la prima delle equazioni (S_1), cioè la

$$\overline{F}_1(\theta_1) = 0 .$$

Se $\tau_1(x), \tau_2(x), \ldots, \tau_k(x)$ è un sistema fondamentale di soluzioni della equazione precedente, considerata come una equazione differenziale ordinaria, avremo che, nell'insieme delle funzioni di x e y, ogni sua soluzione sarà della forma

$$\mu_1(y)\tau_1(x) + \mu_2(y)\tau_2(x) + \ldots + \mu_k(y)\tau_k(x) \tag{19}$$

dove le μ_i sono funzioni della sola y, assolutamente qualsiansi. Per avere le soluzioni del sistema (S_1) dovremo determinare le μ_i in modo che la (19) soddisfi alle altre $s-1$ equazioni di (S_1). Ora siccome le F_i sono prime fra loro, ve ne sarà *almeno* una che considerata come forma differenziale lineare ordinaria non avrà nessuna soluzione comune con la F_1. Per esempio sia prima con la F_1 la F_r, cioè la F_r non si annulli per nessuna combinazione lineare delle $\tau_i(x)$. Allora sostituendo la (19) nella r^{ma} equazione di (S_1)

$$D_y^{n_r - n_1} \overline{F}_r(\theta_1) = 0$$

otteniamo

$$\sum_0^h {}_l \frac{d^{n_r - n_1}\mu_l}{dy^{n_r - n_1}} F_r(\tau_l) = 0$$

e di qui, in quanto le $F_r(\tau_l)$ sono funzioni linearmente indipendenti, perchè la F_r non si annulla per nessuna combinazione lineare delle τ_l, concludiamo che deve essere

$$\frac{d^{n_r - n_1}\mu_l}{dy^{n_r - n_1}} = 0 \qquad (l = 1, 2, \dots, k) .$$

Si ha dunque che le μ_l sono *polinomi in* y, il cui grado non supera $n_r - n_1$; e resta dimostrato intanto che il sistema (S_1), supposto integrabile, ammette *un numero finito di soluzioni linearmente indipendenti*, ciascuna delle quali è un polinomio in y a coefficienti dipendenti da x.

Ora, tornando al nostro sistema primitivo (S), ricordiamo che quelle soluzioni θ di (S), che sono linearmente indipendenti dalle (18), debbono soddisfare all'equazione non omogenea

$$D_y^{n_1} F(\theta) = \theta_1 ,$$

dove θ_1 rappresenta la soluzione generale (dipendente linearmente da un numero finito di costanti arbitrarie) del sistema (S_1).

Di qui integrando n_1 volte successivamente ambo i membri rispetto ad y e indicando con $D_y^{-1}\theta_1$ la *determinazione principale* della integrazione rispetto ad y (*), otteniamo l'equazione non omogenea

$$F(\theta) = D_y^{-n_1}\theta_1 + \sum_0^{n_1 - 1} \varphi_i(x) y^i ,$$

dove la $\varphi_i(x)$, corrispondenti alle ordinarie *costanti di integrazione*, sono funzioni arbitrarie ed indipendenti. Quanto a $D_y^{-n_1}$, se θ_1 era, come polinomio in y, di grado n, sarà un polinomio di grado $n + n_1$ e avente per $y = 0$, *qualunque sia* x, uno zero dell'ordine n_1 almeno; sarà cioè

$$D_y^{-n_1}\theta_1 = y^{n_1} \sum_0^{n} \lambda_u(x) y^u$$

dove le λ_u sono funzioni della x, dipendenti linearmente da un numero finito di costanti arbitrarie.

(*) Cioè quella per cui la costante di integrazione, nell'intorno di un punto prefissato, p. es. $y = 0$, è nulla. Cfr. l'op. cit. PINCHERLE - AMALDI — *Le operazioni distributive* ecc., pag. 78.

Ora per integrare la nostra equazione

$$(20) \qquad F(\theta) = y^{n_1} \sum_0^n \lambda_u(x) y^u + \sum_0^{n_1 - 1} \varphi_i(x) y^i ,$$

basterà che ne determiniamo una soluzione particolare e che ad essa poi aggiungiamo la soluzione generale dell'equazione omogenea, cioè precisamente la più generale funzione dell'insieme lineare definito dalle

$$\bar{\varphi}_j(y) \sigma_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) .$$

Ciò posto consideriamo le $n + n_1$ equazioni differenziali ordinarie non omogenee

$$\text{a)} \qquad F\left(\rho_{n_1 + l}\right) = \lambda_l \qquad (l = 0, 1, \ldots, n)$$

$$\text{b)} \qquad F(\rho_i) = \varphi_i(x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n_1 - 1)$$

e per ciascuna di esse determiniamo una soluzione particolare, p. es. la ***soluzione principale*** (Hauptintegral). È allora evidente che la espressione

$$\rho = \sum_0^{n + n_1} \rho_l(x) y^l$$

è una soluzione della nostra equazione non omogenea (20). Possiamo quindi concludere che la soluzione generale del nostro sistema (S) è data dall'insieme lineare definito dalla ρ or ora determinata e dalle

$$(18) \qquad \varphi_i(x) y^i , \ \bar{\varphi}_j(y) \sigma_j(x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n_1 - 1 ; \ j = 1, , \ldots 2, h) .$$

Ma occorre aggiungere qualche osservazione. Anzitutto decomponendo la ρ nelle due parti

$$\sum_0^{n_1 - 1} \rho_i(x) y^i + \sum_{n_1}^{n + n_1} \rho_j(x) y^j ,$$

troviamo che la prima parte si può senz'altro trascurare per la presenza delle $\varphi_i(x) y^i$ fra le (18).

In secondo luogo vediamo da quali elementi arbitrarii dipendano le ρ_j per $j = n_1 + 1, \ldots, n + n_1$. Poichè codeste ρ_j sono le soluzioni principali delle equazioni a), avremo per esse la medesima

arbitrarietà che spetta alle λ_l. Ma queste sono i coefficienti dei polinomi θ_1 in y, che sono definiti dal sistema (S_1), che vedemmo appartenere alla classe del MAYER. Avremo dunque che le ρ_l dipendono (linearmente) da ***un numero finito di costanti arbitrarie.***

Infine ricordiamo che, se θ è una soluzione di (S), sono tali altresì $y\theta_y$ e θ_y; perciò avremo, fra le determinazioni di θ, insieme con ρ tutti i polinomi

$$\sum_{j=n_1}^{n_1+n} j^r \rho_j(x) y^j \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

talchè ρ si spezza nei singoli monomi

$$\rho_j(x) y^j \qquad (j = n_1, u_1 + 1, \ldots, n_1 + n),$$

ciascuno dei quali soddisferà ad (S). E accanto a $\rho_j y^j$ avremo $\rho_j y^{j-1}$, talchè il coefficiente di y^{j-1} ammetterà tutte le determinazioni (costituenti, ben inteso, per $j \geq n_1$ un insieme lineare ad un numero finito di dimensioni) del coefficiente di y^j, il che, naturalmente non esclude che altre, in numero finito, possa ammetterne.

Concludendo oramai la nostra discussione, abbiamo che ***il sistema*** (S) ***ammette un sistema fondamentale di soluzioni della forma***

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \varphi_i(x) y^i \qquad , \qquad \bar{\varphi}_j(y) \sigma_j(x) \\ (i = 0, 1, \ldots, n_1 - 1) \qquad (j = 1, 2, \ldots, h) \\ \rho_{l_t}(x) y^{n_1 + t} \\ (t = 0, 1, \ldots, n \; ; \; l_t = 1, 2, \ldots, m_t + m_{t+1} + \ldots + m_n), \end{array} \right.$$

dove le φ_i, $\bar{\varphi}_j$ sono funzioni arbitrarie e le ρ e σ sono funzioni determinate.

Notiamo che il coefficiente di y^{n_1+t} ammette tutte le determinazioni del coefficiente di y^{n_1+t+1} e in più altre m_t determinazioni linearmente indipendenti da quelle or ora indicate (cioè m_t determinazioni ***appartenenti*** all' esponente $n_1 + t$).

E osserviamo infine che se è $n_1 = 0$, mancano nel quadro (21) le $\varphi_i(x) y_i$ per $i = 0, 1, \ldots, n_1 - 1$.

77. — Possiamo finalmente tornare al nostro gruppo

$$q \;,\; yq + [az + \beta_1(x, y)] r \;,\; \theta(x, y) r \;,$$

dove θ ammette il sistema fondamentale di determinazioni (21), e ci resta a determinare la funzione β_1. In base alla

$$(q, yq + [az + \beta_1]r) = q + \frac{\partial \beta_1}{\partial y} r,$$

la β_1 è legata dall'unica condizione

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial y} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \theta).$$

Ora notiamo che fra le determinazioni (21) della θ, le $\varphi_i(x)y^i$, integrate rispetto alla y, danno tutte funzioni dell'insieme stesso, tranne le $\varphi^{n_1-1}y^{n_1-1}$, che conducono a funzioni della forma $\beta(x)y^{n_1}$.

Le $\varphi_j(y)\sigma_j(x)$, integrate rispetto ad y, portano a funzioni dello stesso insieme (21); e infine, per quanto riguarda gli integrali rispetto ad y delle

$$\rho_{l_t}(x)y^{n_1+t},$$

escono dall'insieme delle (21) soltanto gli integrali delle *funzioni appartenenti* rispettivamente *agli esponenti* $n_1, n_1+1, \ldots, n_1+n$.

Avremo quindi

$$\beta_1 \equiv \beta(x)y^{n_1} + y^{n_1+1} \sum_{t=0}^{n} y^t \Big[b_{t,1}\rho_{1+m_{t+1}+\cdots+m_n} + b_{t,2}\rho_{2+m_{t+1}+\cdots+m_n} + \cdots$$
$$\cdots + b_{t,m_t}\rho_{m_t+\cdots+m_n} \Big];$$

dove $\beta(x)$ è una funzione data e le b sono costanti determinate.

Ora se è $n_1 > 0$ e a non è un numero intero si assuma come nuova z la

$$z - y^a \int y^{-a-1}\beta_1 dy;$$

con ciò si riduce $\beta_1 = 0$; la q diventa

$$q - [ay^{a-1} \int y^{-a-1}\beta_1 dy - y^{-1}\beta_1]r, \tag{22}$$

e quest'ultima parentesi quadra è una combinazione lineare delle (21), talchè otteniamo il gruppo

$$[4, \text{II}]_1 \quad \left| \begin{array}{c} q, \; yq + azr \\ \varphi_i(x)y^i r, \quad \bar{\varphi}_j(y)\sigma_j(x)r, \quad \rho_{l_t}(x)y^{n_1+t}r \\ {\scriptstyle i=0,1,\ldots,n_1-1;\; j=1,2,\ldots,h;\; t=0,1,\ldots,n;\; l_t=1,2,\ldots,m_t+m_{t+1}+\cdots+m_n} \end{array} \right.$$

Se a è un numero intero ed è precisamente

$$a = n_1 + u + 1 ,$$

la riduzione precedente cade in difetto pei termini di β_1 che hanno in y il grado $n_1 + u + 1$, in quanto questi producono nella (22) dei termini logaritmici e perciò incongrui a zero rispetto al modulo delle (21).

Otteniamo così il gruppo

$$[4, II]_2 \quad \begin{cases} q \ , \ xq + \left[(n_1 + u + 1) y + y^{n_1 + u + 1} \sum_{1}^{m_u} b_l \rho_{l + m_{u+1} + \cdots + m_n} \right] r \\ \varphi_i(x) y^i r \ , \ \bar{\varphi}_j(y) \sigma_j(x) r \ , \ \rho_{l_t}(x) y^{n_1 + t} r \\ (i = 0, 1, \ldots, n_1 - 1 ; j = 1, 2, \ldots, h ; t = 0, 1, \ldots, u ; l_t = 1, 2, \ldots, m_t + m_{t+1} + \cdots + m_n) \end{cases}$$

Analogamente se $a = n_1$, si trova il gruppo

$$[4, II]_3 \quad \begin{cases} q \ , \ yq + \left[n_1 z + \beta(x) y^{n_1} \right] r \\ \varphi_i(x) y^i r \ , \ \bar{\varphi}_j(y) \sigma_j(x) r \ , \ \rho_{l_t}(x) y^{n_1 + t} r \\ (i = 0, 1, \ldots, n_1 - 1 ; j = 1, 2, \ldots, h ; t = 0, 1, \ldots, n ; l_t = 1, 2, \ldots, m_t + \cdots + m_n) \end{cases}$$

Se la $\beta(x)$ non è identicamente nulla, essa si può assumere come nuova x; ma noi conserveremo la forma tipica precedente, perchè la trasformazione $x' = \beta(x)$ altererebbe le forme tipiche di quei gruppi in due variabili, contenenti il sottogruppo [4], che noi dovremo considerare nel seguito.

78. — Passiamo ai gruppi della forma

$$(12') \qquad q \ , \ yq + [xz + \beta_1(x, y)] r \ , \ \theta(x, y) r \ ,$$

pei quali dovremo avere

$$\theta_y \equiv 0 \ , \ y\theta_y - x\theta \equiv 0 \qquad [\text{mod. } \theta] \ ;$$

o in altre parole il sistema (S) che definisce θ deve ammettere le trasf. inf.

$$\frac{\partial f}{\partial y} \ , \ y \frac{\partial f}{\partial y} - x\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \ ,$$

la prima delle quali implica che le equazioni di (S) siano a coefficienti indipendenti da y.

Per tener conto dell' altra trasf. inf. potremmo ricorrere ancora alla teoria degli invarianti differenziali: ma giungeremo direttamente al risultato in base a facili considerazioni di calcolo funzionale.

Considerata una qualsiasi equazione di (S)

$$F(\theta) = 0 \,, \tag{23}$$

dove F rappresenta una forma lineare alle derivate parziali a coefficienti indipendenti da y, ogni soluzione θ di (S) deve pur soddisfare all' equazione

$$F(y\theta_y - x\theta) = 0 \,,$$

ossia, scrivendo in simboli operatori e tenendo conto della solita formola di sviluppo del PINCHERLE, alla

$$yFD_y(\theta) + F_{0\cdot 1}D_y(\theta) - xF(\theta) - F_{1\cdot 0}(\theta) = 0 \,, \tag{24}$$

dove $F_{1\cdot 0}$, $F_{0\cdot 1}$ rappresentano al solito le due derivate funzionali parziali (rispetto a D_x e D_y) della forma F.

Ma ogni soluzione delle (23) soddisfa anche alla

$$FD_y(\theta) = 0 \,,$$

talchè concludiamo che il sistema (S) deve contenere, accanto ad ogni sua equazione (22), anche la

$$F_{01}D_y(\theta) - F_{10}(\theta) = 0 \,, \tag{25}$$

che è manifestamente dello stesso ordine.

Ciò premesso riduciamo il sistema (S) alla *forma canonica* del TRESSE (*); cioè immaginiamo anzitutto che le equazioni di (S) siano scritte in modo che i rispettivi ordini siano crescenti a partire dal minimo e che dalle equazioni di ordine h non si possano eliminare tutte le derivate di ordine h. Infine le equazioni di ordine h siano risolte rispetto ad altrettante derivate di ordine h (derivate *principali*), in guisa che ciascuna di esse

$$\frac{\partial^h\theta}{\partial x^k \partial y^{h-k}}$$

(*) *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations:* Acta mathematica, vol. 18 (1894): pag. 4 e segg.

sia espressa per mezzo di derivate di ordine $< h$ ***ed, eventualmente, di derivate di ordine*** h ***aventi rispetto ad*** x ***un ordine minore di*** **k**.

Ciò posto, consideriamo fra le equazioni d'*ordine minimo* di (S) quella in cui la derivata principale è rispetto ad x d'ordine minimo e sia

$$(26) \qquad \frac{\partial^p \theta}{\partial x^q \partial y^{p-q}} - \sum_{m,n} \lambda_{m,n}(x) \frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 ;$$

in ogni termine della sommatoria avremo, per ipotesi, o $m+n<p$ oppure $m+n=p$ ed $m<q$.

Dimostriamo anzitutto che deve essere $q=0$. — Infatti il sistema (S) deve contenere, insieme con la (26), l'equazione che se ne deduce come la (25) si ricava dalla (23), cioè l'equazione

$$(27) \quad (p-q)\frac{\partial^p \theta}{\partial x^q \partial y^{p-q}} - q \frac{\partial^{p-1}\theta}{\partial x^{q-1}\partial y^{p-q}} - \sum_{m,n} \lambda_{m,n}\left[n \frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} - m \frac{\partial^{m+n-1}\theta}{\partial x^{m-1}\partial y^n}\right] = 0 .$$

Quest'equazione è evidentemente di forma canonica, e, dato il modo in cui abbiamo scelto la (26), dovrà essere identica alla (26), a meno del fattore numerico $p-q$, o ridursi ad una identità.

La seconda ipotesi conduce alla conclusione assurda $p=q=0$; mentre sotto la prima ipotesi, si trova, identificando i coefficienti di $\frac{\partial^{p-1}\theta}{\partial x^{q-1}\partial y^{p-q}}$ nelle due equazioni (26), (27),

$$q + (p-q)\lambda_{q-1,p-q} = (p-q)\lambda_{q-1,p-q}$$

e quindi, qualunque sia $\lambda_{q-1,p-q}$ (anche nullo)

$$q = 0 .$$

Concludiamo dunque che fra le equazioni d'ordine minimo di (S) avremo un'equazione della forma

$$(26') \qquad \frac{\partial^p \theta}{\partial y^p} - \sum \lambda_{m,n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m d y^n} = 0$$

dove oramai, nella sommatoria, sarà costantemente $m+n<p$. Ma, insieme colla (26'), il sistema (S) deve contenere anche la

$$(27') \qquad p\frac{\partial^p \theta}{\partial y^p} - \sum_{m,n} \lambda_{m,n}\left[n \frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} - m \frac{\partial^{m+n-1}\theta}{\partial x^{m-1}\partial y^n}\right] = 0 ,$$

la quale, essendo $p > 0$, non può essere un'identità e perciò deve coincidere, a meno del fattore p, con la (26'). Dovremo quindi avere, per ogni coppia degli indici m, n,

$$(p-n)\lambda_{m.n} + (m+1)\lambda_{m+1.n} = 0 \;; \tag{28}$$

poichè per $m + n = p$ tutti i $\lambda_{m.n}$ sono nulli e abbiamo sempre $p - n > 0$, si conclude anzitutto che anche per $m + n = p - 1$ i $\lambda_{m,n}$ si annullano; ed allora, in via ricorrente, si trova, in virtù della (28), che tutti i coefficienti $\lambda_{m,n}$ sono nulli; talchè fra le equazioni d'ordine minimo di (S) si ha l'equazione

$$\frac{\partial^p \theta}{\partial y^p} = 0 \,. \tag{29}$$

Di qui risulta senz'altro che θ avrà la forma

$$\theta = \mu_0(x) + y\mu_1(x) + y^2\mu_2(x) + \dots + y^{p-1}\mu_{p-1}(x) \tag{30}$$

dove le $\mu_i(x)$ sono funzioni di x, la cui natura e la cui arbitrarietà sono determinate dalle equazioni che insieme alla (29) costituiscono il sistema (S). Ma qui basta notare che l'insieme delle θ deve essere tsasformato in sè stesso dalla

$$y\frac{\partial f}{\partial y} - x\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

talchè insieme colla (30) avremo fra le determinazioni di θ le infinite funzioni

$$\sum_{i=0}^{p-1} (i-x)^l y_i \mu^i(x) \qquad (l = 0, 1, .., \infty) \,.$$

In altre parole i coefficienti $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p-1}$ ammettono i moltiplicatori

$$-x \,,\; 1-x \,,\; 2-x \,,\; \dots \,,\; p-x-1$$

i quali sono a due a due differenti e dipendono tutti dalla x; dal che, in base al solito nostro lemma (n. 13), risulta che codesti coefficienti μ_i sono funzioni arbitrarie e indipendenti di x. Si trova così il gruppo

$$q \,,\; yq + |xz + \beta_1(x,y)|r \,,\; \varphi_i(x)y^i r \qquad (i = 0, 1, \dots, p-1) \,.$$

Dalla

$$(q\,,\,yq+[xz+\beta_1]r)=q+\frac{\partial\beta_1}{\partial y}r$$

ricaviamo

$$\beta_1\equiv\beta(x)y^p \qquad [\text{mod. } \theta]\,,$$

e basta porre

$$z'=z+(x-p)^{-1}\beta(x)y^p$$

per ridurre $\beta=0$ senza alterare la q. Otteniamo così il gruppo

$$[4\,,\mathrm{II}]_4 \qquad \begin{array}{c} q\;,\;yq+xzr \\ \varphi_i(x)y^i r \\ (i=0,1,\dots,p-1) \end{array}$$

79. — Pei *gruppi di terza specie* il gruppo generatore è della forma

$$q\;,\;yq+\beta_1(x\,,y)r\;,\;r$$

e perciò riducibile a

$$q\;,\;yq+\varepsilon xr\;,\;r$$

dove ε è uguale a 0 o ad 1.

Abbiamo anzitutto il gruppo massimo

$$[4\,,\mathrm{IV}] \qquad q\;,\;yq\;,\;\psi_0(x\,,y)r\;,\;\psi_1(x\,,y)zr$$

Quando il sottogruppo intransitivo è del tipo [V]:

$$\psi(x\,,y)r\;,\;\theta(x\,,y)zr$$

si trovano per le θ le stesse condizioni del n. 78, cosicchè si ottiene il gruppo

$$[4\,,\mathrm{V}] \qquad \begin{array}{c} q\;,\;yq+\varepsilon xzr \\ \psi(x\,,y)r\;,\;\varphi_i(x)y^i zr\;,\;\bar\varphi_j(y)\sigma_j(x)zr\;,\;\rho_{l_t}(x)y^{n_1+t}zr \\ (i=0,1,\dots,n_1-1\;;\;j=1,2,\dots,h\;;\;t=0,1,\dots,n\;;\;l_t=1,2,\dots m_t+m_{t+1}+\dots+m_n) \end{array}$$

Analogamente nel caso del sottogruppo intransitivo [VI] si trova (il sistema che definisce le θ è un sistema del **Mayer**, cioè precisamente un sistema della forma (S_1) della pag. 75) il gruppo

[4, VI]

$$q \,,\; yq + \varepsilon xzr \,,$$
$$\psi(x, y)r \,,\; \rho_{l_t}(x) y^t zr$$
$$(t = 0, 1, \dots, n \;;\; l_t = 1, 2, \dots, m_t + m_{t+1} + \dots + m_n)$$
$$\varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$$

Infine, corrispondentemente ai gruppi $[1, \text{VII}]_1$-$[1, \text{VIII}]_2$ delle pag. 61-62 troviamo

$[4, \text{VII}]_1$

$$q \,,\; yq$$
$$\varphi_i(y)\sigma_i(x)r \,,\; \varphi(y)zr$$
$$(i = 1, 2, \dots, h)$$

$[4, \text{VII}]_2$

$$q \,,\; yq$$
$$\varphi_i(x)y^i r \,,\; \varphi(x)zr$$
$$(i = 0, 1, \dots, n)$$

$[4, \text{VIII}]_1$

$$q \,,\; yq$$
$$\varphi_i(y)\sigma_i(x)r \,,\; y^j zr$$
$$(i = 1, 2, \dots h \;;\; j = 0, 1, \dots, n)$$

$[4, \text{VIII}]_2$

$$q \,,\; yq + \varepsilon xzr$$
$$\varphi_i(x)y^i r \,,\; zr \,,\; \sigma_l(x)zr$$
$$(i = 0, 1, \dots, n \;;\; l = 1, 2, \dots, h)$$

[5] **Gruppo accorciato:** $q \,,\, yq \,,\, y^2 q$.

80. — Dovremo aggiungere una trasf. inf.

$$y^2 q + [\beta_2(x, y)z + \beta_3(x, y)]r$$

ai gruppi corrispondenti al gruppo [4]: $q \,,\, yq$ (nn. 5-79).

Corrispondentemente ai gruppi $[4, \text{I}]_1$ e $[4, \text{I}]_2$, troviamo

$[5, \text{I}]_1$

$$q \,,\; yq + azr \,,\; y^2 q + 2ayzr \,,\; \psi(x, y)r$$

$[5, \text{I}]_2$

$$q \,,\; yq + xzr \,,\; y^2 q + 2xyzr \,,\; \psi(x, y)r \quad .$$

Prendendo le mosse dal gruppo $[4, \text{II}]_1$:

$$q \,,\; yq + azr$$
$$\varphi_i(x)y^i r \,,\; \bar{\varphi}_j(y)\sigma_j(x)r \,,\; \rho_{l_t}(x) y^{n_1 + t} r$$
$$(i = 0, 1, \dots, n_1 - 1 \;;\; j = 1, 2, \dots, h \;;\; t = 0, 1, \dots, n \;;\; l_t = 1, 2, \dots, m_t + m_{t+1} + \dots + m_n)$$

troviamo anzitutto per la trasf. inf. aggiuntiva la forma

$$y^2q + [2ayz + \beta_2(x, y)]r$$

e, in base alla

$$\left(y^2q + \left[2ayz + \beta_2\right]r \ , \ \varphi_{n_1-1}y^{n_1-1}r\right) = \left[n_1 - 1 - 2a\right]\varphi_{n_1-1}y^{n_1}r \ ,$$

poichè la trasf. inf. al secondo membro non appartiene al gruppo, concludiamo che mancano le $\varphi_i y^i$, oppure è

$$a = \frac{n_1 - 1}{2} \ .$$

Nel primo caso, cioè quando manchino le $\varphi_i y^i$, dalla

$$(y^2q + [2ayz + \beta_2]r \ , \ \rho y^n r) = (n - 2a)\rho y^{n+1} r$$

deduciamo che mancano anche le $\rho y^t r$ oppure che è

$$a = \frac{n}{2} \ .$$

Corrispondentemente a questi vari casi troviamo i gruppi

$[5, \mathrm{II}]_1$
$$q \ , \ yq + azr \ , \ y^2q + 2ayzr \qquad \varphi_j(y)\sigma_j(x)r \qquad (j = 1, 2, \dots, h)$$

$[5, \mathrm{II}]_2$
$$q \ , \ yq - zr \ , \ y^2q - [2yz + \beta(x)]r \qquad \varphi_j(y)\sigma_j(x)r \qquad (j = 1, 2, \dots, h)$$

$[5, \mathrm{II}]_3$
$$q \ , \ yq + \frac{n-1}{2}zr \ , \ y^2q + (n-1)yzr \qquad \varphi_i(x)y^i r \ , \ \bar{\varphi}_j(y)\sigma_j(x)r \qquad i = 0, 1, \dots, n-1 \ ; \ j = 1, 2, \dots, h$$

$[5, \mathrm{II}]_4$
$$q \ , \ yq \ , \ y^2q + \beta(x)yr \qquad \varphi(x)r \ , \ \varphi_j(y)\sigma_j(x)r \qquad (j = 1, 2, \dots, h)$$

$[5, \mathrm{II}]_5$
$$q \ , \ yq + \frac{n}{2}zr \ , \ y^2q + nyzr \qquad \varphi_j(y)\sigma_j(x)r \ , \ \rho_{l_t}(x)y^t r$$
$$(j = 0, 1, \dots, h \ ; \ t = 0, 1, \dots, n \ ; \ l_t = 1, 2, \dots, m_t + m_{t+1} + \dots + m_n)$$

$[5, \mathrm{II}]_6$
$$q \ , \ yq + uzr \ , \ y^2q + \left[2uyz + y^{u+1}\sum_{l=1}^{m_u} b_l\rho_{l+m_{u+1}+\dots+m_n}\right]r$$
$$\varphi_j(y)\sigma_j(x)r \ , \ \rho_{l_t}(x)y^t r$$
$$(j = 1, 2, \dots, h \ ; \ t = 0, 1, \dots, 2u \ ; \ l_t = 1, 2, \dots, m_t + m_{t+1} + \dots + m_{2u})$$

Prendendo le mosse dal gruppo $[4, \mathrm{II}]_2$ si ricade sul gruppo $[5, \mathrm{II}]_6$ e il gruppo $[4, \mathrm{II}]_3$ conduce a

$[5, \mathrm{II}]_7$
$$\begin{array}{c} q \ , \ yq + \beta(x)r \ , \ y^2q + 2\beta(x)yr \\ \varphi_j(y)\sigma_j(x)r \ , \ \rho_l(x)r \\ {\scriptstyle (j=1,2,\dots,h \ ; \ l=1,2,\dots,m)} \end{array}$$

Infine non esiste nessun gruppo corrispondentemente al gruppo $[4, \mathrm{II}]_4$.

81. — Il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie* può essere di due tipi diversi (corrispondenti in qualche modo ai tipi $[5, \mathrm{II}]_4$ e $[5, \mathrm{II}]_7$ determinati dianzi):

a) $q \ , \ yq \ , \ y^2q + ayr \ , \ r$

b) $q \ , \ yq + axs \ , \ y^2q + 2axyr \ , \ r$.

Otteniamo così i gruppi seguenti, corrispondenti ai gruppi $[4, \mathrm{IV}]$-$[4, \mathrm{VIII}]_2$

$[5, \mathrm{IV}]$
$$q \ , \ yq \ , \ y^2q \ , \ \psi_0(x, y)r \ , \ \psi_1(x, y)zr$$

$[5, \mathrm{V}]_1$
$$\begin{array}{c} q \ , \ yq \ , \ y^2q + 2ayzr \ , \\ \psi(x, y)r \ , \ \varphi(x)zr \ , \ \varphi_j(y)\sigma_j(x)zr \\ {\scriptstyle (j=1,2,\dots,h)} \end{array}$$

$[5, \mathrm{V}]_2$
$$\begin{array}{c} q \ , \ yq \ , \ y^2q + 2ayzr \\ \psi(x, y)r, \varphi_j(y)\sigma_j(x)zr, zr, \rho_l(x)zr \\ {\scriptstyle (j=1,2,\dots,h \ ; \ l=1,2,\dots,m)} \end{array}$$

$[5, \mathrm{V}]_3$
$$\begin{array}{c} q, yq + axzr, y^2q + 2axyzr \\ \psi(x, y)r \ , \ \varphi(x)zr \ , \ \varphi_j(y)\sigma_j(x)zr \\ {\scriptstyle (j=1,2,\dots,h)} \end{array}$$

$[5, \mathrm{V}]_4$
$$\begin{array}{c} q, yq + axzr, y^2q + 2axyzr \\ \psi(x, y)r, \varphi_j(y)\sigma_j(x)zr, zr, \rho_l(x)zr \\ {\scriptstyle (j=1,2,\dots,h \ ; \ l=1,2,\dots,m)} \end{array}$$

$[5, \mathrm{VI}]_1$
$$\begin{array}{c} q \ , \ yq \ , \ y_2q + 2ayzr \\ \psi(x, y)r \ , \ zr \ , \ \rho_l(x)zr \\ {\scriptstyle (l=1,2,\dots,m)} \end{array}$$

$[5, \mathrm{VI}]_2$
$$\begin{array}{c} q \ , \ yq + axzr \ . \ y^2q + 2axyzr \\ \psi(x, y)r \ , \ zr \ , \ \rho_l(x)zr \\ {\scriptstyle (l=1,2,\dots,m)} \end{array}$$

$[5, \mathrm{VII}]_1$
$$\begin{array}{c} q \ , \ yq \ , \ y^2q \\ \varphi_i(y)\sigma_i(x)r \ , \ \varphi(y)zr \\ {\scriptstyle (i=1,2,\dots,h)} \end{array}$$

$[5, \mathrm{VII}]_2$
$$\begin{array}{c} q \ , \ yq \ , \ y^2q + nyzr \\ \varphi_i(x)y^ir \ , \ \varphi(x)zr \\ {\scriptstyle (i=0,1,2,\dots,n)} \end{array}$$

$$[5\,,\mathrm{VII}]_2 \qquad \begin{gathered} q\;,\; yq\;,\; y^2q + 2axyzr \\ \varphi_0(x)r\;,\; \varphi_1(x)zr \end{gathered}$$

$$[5\,,\mathrm{VIII}]_1 \qquad \begin{gathered} q\;,\; yq\;,\; y^2q + ayzr \\ \varphi_j(y)\tau_j(x)r\;,\; zr \\ {\scriptstyle (j=1,2,\dots,h)} \end{gathered} \qquad\qquad [5\,,\mathrm{VIII}]_2 \qquad \begin{gathered} q\;,\; yq\;,\; y^2q + nyzr \\ \varphi_i(x)y^ir\;,\; zr\;,\; \sigma_l(x)zr \\ {\scriptstyle (i=0,1,\dots,n\,;\; l=1,2,\dots,h)} \end{gathered}$$

[6] Gruppo accorciato: $p\,,q\,,yq$.

82. — Otterremo i gruppi corrispondenti al nostro gruppo accorciato aggiungendo una trasf. inf.

$$p + [z\alpha_0(x\,,y) + \alpha_0(x\,,y)]r$$

ai gruppi corrispondenti al gruppo [4]: $q\,,yq$ (pagg. 70-86).

Fra i gruppi di *seconda specie* abbiamo anzitutto:

$$[6\,,\mathrm{I}] \qquad p\;,\; q\;,\; yq + azr\;,\; \psi(x\,,y)r$$

Quando si prendono le mosse dal gruppo $[4\,,\mathrm{II}]_1$ (pag. 80) si trova anzitutto che α_0 è indipendente da y, talchè si può ridurre a zero senza alterare le altre trasf. inf. del gruppo.

Allora, in base alla

$$(p + \alpha_0 r\;,\; \theta(x\,,y)r) = \theta_x r\;,$$

si conclude che il sistema (S), che definisce la nostra θ e che è del tipo studiato a pag. 71 e segg., è a coefficienti indipendenti da x.

Avremo quindi che nella sua soluzione generale le funzioni ρ_{l_t} e σ_j saranno definite da equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Risulta di qui, ove si tenga conto del fatto che il coefficiente ρ della y^{n_1+t} deve ammettere tutte le determinazioni del coefficiente di y^{n_1+t+1}, che nel caso presente il sistema (S) ammette un sistema fondamentale di soluzioni della forma

$$(31)\quad \left\{ \begin{gathered} \underset{i=0,1,\dots,n_1-1}{\varphi_i(x)y^i}\;,\qquad \underset{j=0,1,\dots,m-1}{\bar\varphi_j(y)x^j}\;,\qquad \underset{s=1,2,\dots,h\,;\; l=0,1,\dots,k_s}{\varphi_{l,s}(y)x^l e^{c_s x}} \\ \underset{t=0,1,\dots,n\,;\; u=0,1,\dots,m+m_t+\dots+m_n-1\,;\; i=1,2,\dots,s_t+\dots+s_n\,;\; v=0,1,\dots,v_{i,t}+\dots+v_{i,n}-1}{x^u y^{n_1+t}\;,\qquad x^v e^{u_i x} y^{n_1+t}} \end{gathered} \right.$$

Occorre fermare un momento l'attenzione sulle funzioni della seconda riga: in esse, al diminuire di t, il coefficiente di y^{n_1+t} conserva le determinazioni che aveva pei valori superiori di t, e, in generale, ne va acquistando altre; precisamente y^{n_1+t-1} annette pel suo coefficiente tutte le determinazioni del coefficiente di y^{n_1+t} e di più le seguenti determinazioni appartenenti all'esponente n_1+t-1:

$$x^u \quad \text{da} \quad u = m_t + \dots + m_n \quad \text{a} \quad u = m_{t-1} + m_t + \dots + m_n - 1 \; ;$$

$$x^v e^{a_i x} \text{ per } i = 1, 2, \dots, s_{t-1} + \dots + s_n \text{ da } v = v_{i.t} + \dots + v_{i.n} \text{ a } v = v_{i.t-1} + \dots + v_{i.n} - 1;$$

e notiamo che gli esponenziali da $i = s_t + \dots + s_n + 1$ a $i = s^{t-1} + s_t + + \dots + s_n$ *appartengono* all'esponente n_1+t-1 e non agli esponenti maggiori.

Allora in base alla

$$(q \; , p + \alpha_0 r) = \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} r$$

si conclude

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial y} \equiv 0 \qquad [\text{mod. } (31)]$$

e quindi

$$\alpha_0 \equiv \alpha(x) y^{n_1} + \sum_{t=0}^{n} y^{n_1+t+1} \mu_t$$

dove

$$\mu_t = \sum_{q=0}^{m_t-1} b_{t,q} x^{q+m_{t+1}+\dots+m_n} + \sum_{i=1}^{s_t+\dots+s_n} e^{a_i x} \sum_{v=0}^{v_{i.t}-1} b_{i,t,v} x^{v+v_{i,t+1}+\dots+v_{i,n}} \; ; \tag{32}$$

cioè, μ_t è una combinazione lineare dei coefficienti che appartengono all'esponente n_1+t.

Ma dalla

$$(p + \alpha_0 r \; , yq + azr) = \left[a\alpha_0 - y \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} \right] r$$

risulta che deve essere

$$a\alpha_0 - y \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} \equiv 0 \qquad [\text{mod. } (31)] \; ,$$

ossia

$$(33) \qquad (a - n_1)\alpha y^{n_1} + \sum_{t=0}^{n} (a - n_1 - t - 1) y^{n_1+t+1} \mu_t \equiv 0 \; ;$$

e questa relazione, se a non è uno degli interi $n_1, n_1+1, \ldots, n_1+n$, implica l'annullarsi identico di α_0; onde risulta il gruppo

$$[6, \mathrm{II}]_1 \quad \begin{cases} p \;,\; q \;,\; yq + azr \\ \varphi_i(x)y^i r \;,\; \bar{\varphi}_j(y)x^j r \;,\; \varphi_{l,s}(y)x^l e^{c_s x} r \\ (i = 0, 1, \ldots, n_1 - 1 \;;\; j = 1, 2, \ldots, m - 1 \;;\; s = 1, 2, \ldots, h \;;\; l = 0, 1, \ldots, k_s) \\ x^u y^{n_1+t} \;,\; x^v e^{\alpha_i' x} y^{n_1+t} r \\ (t = 0, 1, \ldots, n \;;\; u = 0, 1, \ldots, m_t + \cdots + m_n - 1 \;;\; i = 1, 2, \ldots, s_t + \cdots + s_n \;;\; v = 0, 1, \ldots, v_{i.t} + \cdots + v_{i.n} - 1) \end{cases}$$

Supponendo in secondo luogo

$$a = n_1 + u + 1 \;,$$

prendiamo le mosse dal gruppo $[4, \mathrm{II}]_2$. Allora avremo anzitutto una trasf. inf. della forma

$$yq + \left[(n_1 + u + 1)z + y^{n_1+u+1} \mu_u \right] r$$

dove μ_u è della forma (32); e dalla

$$(p + \alpha_0 r \;,\; yq + \left[(n_1 + u + 1)z + y^{n_1+u+1} \bar{\mu}_u \right] r) =$$

$$= \left[(n_1 + u - 1)\alpha_0 + y^{n_1+u+1} \frac{d\bar{\mu}_u}{dx} - y \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} \right] r$$

ricaviamo una relazione analoga alla (33) col termine aggiuntivo, al primo membro

$$y^{n_1+u+1} \frac{d\mu_u}{dx} \;,$$

cosicchè concludiamo che saranno nulle, oltre α, tutte le μ_t, all'infuori della μ_u, e, quanto alla μ_u, dovremo avere

$$y^{n_1+u+1} \frac{d\mu_u}{dx} \equiv 0 \qquad [\mathrm{mod.}\ (31)] \;.$$

Ma fra le determinazioni del coefficiente, appartenenti all'esponente n_1+u, la sola, la cui derivata (rispetto ad x) appartenga all'esponente n_1+u+1 è

$$x^{m_{u+1}+\cdots+m_n},$$

talchè avremo

$$\mu_n = a x^{m_{u+1}+\cdots+m_n}$$

e troviamo il gruppo

$$[6\,,\mathrm{II}]_2 \quad \left|\begin{array}{c} p+y^{n_1+u+1}\left[\sum_{q=0}^{m_u-1} b_q x^{q+m_{u+1}+\cdots+m_n} + \sum_{i=1}^{s_u+\cdots+s_n} e^{a_i x} \sum_{v=0}^{v_{i,u}-1} b_{i,v} x^{v+v_{i,t+1}+\cdots+v_{i,n}}\right] r \\ q\;,\; yq+\left[(n_1+u+1)z + a x^{m_{u+1}+\cdots+m_n} y^{n_1+u+1}\right] r \\ \varphi_i(x) y^i r \quad,\quad \bar\varphi_j(y) x^j r \quad,\quad \varphi_{l,s}(y) x^l e^{c_s x} r \\ (i=0,1,\dots,n_1-1\;;\; j=0,1,\dots,m-1\;;\; s=1,2,\dots,h\;;\; l=0,1,2,\dots,k_s) \\ x^u y^{n_1+t} r \quad,\quad x^v e^{a_i x} y^{n_1+t} r \\ (t=0,1,\dots,n\;;\; u=0,1,\dots,m_t+\cdots+m_n-1\;;\; i=1,2,\dots,s_t+\cdots+s_n\;;\; v=0,1,\dots,v_{i,t}+\cdots+v_{i,n}-1) \end{array}\right|$$

Analogamente, prendendo le mosse dal gruppo $[4\,,\mathrm{II}]_3$, troviamo

$$[6\,,\mathrm{II}]_3 \quad \left|\begin{array}{c} p+\alpha(x) y^{n_1} r\,,\, q\,,\, yq+\left[n_1 z + b x^{m_0+m_1+\cdots+m_n} y^{n_1}\right] r \\ \varphi_i(x) y^i r \quad,\quad \bar\varphi_j(y) x^j r \quad,\quad \varphi_{l,s}(y) x^l e^{c_s x} r \\ (i=0,1,\dots,n_1-1\;;\; j=0,1\;;\; s=1,2,\dots,h\;;\; l=0,1,\dots,k_s) \\ x^u y^{n_1+t} r \quad,\quad x^v e^{a_i x} y^{n_1+t} r \\ (t=0,1,\dots,n\;;\; u=0,1,\dots,m_t+\cdots+m_n-1\;;\; i=1,2,\dots,s_t+\cdots+s_n\;;\; v=0,1,\dots,v_{i,t}+v_{i,t+1}+\cdots+v_{i,n}-1) \end{array}\right|$$

Infine il gruppo $[4\,,\mathrm{II}]_4$ non dà nessun tipo della specie qui considerata.

83. — Il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie* è data da

$$p\;,\; q\;,\; yq+axr\;,\; r\;;$$

onde otteniamo i gruppi seguenti:

$$[6\,,\mathrm{VI}] \qquad \left|\; p\;,\; q\;,\; yq\;,\; \psi_0(x,y) r\;,\; \psi_1(x,y) z r \;\right|$$

[6, V] (*)

$$p\ ,\ q\ ,\ yq + axzr\ ,$$
$$\psi(x, y)r$$
$$\varphi_i(x)y^izr\ ,\ \bar{\varphi}_j(y)x^jzr\ ,\ \varphi_{l,s}(y)x^le^{c_sx}zr\ ,\ x^uy^{n_1+t}zr\ ,\ x^ve^{a_ix}y^{n_1+t}zr$$
$$(i=0,1,\dots,n_1-1;\ j=0,1,\dots,m-1;\ s=1,2,\dots,h;\ l=0,1,\dots,k_s;\ t=0,1,\dots,n;\ u=0,1,\dots,m_t+\dots+m_n-1;\ i=1,\dots,s_t+\dots+s_n;\ v=0,1,\dots,v_{i.t}+\dots+v_{i.n}-1)$$

[6, VI] (**)

$$p\ ,\ q\ ,\ yq + axzr$$
$$\psi(x, y)r\ ,\ x^uy^tzr\ ,\ x^ve^{a_ix}y^tzr$$
$$(t=0,1,\dots,n;\ u=0,1,\dots,m_t+\dots+m_n-1;\ i=1,\dots,s_t+\dots+s_n;\ v=0,1,\dots,v_{i.t}+\dots+v_{i.n}-1)$$

[6, VII]₁

$$p\ ,\ q\ ,\ yq$$
$$\varphi_{l.s}(y)x^le^{c_sx}r\ ,\ \varphi(y)zr$$
$$(s=1,2,\dots,h;\ l=0,1,\dots,k_s)$$

[5, VII]₂

$$p\ ,\ q\ ,\ yq$$
$$\varphi_i(x)y^ir\ ,\ \varphi(x)zr$$
$$i=0,1,\dots,n-1$$

[6, VIII]₁

$$p\ ,\ q\ ,\ yq$$
$$\varphi_{l.s}(y)x^le^{c_sx}r\ ,\ y^jzr$$
$$s=1,2,\dots,h;\ l=0,1,\dots,k_s;\ j=0,1,\dots,m-1$$

[6, VIII]₂ (***)

$$p\ ,\ q\ ,\ yq + axzr$$
$$\varphi_j(x)y^jr\ ,\ x^izr\ ,\ x^le^{c_sx}zr$$
$$(j=0,1,\dots,n-1;\ i=0,1,\dots,m-1;\ s=1,2,\dots,h;\ l=0,1,\dots,m_s)$$

[7] **Gruppo accorciato**: $p\ ,\ q\ ,\ xp + cyq \qquad (c \gtrless 0)$.

84. — Assumeremo come punto di partenza la serie dei gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [2]: (pagg. 64-66) e aggiungeremo ad essi una trasf. inf.

$$xp + cyq + [\alpha_1(x, y)z + \alpha_1(x, y)]r\ .$$

Si trova anzitutto il gruppo:

[7, I]

$$p\ ,\ q\ ,\ xp + cyq + azr\ ,\ \psi(x, y)r$$

(*) Se non sono simultaneamente verificate le condizioni

$$n_1 = 0\ ,\ m < 2\ ,\ m_0 = m_1 = \dots = m_n = 0$$

si può porre $a = 0$.

(**) Cfr. la nota precedente.

(***) Se $m > 1$, si può porre $a = 0$.

Avremo poi un gruppo della forma

$$p + \alpha_0(x, y)r \; , \; q \; , \; xp + cyq + [az + \alpha_1(x, y)]r \; , \; \theta(x, y)r \; ,$$

dove θ è l'integrale di un sistema (S) (non appartenente alla classe del MAYER) di equazioni lineari alle derivate parziali.

La presenza delle due prime trasf. inf. implica che il sistema (S) sia riducibile a coefficienti costanti. Inoltre, in base alla

$$(xp + cyq + [az + \alpha_1]r \; , \; \theta(x, y)r) = [x\theta_x + cy\theta_y - a\theta]r \; ,$$

concludiamo che se θ è una soluzione di (S), è tale altresì la

$$x\theta_x + cy\theta_y \; .$$

Se

$$\Sigma \, a_{m,n} \frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 \tag{33}$$

è una qualsiasi equazione di (S) e indichiamo con F la forma lineare alle derivate parziali che compare al primo membro, dovremo avere, per qualsiasi soluzione θ del sistema (S),

$$F\,(x\theta_x + cy\theta_y) = 0 \; ,$$

ossia, sviluppando,

$$xFD_x(\theta) + F_{1\cdot 0}D_x(\theta) + cyFD_y(\theta) + cF_{0\cdot 1}D_y(\theta) = 0 \; .$$

Ma poichè F è a coefficienti costanti e quindi commutabile con D_x e D_y, avremo

$$FD_x(\theta) = 0 \; , \; FD_y(\theta) = 0 \; ;$$

talchè risulta che il sistema (S) deve contenere, insieme con ogni sua equazione (33), anche l'equazione

$$F_{1\cdot 0}D_x(\theta) + cF_{0\cdot 1}D_y(\theta) = 0 \; ,$$

dove $F_{1\cdot 0}$, $F_{0\cdot 1}$ sono le due derivate funzionali parziali di F, rispetto a D_x e a D_y; cioè l'equazione

$$\Sigma\,(m + cn)a_{m\cdot n} \frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 \; .$$

Reiterando, avremo che il sistema (S) contiene tutte le infinite equazioni

$$\sum_{m,n} (m + cn)^i a_{m\cdot n} \frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \infty) \; ,$$

e perciò la (33) si spezza in tante equazioni quanti sono i valori diversi che ha in essa il binomio $m + cn$.

Supponiamo in primo luogo che c non sia un numero razionale. Sotto tale ipotesi, il binomio $m + cn$ varierà da termine a termine, cosicchè il sistema (S) sarà costituito da sole equazioni della forma

$$\frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 . \tag{34}$$

L'insieme delle soluzioni della (34) è dato dalla somma degli insiemi delle soluzioni delle due equazioni

$$\frac{\partial^m \theta_1}{\partial x^m} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^n \theta_2}{\partial y^n} = 0$$

(cfr. n. 76) talchè un sistema fondamentale di soluzioni della (34) è dato da

$$\varphi_i(y) x^i \quad , \quad \bar{\varphi}_j(x) y^j$$
$$i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \; ; \; j = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

dove le φ_i, $\bar{\varphi}_j$ sono funzioni arbitrarie e indipendenti dei rispettivi argomenti.

Se abbiamo un sistema di equazioni della forma

$$\frac{\partial^{m_i+n_i}\theta}{\partial x^{m_i} \partial y^{n_i}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, s) \tag{S}$$

e ordiniamo le equazioni in modo che sia

$$m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \dots \geq m_s ,$$

è manifesto che potremo supporre

$$n_1 < n_2 \leq \dots \leq n_s ;$$

giacchè se fosse simultaneamente

$$m_i \geq m_{i+1} \quad , \quad n_i \geq n_{i+1}$$

l'equazione

$$\frac{\partial^{m_i+n_i}\theta}{\partial x^{m_i} \partial y^{n_i}} = 0$$

sarebbe una conseguenza differenziale della

$$\frac{\partial^{m_{i+1}+n_{i+1}}\theta}{\partial x^{m_{i+1}}\partial y^{n_{i+1}}}=0$$

e si potrebbe perciò tralasciare.

Allora è chiaro anzitutto che il sistema (S) è soddisfatto dalle soluzioni dell'equazione

$$\frac{\partial^{m_s+n_1}\theta}{\partial x^{m_s}\partial y^{n_1}}=0\ , \tag{35}$$

cioè dalle

$$\varphi_i(y)x^i\quad,\quad\overline{\varphi}_j(x)y^j\qquad(i=0,1,\ldots,m_s-1\ ;\ j=0,1,\ldots,n_1-1)\ ;$$

ed inoltre dalle funzioni θ_1 tali che

$$\theta_2=\frac{\partial^{m_s+n_1}\theta_1}{\partial x^{m_s}\partial y^{n_1}}$$

sia una soluzione del sistema

$$\frac{\partial^{m_i-m_s+n_i-n_1}\theta_2}{\partial x^{m_i-m_s}\partial y^{n_i-n_1}}=0\qquad(i=1,2,\ldots,s)\ . \tag{S'}$$

Di quest'ultimo sistema, che è certamente integrabile, giacchè almeno è soddisfatto da $\theta_2=1$, fanno parte le due equazioni

$$\frac{\partial^{m_1-m_s}\theta_2}{\partial x^{m_1-m_s}}=0\quad,\quad\frac{\partial^{n_s-n_1}\theta_2}{\partial y^{n_s-n_1}}=0\ ,$$

le quali non possono avere soluzioni comuni (linearmente indipendenti) se non in numero finito e precisamente della forma

$$x^iy^j\qquad(i<m_1-m_s\ :\ j<n_s-n_1)\ ; \tag{36}$$

ed è allora manifesto che il sistema (S') è un sistema del Mayer, che ammette un sistema fondamentale di soluzioni della forma or ora indicata, dove, naturalmente, per ogni valore di i l'esponente j

ha un massimo, il quale, al crescere di i, va generalmente diminuendo. Integrando le (36) m_s volte consecutive rispetto ad x ed n_1 volte rispetto ad y, troviamo che ogni soluzione θ del sistema (S) è uguale alla somma di una soluzione della (35) e di una combinazione lineare, a coefficienti costanti, di funzioni della forma

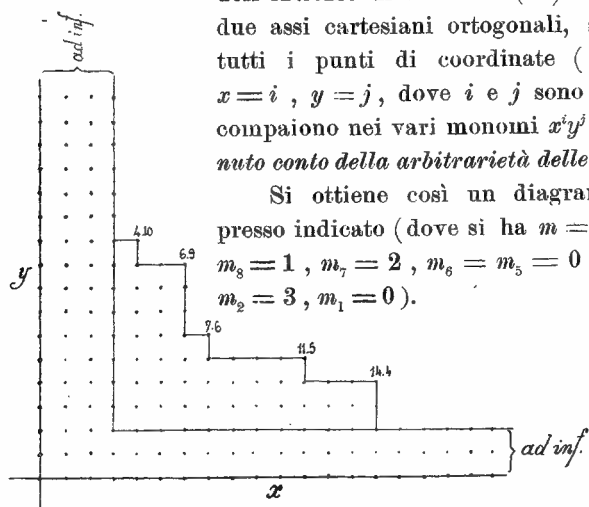
$$x^i y^j \qquad (m_s < i < m_s \,,\, n_{\iota} \leq j \leq n_s) \,. \tag{37}$$

Dalla forma del sistema (S) o, se si preferisce, dal fatto che la soluzione generale di (S) deve esser trasformata in sè dalle p e q, discende che nelle (37) i valori possibili per l'esponente i, in corrispondenza dell'esponente j si hanno anche in corrispondenza degli esponenti $j-1$, $j-2$, ...; ma al diminuire di j, può aumentare il massimo possibile di i.

In conclusione, un sistema differenziale del tipo (S) ammette un sistema fondamentale di soluzioni della forma seguente (dove, per semplicità di notazione, usiamo i simboli m_i con un significato diverso da quello che essi avevano dianzi):

$$(38) \quad \begin{cases} \varphi_i(y)x^i \quad , \quad \bar{\varphi}_j(x)y^j \,, \\ x^{m+s-1}y^{n+t-1} \\ (i=0,1,\dots,m-1\,;\, j=0,1,\dots,n-1\,;\, t=1,2,\dots,n_1\,;\, s=1,2,\dots,m_{n_1}+m_{n_1-1}+\dots+m_t). \end{cases}$$

Per le considerazioni, che qui e in altri casi analoghi dovremo sviluppare, sarà utile tener presente un diagramma rappresentativo dell'insieme di funzioni (38). Scelti in un piano due assi cartesiani ortogonali, si segnino in esso tutti i punti di coordinate (intere e positive) $x=i$, $y=j$, dove i e j sono gli esponenti che compaiono nei vari monomi $x^i y^j$ del quadro (38), *tenuto conto della arbitrarietà delle funzioni* $\varphi_i(y), \bar{\varphi}_j(x)$.

Si ottiene così un diagramma del tipo qui presso indicato (dove si ha $m=4$, $n=3$, $n_1=8$; $m_8=1$, $m_7=2$, $m_6=m_5=0$, $m_4=1$, $m_3=4$, $m_2=3$, $m_1=0$).

La regione dei punti rappresentativi dei monomi (38) è limitata, oltrechè dai due assi, da una

spezzata a lati alternativamente paralleli all'asse x e all'asse y, fra i quali i due lati estremi possono essere due semirette (infinite), parallele l'una all'asse y e l'altra all'asse x. Anzi, poichè qui si tratta di gruppi infiniti e perciò l'insieme (38) deve essere a infinite dimensioni, la spezzata suindicata deve ammettere *almeno* un lato *infinito*.

Le due striscie (che possono ridursi anche ad una sola) racchiuse fra gli assi e le semirette dei due lati infiniti della spezzata rappresentano i monomi raggruppati nei simboli (dipendenti da funzioni arbitrarie) $\varphi_i(y)x^i$ e $\varphi_j(x)y^j$.

I punti situati sui lati paralleli all'asse x (tolto su ciascun lato il vertice di ascissa minima) rappresentano i monomi *appartenenti* (o *propri*) ai vari valori possibili dell'esponente di y cioè i monomi raggruppati in $\bar{\varphi}_{n-1}(x)y^{n-1}$ (*) e di più i monomi

$$x^{m+s-1}y^{n+t-1},$$

dove, per ciascun $t = 1, 2, \ldots, n_1$, l'indice s assume gli m_t valori

$$m_{n_1} + m_{n_1-1} + \ldots + m_{t+1} + 1, \ldots, m_{n_1} + m_{n_1-1} + \ldots + m_{t+1} + m_t\,;$$

e analogamente i punti situati sui diversi lati paralleli all'asse y (tolto su ciascun lato il vertice di ordinata minima) rappresentano i monomi appartenenti ai vari valori possibili dell'esponente di x.

L'integrazione rispetto ad y (considerata per semplicità nella sua determinazione principale) ha per effetto di spostare il punto rappresentativo di ciascun monomio di un segmento uguale ad 1 parallelamente all'asse y. Risulta di qui che i soli monomi, il cui integrale rispetto ad y esca dall'insieme stesso, sono quelli appartenenti ai vari valori dell'esponente di y, cioè quelli che nel diagramma si trovano sui lati della spezzata paralleli all'asse x, tolto su ciascun lato il punto di ascissa minima. Analogamente si dica per la integrazione rispetto ad x.

Ciò premesso torniamo al nostro gruppo

$$p + \alpha_0(x, y)r\,,\ q\,,\ xp + cyq + [az + \alpha_1(x, y)]r\,,\ \theta(x, y)r\,,$$

(*) Più precisamente, dei monomi raggruppati in $\bar{\varphi}_{n-1}(x)y^{n-1}$ vanno qui considerati soltanto quelli che in x hanno grado superiore ad

$$m + m_{n_1} + m_{n_1-1} + \ldots + m_1 - 1\,.$$

dove la θ ammette le determinazioni (38). — Dalla

$$(q\,,\,p+\alpha_0 r)=\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\,r$$

deduciamo

$$\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\equiv 0 \qquad [\text{mod. } (38)]\,,$$

e quindi, per le osservazioni fatte pocanzi,

$$\alpha_0\equiv\lambda(x)y^n+\sum_{t=1}^{n_1}y^{n+t}\sum_{u=1}^{m_t}a_{t,u}x^{m+m_{n_1}+\cdots+m_{t+1}+u-1}\,.$$

Ma scegliendo come nuova z la

$$z-y^n\!\int\!\lambda\,dx-\sum_{t=1}^{n_1}y^{n+t}\sum_{u=1}^{m_t-1}a_{t.u}\,\frac{x^{m+m_{n_1}+\cdots+m_{t+1}+u}}{m+m_{n_1}+\cdots+m_{t+1}+u}\,,$$

la q viene accresciuta soltanto di trasf. inf. del nostro gruppo; mentre nella $p+\alpha_0 r$ si annullano λ e tutte le $a_{t.u}$ all'infuori di quelle corrispondenti ai monomi che nel diagramma sono rappresentati da vertici di angoli della spezzata, che contengono la origine; resta cioè, se si tralascia uno dei due indici delle a, divenuto superfluo,

$$\alpha_0=\sum_{t=1}^{n_1}a_t x^{m+m_{n_1}+\cdots+m_t-1}y^{n+t}\,. \tag{39}$$

D'altra parte, dalla

$$(p\,,xp+cyq+[az+\alpha_1(x\,,y)]r)=cq+\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\,r$$

risulta

$$\alpha_1\equiv\lambda_1(x)y^n+\sum_{t=1}^{n_1}y^{n+t}\sum_{u=1}^{m_t}b_{t,u}x^{m+m_{n_1}+\cdots+m_{t+1}+u-1} \tag{40}$$

e, in base alla

$$(p+\alpha_0 r\,,xp+cyq+[az+\alpha_1]r)=p+\Big[a\alpha_0+\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-x\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}-cy\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\Big]r\,,$$

concludiamo che deve essere

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \equiv x \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} + cy \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} + [1 - a]\alpha_0 \ .$$

Ma basta ricordare le espressioni (39) e (40) di α_0 e α_1 per concludere che i termini dei due membri della congruenza precedente sono certamente incongrui tra loro (quelli del secondo membro sono tutti di grado superiore a quelli del primo), talchè dovremo avere senz' altro

a) $$x \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} + cy \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} + (1 - a)\alpha_0 \equiv 0$$

b) $$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \equiv 0 \ .$$

La a), sviluppata,

$$\sum_{t=1}^{m_1} [m + m_{n_1} + \dots + m_t + c(n + t) - a] a_t x^{m + m_{n_1} + \dots + m_{t+1} + m_t - 1} y^{n+t} = 0$$

ci avverte che tutti i coefficienti di questa espressione debbono essere nulli. D' altra parte non possono essere simultaneamente nulli due diversi coefficienti

$$m + m_{n_1} + \dots + m_t + c(n + t) - a \ ,$$

giacchè in tal caso si contraddirebbe all' ipotesi che c sia irrazionale; cosicchè uno al più di codesti coefficienti potrà essere nullo. Supposto

$$a = m + m_h + m_{h+1} + \dots + m_{n_1} + c\,(n + h) \ ,$$

potremo avere $a_h \gtrless 0$, mentre per $s \lesseqgtr h$ sarà $a_s = 0$. Avremo cioè

$$\alpha_0 \equiv a_h x^{m + m_{n_1} + \dots + m_h - 1} y^{n+h} \ .$$

Resta da soddisfare alla b) cioè alla

$$\lambda'_1 y^n + \sum_{t=1}^{n_1} y^{n+t} \sum_{u=1}^{m_t} b_{t \cdot u} \left[m + m_{n_1} + \dots + m_{t+1} + u - 1 \right] x^{m + m_{n_1} + \dots + m_{t+1} + u - 2} = 0 \ ,$$

la quale si spezza nel seguente sistema di congruenze

$$\mathrm{a}_1)\qquad \lambda'_1 \equiv 0 \quad \left[\text{modd. } 1, x, \ldots, x^{m+m_1+\cdots+m_{n_1}-1}\right]$$

$$\mathrm{b}_1)\qquad \sum_{u=1}^{m_t} b_{t,u}\left[m+m_{n_1}+\cdots+m_{t+1}+u-1\right]x^{m+m_{n_1}+\cdots+m_{t+1}+u-2} \equiv 0 \quad \left[\text{modd. } 1, x, \ldots, x^{m+m_{t+1}+\cdots+m_{n_1}-1}\right].$$

Ora di qui risulta

$$\lambda_1 \equiv bx^{m+m_1+\cdots+m_{n_1}} \quad , \quad b_{t,u}=0 \quad \text{per } u>1 \ ;$$

ossia, trascurando nelle $b_{t,u}$ il secondo indice divenuto superfluo,

$$\alpha_1 \equiv bx^{m+m_1+\cdots+m_n} y^n + \sum_{t=1}^{n_1} b_t x^{m+m_{t+1}+\cdots+m_{n_1}} y^{n+t} .$$

Ma i monomi che restano ora in α_1 sono tutti tali che, derivati sia rispetto ad x sia rispetto ad y, danno monomi appartenenti all'insieme (38) (*); cosicchè se si assume come nuova z la

$$z - \frac{bx^{m+m_1+\cdots+m_{n_1}} y^n}{m+m_1 \ldots + m_{n_1} + cn - a} - \sum_{t=1}^{n_1} \frac{b_t x^{m+m_{t+1}+\cdots+m_{n_1}} y^{n+t}}{m+m_{t+1}+\ldots+m_{n_1}+c(n+t)-a}$$

si riduce $\alpha_1 = 0$ senza alterare le altre trasf. inf. del gruppo.

Il solo caso d'eccezione è quello in cui a sia uguale ad uno dei numeri

$$m+m_1+\ldots+m_{n_1}+cn \ , \ m+m_{t+1}+\ldots+m_{n_1}+c(n+t) \ ;$$

allora la corrispondente b o b_t non si potrà eliminare, ma sarà necessariamente $\alpha_0 = 0$, come risulta dalla pag. prec.

Abbiamo così i gruppi seguenti:

$$[7, \mathrm{II}]_1 \qquad \begin{array}{|c|} p \ , \ q \ , \ xp + cyq + azr \\ \varphi_i(y)x^i r \ , \ \bar{\varphi}_j(x)y^j r \ , \ x^{m+s-1}y^{n+t-1}r \\ (i=0,1,\ldots,m-1 \, ; \, j=0,1,\ldots,n-1 \, ; \, t=1,2,\ldots,n_1 \, ; \, s=1,2,\ldots,m_n+\cdots+m_t) \end{array}$$

(*) Sono questi i monomi rappresentati dai punti che si ottengono aumentando di 1 entrambe le coordinate dei vertici degli angoli *concavi* del diagramma.

$$[7, II]_2 \qquad \begin{gathered} p + a x^{m+m_h+\cdots+m_{n_1}-1} y^{n+h} r, \; q, \\ xp + cyq + [m + m_h + \ldots + m_{n_1} + c(n+h)] zr \\ \varphi_i(y) x^i r, \; \bar{\varphi}_j(x) y^j r, \; x^{m+s-1} y^{n+t-1} r \\ (c \, . \, s) \end{gathered}$$

$$[7, II]_3 \qquad \begin{gathered} p, \; q, \; xp + cyq + \\ + \left([m + m_{h+1} + \ldots + m_{n_1} + c(n+h)] z + b x^{m+m_{t+1}+\cdots+m_{n_1}} y^{n+t} \right) r \\ \varphi_i(y) x^i r, \; \bar{\varphi}_j(x) y^j r, \; x^{m+s-1} y^{n+t-1} r \\ (c \, . \, s) \end{gathered}$$

85. — Nello studiare i gruppi

$$p + \alpha_0 r, \; q, \; xp + cyq + [az + \alpha_1] r, \; \theta(x, y) r, \tag{41}$$

abbiamo dianzi escluso il caso in cui c sia un numero razionale. In questo caso non è possibile assegnare in forma esplicita un sistema fondamentale di trasf. inf. del gruppo.

Se è $c = \frac{s}{t}$ ed s e t sono due numeri interi, primi fra loro, le stesse considerazioni del n. prec. portano a concludere che il sistema (S), che definisce le θ, deve contenere, con ogni sua equazione

$$\sum_{m,n} a_{m,n} \frac{\partial^{m+n} \theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0, \tag{42}$$

anche le infinite equazioni

$$\sum_{m,n} (tm + sn)^i a_{m,n} \frac{\partial^{m+n} \theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \infty);$$

onde risulta che la (42) si spezzerà in tante equazioni quanti sono i valori diversi che assume il binomio

$$tm + sn,$$

corrispondentemente ai valori m, n degli indici delle sue derivate. In altre parole il sistema (S) è costituito da equazioni, in ciascuna

delle quali è costante da termine a termine il binomio indicato. Così se in un'equazione di (S) compare la

$$\frac{\partial^{i+j}\theta}{\partial x^i \partial y^j},$$

non potranno esservi altre derivate

$$\frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n},$$

se non soddisfacenti alla condizione

$$tm + sn = ti + sj ,$$

cioè le derivate

$$\frac{\partial^{i+j+(s-t)k}\theta}{\partial x^{i+ks}\partial y^{j-kt}},$$

dove k è un intero positivo o negativo qualsiasi per cui sia

$$i + ks \geq 0 \quad , \quad j - kt \geq 0 .$$

In conclusione il sistema (S) è costituito da equazioni della forma

$$\text{(S)} \qquad \sum_k a_{i.j.k} \frac{\partial^{i+j+(s-t)k}\theta}{\partial x^{i+ks}\partial y^{j-kt}} = 0 ;$$

e non è certamente il caso di parlare qui della integrazione di un sistema siffatto, poichè essa è possibile solo in casi particolari. Siamo quindi costretti a limitarci ad avvertire l'esistenza di gruppi della forma (41), dove θ è la soluzione generale di un sistema della forma (S) e le α_0 , α_1 sono legate dalle condizioni

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial y} \equiv 0 \ , \ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \equiv 0 \ , \ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \equiv tx \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} + sy \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} + (t - a)\alpha_0 \quad [\text{mod. } \theta] .$$

86. — Il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie* è in generale

a) $\qquad p \ , \ q \ , \ xp + cyq \ , \ r \ ;$

ma, pel valore $c = -1$ del parametro, può anche essere

b) $\qquad p + ayr \ , \ q \ xp - yq \ , \ r \ .$

Abbiamo anzitutto il gruppo

$$[7\,,\mathrm{IV}] \qquad p\;,\;q\;,\;xp+cyq\;,\;\psi_0(x\,,y)r\;,\;\psi_1(x\,,y)zr$$

Corrispondentemente al sottogruppo intransitivo dal tipo [V] abbiamo nel caso più semplice (che sempre si verifica se c è irrazionale) i due gruppi

$$[7\,,\mathrm{V}]_1 \qquad \begin{array}{c} p\;,\;q\;,\;xp+cyq\;,\;\psi_0(x\,,y)r \\ \varphi_i(y)x^i zr\;,\;\overline{\varphi}_j(x)y^j zr\;,\;x^{m+s-1}y^{n+t-1}zr \\ (i=0,1,2,\ldots,m-1\,;\,j=0,\ldots,n-1\,;\,t=1,2,\ldots,n_1\,;\,s=1,2,\ldots,m_1+\cdots+m_{n_1}) \end{array}$$

$$[7\,,\mathrm{V}]_2 \qquad \begin{array}{c} p+ayzr\;,\;q\;,\;xp-yq\;,\;\psi_0(x\,,y)r \\ \varphi(x)zr \end{array}$$

Se c è razionale avremo due classi di tipi analoghi, comprendenti ciascuno un sottogruppo della forma

$$\theta(x\,,y)zr\;,$$

dove θ è la soluzione generale di un sistema (S) avente la forma indicata alla pag. prec.

Nel caso del sottogruppo intransitivo massimo di tipo [VI] abbiamo in primo luogo i due gruppi, analoghi a $[7\,,\mathrm{V}]_1$ e $[7\,,\mathrm{V}]_2$:

$$[7\,,\mathrm{VI}]_1 \qquad \begin{array}{c} p\;,\;q\;,\;xp+cyq\;,\;\psi(x\,,y)r \\ x^{s-1}y^{t-1}zr \\ (t=1,2,\ldots,n\,;\,s=1,2,\ldots,m_t+\cdots+m_n) \end{array}$$

$$[7\,,\mathrm{VI}]_2 \qquad \begin{array}{c} p+yzr\;,\;q\;,\;xp-cyq\;,\;\psi(x\,,y)r \\ x^{s-1}zr \\ (s=1,2,3,\ldots,m) \end{array}$$

Prendendo a esaminare in secondo luogo il caso, in cui sia $c=\dfrac{s}{t}$ (dove s e t sono numeri interi primi fra loro), ricaviamo dalle

$$(p+\varepsilon yzr\,,\rho_i(x\,,y)zr)=\frac{\partial\rho_i}{\partial x}zr\,,\;(q\,,\rho_i zr)=\frac{\partial\rho_i}{\partial y}zr\,,\;(txp+syq\,,\rho_i zr)=\Big[tx\frac{\partial\rho_i}{\partial x}+sy\frac{\partial\rho_i}{\partial y}\Big]zr$$

che le ρ_i debbono soddisfare ai tre sistemi di congruenze

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial \rho_i}{\partial x} \equiv 0 \ , \ \frac{\partial \rho_i}{\partial y} \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h] \ ;$$

$$\text{b)} \qquad tx \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + sy \frac{\partial \rho_i}{\partial y} \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h] \ .$$

Ora dal primo sistema di congruenze *a*) (equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti) ricaviamo che le ρ_i ammettono un sistema fondamentale di determinazioni della forma

$$x^l e^{a_s x} \pi_{l,s}(y) \qquad (s = 1, 2, \dots, k \ ; \ l = 0, 1, \dots, m_s) \ ,$$

dove le $\pi_{l,s}$ sono funzioni della sola y. Ma allora, dato ad l il massimo valore m_s, di cui è suscettibile per un dato a_s, ricaviamo dalla

$$\left(txp + syq \ , \ x^{m_s} e^{a_s x} \pi_{m_s, s} zr\right) = \left[t(a_s x + m_s)\pi_{m_s, s} + sy\pi'_{m_s, s}\right] x^{m_s} e^{a_s x} zr$$

che tutte le a_s sono nulle e perciò le ρ_i sono funzioni razionali intere in x. Considerazioni analoghe si possono ripetere per la y, cosicchè avremo che le ρ_i sono polinomi in x e y.

Presa una di codeste funzioni ρ_i

$$\sum_{m,n} a_{m,n} x^m y^n \tag{43}$$

avremo, in base alle *b*), che all'insieme lineare delle ρ_i debbono appartenere anche le

$$\sum_{m,n} (mt + ns)^i x^m y^n \qquad (i = 1, 2, \dots, \infty) \ ,$$

onde concludiamo che la (43) si spezza nelle funzioni costituite dai vari gruppi di termini, in cui il binomio $mt + ns$ ha lo stesso valore. Abbiamo inoltre che all'insieme delle ρ_i appartengono, con una data funzione, tutte lu sue derivate; cosicchè l'insieme delle ρ_i sarà definito da un sistema di funzioni della forma:

$$\pi_i = \sum_{k=0}^{k_i} a_{i,k} x^{m_i + ks} y^{n_i - kt}$$

e dalle loro derivate:

$$\frac{\partial^{l+m}\pi_i}{\partial x^l \partial y^m} \qquad (l, m = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Abbiamo così i due gruppi

[7, VI]$_3$

$$p\,,\; q\,,\; txp + syq\,,\; \psi(x, y)r$$
$$\pi_i zr\,,\; \frac{\partial^{m+l}\pi_i}{\partial x^l \partial y^m} zr$$
$$\left(\begin{array}{c} i = 1, 2, \ldots, u\;;\; l, m = 0, 1, 2, \ldots \\ \pi_i = \sum_{k=0}^{k_i} a_{i.k}\, x^{m_i + ks}\, y^{n_i - kt} \end{array}\right)$$

[7, VI]$_4$

$$p + ayzr\,,\; q\,,\; xp - yq\,,\; \psi(x, y)r$$
$$\pi_i zr\,,\; \frac{\partial^{m+l}\pi_i}{\partial x^l \partial y^m} zr$$
$$\left(\begin{array}{c} i = 1, 2, \ldots, u\;;\; l, m = 0, 1, 2, \ldots \\ \pi_i = \sum_{k=0}^{k_i} a_{i.k}\, x^{n_i + k}\, y^{n_i + k} \end{array}\right)$$

Continuando, troviamo, in corrispondenza dei gruppi [2, VII] e [2, VIII] del n. 72,

[7, VII]

$$p\,,\; q\,,\; xp + cyq$$
$$\varphi_i(y) x^i r\,,\; \varphi(y) zr$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

[7, VIII]$_1$

$$p\,,\; q\,,\; xp + cyq$$
$$\varphi_i(y) x^i r\,,\; y^j zr$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1\;;\; j = 0, 1, \ldots, m-1)$$

[7, VIII]$_2$

$$p + ayzr\,,\; q\,,\; xp - yq$$
$$\varphi_i(y) x^i r\,,\; zr$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

[8] **Gruppo accorciato:** $p\,, xp\,, q\,, yq$.

87. — Possiamo prendere le mosse dai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato: $p\,, q\,, yq$ (nn. 82-83); ma, pur tenendo presenti quei gruppi, converrà anche istituire qualche considerazione diretta.

Fra i *gruppi di seconda specie* il massimo è dato da

$$[8, \mathrm{I}] \qquad \left| p\,,\ q\,,\ xp + azr\,,\ yq + bzr\,,\ \psi(x, y)r \right|$$

Abbiamo in secondo luogo i gruppi della forma

$$p + \alpha_0 r\,,\ q\,,\ xp + [az + \alpha_1]r\,,\ yq + [bz + \beta_1]r\,,\ \theta(x, y)r$$

dove $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ sono funzioni da determinare, a e b sono costanti, e la θ è la soluzione generale di un sistema (S) di equazioni lineari alle derivate parziali.

Ora in base alle

$$(p + \alpha_0 r, \theta r) = \theta_x r\,, (q, \theta r) = \theta_y r\,,$$
$$(xp + [az + \alpha_1]r, \theta r) = [x\theta_x - a\theta]r\,, (yq + [bz + \beta_1]r, \theta r) = [y\theta_y - b\theta]r\,,$$

si trova che il sistema (S) ammette, insieme con ciascuna sua soluzione θ, anche le

$$\theta_x\,,\ \theta_y\,,\ x\theta_x\,,\ y\theta_y\,;$$

e di qui, come al n. 84, si conclude che esso ammette un sistema fondamentale di soluzione della forma

$$(44) \qquad \varphi_i(y)x^i\,,\ \overline{\varphi}_j(x)y^j\,,\ x^{m+s-1}y^{n+t-1}\,,$$
$$(i=0,1,\ldots,m-1\,; j=0,1,\ldots,n-1\,; t=1,2,\ldots,n_1\,; s=1,2,\ldots,m_{n_1}+m_{n_1-1}+\cdots+m_t)\,.$$

Dalla

$$(q, p + \alpha_0 r) = \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} r$$

ricaviamo che $\frac{\partial \alpha_0}{\partial y}$ è una funzione dell'insieme (44), ossia

$$\alpha_0 \equiv \lambda(x)y^n + \sum_{t=1}^{n_1} y^{n+t} \sum_{u=t}^{m_t} a_{t,u}\, x^{m+m_{n_1}+\cdots+m_{t+1}+u-1}\,;$$

ma, operando come al n. 84, si riduce anzitutto

$$\alpha_0 \equiv \sum_{t=1}^{n_1} a_t x^{m+m_{n_1}+\cdots+m_t-1} y^{n+t}\,.$$

Allora, in base alle

$$(q, yq + [bz + \beta_1]r) = q + \frac{\partial\beta_1}{\partial y} r, (p + \alpha_0 r, yq + [bz + \beta_1]r) = \left[\frac{\partial\beta_1}{\partial x} + b\alpha_0 - y\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\right]r ,$$

si trova, come al n. 85, che le a_t sono tutte nulle, tranne una al più: e se è diversa da zero la a_h, si deve avere

$$b = n + h ; \tag{45}$$

inoltre dovendo essere simultaneamente

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial y} \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial\beta_1}{\partial x} \equiv 0 \qquad [\text{mod. } (44)] ,$$

sarà

$$\beta_1 \equiv b_0 x^{m+m_1+\cdots+m_{n_1}} y^n \sum_{t=1}^{n_1} b_t x^{m+m_{t+1}+\cdots+m_{n_1}} y^{n+t}$$

e basta assumere come nuova z la

$$z + \frac{b_0 x^{m+m_1+\cdots+m_{n_1}} y^n}{b-n} + \sum_{t=1}^{n_1} \frac{b_t x^{m+m_{t+1}+\cdots+m_{n_1}} y^{n+t}}{b-n-t}$$

per ridurre a zero tutte le b_0 e b_t. Solo se è verificata la (45) non può eliminarsi la b_h, e sarà

$$\beta_1 \equiv b_h x^{m+m_{h+1}+\cdots+m_{n_1}} y^{n+h} . \tag{46}$$

Analogamente le

$$(q, xp + [az + \alpha_1]r) = \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} r, (p + \alpha_0 r, xp + [az + \alpha_1]r = p + \left[\frac{\partial\alpha_1}{\partial x} + a\alpha_0 - x\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right] r$$

ci dicono che, se α_0 non è identicamente nulla ed è precisamente

$$\alpha_0 = a_h x^{m+m_{n_1}+\cdots+m_h-1} y^{n+h} ,$$

deve essere

$$a = m + m_h + m_{h+1} + \dots + m_{n_1} ; \tag{47}$$

e di più

$$\alpha_1 = c_0 x^{m+m_1+\cdots+m_{n_1}} y^n + \sum_{t=1}^{n_1} c_t x^{m+m_{t+1}+\cdots+m_{n_1}} y^{n+t} .$$

Allora non resta più che da tener conto della

$$(xp + [az + \alpha_1]r \, , yq + [bz + \beta_1]r) = \left[x \frac{\partial \beta_1}{\partial x} - y \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} - a\beta_1 + b\alpha_1 \right] r \, ,$$

ossia della

$$x \frac{\partial \beta_1}{\partial x} - y \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} - a\beta_1 + b\alpha_1 \equiv 0 \, . \tag{48}$$

Se non è verificata la (45) per nessun valore di h, avremo $\beta_1 = 0$ e allora la (48) implica

$$(b - n) e_0 x^{m + m_1 + \dots + m_{n_1}} y^n + \sum_{t=1}^{n_1} (b - n - t) c_t x^{m + m_{t+1} + \dots + m_{n_1}} y^{n+t} \equiv 0$$

e quindi anche $\alpha_1 = 0$. Otteniamo così il gruppo

$$[8, \mathrm{II}]_1 \qquad \begin{array}{c} p \, , \; q \, , \; xp + azr \, , \; yq + bzr \\ \varphi_i(y) x^i r \, , \; \bar{\varphi}_j(x) y^j r \, , \; x^{m+s-1} y^{n+t-1} r \\ (i = 0, 1, \dots, m-1 \; ; \; j = 0, 1, \dots, n-1 \; ; \; t = 1, 2, \dots, n_1 \; ; \; s = 1, 2, \dots, m_{n_1} + \dots + m_t) \end{array}$$

Se, pur essendo verificata la (45), è $\alpha_0 = 0$, la a può, almeno a priori, essere qualsiasi, mentre d'altra parte varrà per β_1 l'espressione (46). Allora la (48) diventa

$$[m + m_{h+1} + \dots + m_{n_1} - a] b_h x^{m + m_{h+1} + \dots + m_{n_1}} y^{n+h} + h c_0 x^{m + m_1 + \dots + m_{n_1}} y^n +$$
$$+ \sum_{t=1}^{n_1} (h - t) c_t x^{m + m_{t+1} + \dots + m_{n_1}} y^{n+t} \equiv 0$$

e di qui risulta che se non è $b_h = 0$ si deve avere per a il valore (47) e in ogni caso tutte le costanti c_t devono esser nulle tranne, al più, la c_h. E ad analogo risultato si giunge se si suppongono verificate a priori le (45) e (47). Otteniamo così il gruppo

$$[8, \mathrm{II}]_2 \qquad \begin{array}{c} p + a x^{m + m_{n_1} + \dots + m_h - 1} y^{n+h} r \, , \; q \\ xp + \left[(m + m_{n_1} + \dots + m_h) z + c x^{m + m_{h+1} + \dots + m_{n_1}} y^{n+h} \right] r \, , \\ yq + \left[(n + h) z + b x^{m + m_{h+1} + \dots + m_{n_1}} y^{n+h} \right] r \\ \varphi_i(y) x^i r \, , \; \bar{\varphi}_j(x) y^j r \, . \; x^{m+s-1} y^{n+t-1} r \\ (i = 0, 1, \dots, m-1 \; ; \; j = 0, 1, \dots, n-1 \; ; \; t = 1, 2, \dots, n_1 \; ; \; s = 1, 2, \dots, m_{n_1} + \dots + m_t) \end{array}$$

88. — Il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie* è riducibile alla forma

$$p\ ,\ q\ ,\ xp\ ,\ yq\ ,\ r\ ,$$

cosicchè si ottengono i gruppi seguenti:

[8, IV] $$p\ ,q\ ,xp\ ,yq\ ,\psi_0(x\ ,y)r\ ,\psi_1(x\ ,y)zr$$

[8, V] $$\begin{gathered} p\ ,q\ ,xp\ ,yq\ ,\psi(x\ ,y)r \\ \varphi_i(y)x^izr\ ,\bar{\varphi}_j(x)y^jzr\ ,x^{m+s-1}y^{n+t-1} \\ (i=0,1,\dots,m-1\ ;\ j=0,1,\dots n-1\ ;\ t=1,2,\dots,n_1\ ;\ s=1,2,\dots,m_{n_1}+\dots+m_t) \end{gathered}$$

[8, VI] $$\begin{gathered} p\ ,q\ ,xp\ ,yq\ ,\psi(x\ ,y)r \\ x^{s-1}y^{t-1}zr \\ (t=1,2,\dots,n\ ;\ s=1,2,\dots,m_t+\dots+m_n) \end{gathered}$$

[8, VII] $$\begin{gathered} p\ ,q\ ,xp\ ,yq\ , \\ \varphi_l(y)x^lr\ ,\ \varphi(y)zr \\ (l=0,1,\dots,n-1) \end{gathered}$$

[8, VIII] $$\begin{gathered} p\ ,q\ ,xp\ ,yq \\ \varphi_l(y)x^lr\ ,y^{s-1}zr \\ (l=0,1,\dots,n-1\ ;\ s=1,2,\dots,m) \end{gathered}$$

[9] **Gruppo accorciato:** $p\ ,\ q\ ,\ yq\ ,\ y^2q\ .$

89. — Prendendo le mosse dai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [5]: $q\ ,\ yq\ ,\ y^2q$ o dai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [6]: $p\ ,\ q\ ,\ yq$, troviamo anzitutto il solito gruppo massimo di seconda specie

[9, I] $$p\ ,q\ ,yq+azr\ ,y^2q+2ayzr\ ,\psi(x\ ,y)r$$

e inoltre i seguenti tipi:

[9, II]$_1$ $$\begin{gathered} p\ ,q\ ,yq+azr\ ,y^2q+2ayzr \\ \varphi_j(y)x^jr\ ,\varphi_{l,s}(y)x^le^{c_sx}r \\ (j=0,1,\dots,m-1\ ;\ s=1,2,\dots,h\ ;\ l=0,1,\dots,k_s) \end{gathered}$$

$[9, \mathrm{II}]_2$

$$\begin{gathered} p\,,\, q\,,\, yq - zr\,,\, y^2q - [2yz + ax^m]r \\ \varphi_j(y)x^j r\,,\, \varphi_{l,s}(y)x^l e^{c_s x} r \\ (j = 0, 1, \ldots m-1\,;\, s = 1, 2, \ldots, h\,;\, l = 0, 1, k_s) \end{gathered}$$

$[9, \mathrm{II}]_3$

$$\begin{gathered} p\,,\, q\,,\, yq + \frac{n-1}{2} zr\,,\, y^2 q + (n-1)yzr \\ \varphi_i(x)y^i r\,,\, \bar{\varphi}_j(y)x^j r\,,\, \varphi_{l\,.\,s}(y)x^l e^{c_s x} r \\ i = 0, 1, \ldots, n-1\,;\, j = 0, 1, \ldots m-1\,;\, s = 1, 2, \ldots, h\,;\, l = 0, 1, \ldots, k_s \end{gathered}$$

$[9, \mathrm{II}]_4$

$$\begin{gathered} p\,,\, q\,,\, yq\,,\, y^2 q + ax^m yr \\ \varphi(x)r\,,\, \varphi_j(y)x^j r\,,\, \varphi_{l,s}(y)x^l e^{c_s x} r \\ (j = 0, 1, \ldots, m-1\,;\, s = 1, 2, \ldots, h\,;\, l = 0, 1, \ldots, k_s) \end{gathered}$$

$[9, \mathrm{II}]_5$

$$\begin{gathered} p\,,\, q\,,\, yq + \frac{n}{2} zr\,,\, y^2 q + nyzr\,, \\ \varphi_j(y)x^j r\,,\, \varphi_{l,s}(y)x^l e^{c_s x} r\,,\, x^{m+u-1}y^t r\,,\, x^{v-1}e^{a_i x}y^t r \\ (j = 0, 1, \ldots, m-1\,;\, s = 1, 2, \ldots h\,;\, l = 0, 1, \ldots k_s\,;\, t = 0, 1, \ldots, n\,;\, u = 1, \ldots, m_t + \cdots + m_n\,; \\ i = 1, 2, \ldots, s_t + \cdots + s_n\,;\, v = 1, 2, \ldots, v_{i.t} + \cdots + v_{i.n}) \end{gathered}$$

$[9, \mathrm{II}]_6$

$$\begin{gathered} p\,,\, q\,,\, yq + ax^m r\,,\, y^2 q + 2ax^m yr \\ \varphi^j(y)x^j r\,,\, \varphi_{l,s}(y)x^l e^{c_s x} r\,,\, x^{m+u-1}r\,,\, x^{v-1}e^{a_i x} r \\ (j = 0, 1, \ldots, m-1\,;\, s = 1, 2, \ldots, h\,;\, l = 0, 1 \ldots, k_s\,;\, u = \ , \ldots, m_0\,;\, i = 1, 2, \ldots q\,;\, v = 1, 2, \ldots, v_i) \end{gathered}$$

90. — Tenuto conto che il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie* è riducibile a

$$p\,,\, q\,,\, yq\,,\, y^2 q + ayr\,,\, r$$

troviamo i seguenti tipi:

$[9, \mathrm{IV}]$

$$p\,,\, q\,,\, yq\,,\, y^2 q\,,\, \psi_0(x, y)r\,,\, \psi_1(x, y)zr$$

$[9, \mathrm{V}]_1$

$$\begin{gathered} p\,,\, q\,,\, y^2 q\,,\, \psi(x, y)r \\ \varphi(x)zr\,,\, \varphi_j(y)x^j zr\,,\, \varphi_{l,s}(y)x^l e^{c_s x} zr \\ j = 0, 1, \ldots, m-1\,;\, s = 1, 2, \ldots, k\,;\, l = 0, 1, \ldots, k_s \end{gathered}$$

$[9, \mathrm{V}]_2$

$$\begin{gathered} p\,,\, q\,,\, yq\,,\, y^2 q + ayzr\,,\, \psi(x, y)r \\ \varphi(x)zr\,,\, \varphi_{l,s}(y)x^l e^{c_s x} zr \\ (s = 1, 2, \ldots k\,;\, l = 0, 1, \ldots, k_s) \end{gathered}$$

[9, VI]
$$p, q, yq, y^2q + ayzr, \psi(x, y)r$$
$$x^{u-1}zr, x^{v-1}e^{a_i x}zr$$
$$(u = 1, 2, \dots, m;\ i = 1, 2, \dots, h;\ v = 1, 2, \dots, r_i)$$

[9, VII]$_1$
$$p, q, yq, y^2q,$$
$$\varphi_{l,s}(y)x^l e^{c_s x}r, \varphi(y)zr$$
$$(s = 1, 2, \dots, h;\ l = 0, 1, \dots, m_s)$$

[9, VII]$_2$
$$p, q, yq, y^2q + (n-1)yzr$$
$$\varphi_i(x)y^i r, \varphi(x)zr$$
$$(i = 0, 1, \dots, n-1)$$

[9, VIII]$_1$
$$p, q, yq, y^2q + ayzr$$
$$\varphi_{l,s}(y)x^l e^{b_s x}r, zr$$
$$(s = 1, 2, \dots, h;\ l = 0, 1, m_s)$$

[9, VIII]$_2$
$$p, q, yq, y^2q + (n-1)yzr$$
$$\varphi_i(x)y^i r, x^j zr, x^l e^{c_s x}zr$$
$$(i = 0, 1, \dots, n-1;\ j = 0, 1, \dots, m-1;\ s = 1, 2, \dots, h;\ l = 0, 1, \dots, m_s)$$

[10] Gruppo accorciato p, xp, q, yq, y^2q

91. — Tenendo presenti insieme i gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [8]: p, q, xp, yq (nn. 87, 88) e quelli corrispondenti al gruppo [9]: p, q, yq, y^2q, si ottengono i seguenti tipi che ci limitiamo ad enumerare:

[10, I]
$$p, xp + azr, q, yq + bzr, y^2q + 2byzr, \psi(x, y)r$$

[10, II]$_1$
$$p, xp + azr, q, yq + bzr, y^2q + 2byzr,$$
$$\varphi_j(y)x^j r$$
$$(j = 0, 1, \dots, m-1)$$

[10, II]$_2$
$$p, xp + [mz + ax^m]r, q, yq, y^2q,$$
$$\varphi_j(y)x^j r$$
$$(j = 0, 1, \dots, m-1)$$

[10, II]$_3$
$$p, xp - mzr, q, yq - zr, y^2q - [2yz + ax^m]r$$
$$\varphi_j(y)x^j r$$
$$(j = 0, 1, \dots, m-1)$$

[10, II]$_4$

$$p\,,\ xp + azr\,,\ q\,,\ yq + \frac{n-1}{2}zr\,,\ y^2q + (n-1)yzr$$
$$\varphi_i(x)y^ir\,,\ \bar{\varphi}_j(y)x^jr$$
$$(i=0,1,\dots,n-1\,;\ j=0,1,\dots,m-1)$$

[10, II]$_5$

$$p\,,\ xp + mzr\,,\ q\,,\ yq\,,\ y^2q + ax^myr$$
$$\varphi(x)r\,,\ \varphi_j(y)x^jr$$
$$(j=0,1,\dots,m-1)$$

[10, II]$_6$

$$p\,,\ xp + azr\,,\ q\,,\ yq + \frac{n}{2}zr\,,\ y^2q + nyzr$$
$$\varphi_j(y)x^jr\,,\ x^{m+u-1}y^tr$$
$$j=0,1,\dots,m-1\,;\ t=0,1,\dots,n\,;\ u=1,2,\dots,m_t+\dots+m_n$$

[10, II]$_7$

$$p\,,\ xp + [az + bx^{m+m_0}]r\,,\ q\,,\ yq\,,\ y^2q$$
$$\varphi_j(y)x^jr\,,\ x^{m+u-1}r$$
$$(j=0,1,\dots,m-1\,;\ u=1,2,\dots,m_0)$$

[10, II]$_8$

$$p\,,\ xp + [mz + ax^{m+m_0}]r\,,\ q\,,\ yq + bx^mr\,,\ y^2q + 2bx^myr$$
$$\varphi_j(y)x^jr\,,\ x^{m+u-1}r$$
$$(j=0,1,\dots,m-1\,;\ u=1,2,\dots,m_0)$$

[10, IV]

$$p\,,\ xp\,,\ q\,,\ yq\,,\ y^2q\,,\ \psi_0(x,y)r\,,\ \psi_1(x,y)zr$$

[10, V]$_1$

$$p\,,\ xp\,,\ q\,,\ yq\,,\ y^2q\,,\ \psi(x,y)r$$
$$\varphi(x)zr\,,\ \varphi_j(y)x^jzr$$
$$(j=0,1,\dots,m-1)$$

[10, V]$_2$

$$p\,,\ xp\,,\ q\,,\ yq\,,\ y^2q + ayzr\,,\ \psi(x,y)r$$
$$\varphi(x)zr$$

[10, VI]

$$p\,,\ xp\,,\ q\,,\ yq\,,\ y^2q + ayzr\,,\ \psi(x,y)r$$
$$x^{u-1}zr$$
$$(u=1,2,\dots,m)$$

[10, VII]$_1$ $\left| \begin{array}{c} p\,, xp\,, q\,, yq\,, y^2q \\ \varphi_j(y)x^jr\,, \varphi(y)zr \\ {\scriptstyle (j=0,1,\dots,m-1)} \end{array} \right|$ [10, VII]$_2$ $\left| \begin{array}{c} p\,, xp\,, q\,, yq\,, y^2q + (n-1)yzr \\ \varphi_j(x)y^jr\,, \varphi(x)zr \\ {\scriptstyle (j=0,1,\dots,n-1)} \end{array} \right|$

[10, VIII]$_1$ $\left| \begin{array}{c} p\,, xp\,, q\,, yq\,, y^2q + ayzr \\ \varphi_j(y)x^jr\,, zr \\ {\scriptstyle (j=0,1,\dots,m-1)} \end{array} \right|$ [10, VIII]$_2$ $\left| \begin{array}{c} p\,, xp\,, q\,, yq\,, y^2q + (n-1)yzr \\ \varphi_j(x)y^jr\,, x^izr \\ {\scriptstyle (j=0,1,\dots,n-1)} \end{array} \right|$

[11] Gruppo accorciato: $p\,, xp\,, x^2p\,, q\,, yq\,, y^2q$.

92. — Non abbiamo che da aggiungere una trasf. inf.

$$x^2p + [\alpha_2(x\,,y)z + \alpha_2(x\,,y)]r$$

ai gruppi determinati al n. prec. Otteniamo così i gruppi seguenti:

[11, I] $\left| \; p\,, xp + azr\,, x^2p + 2axzr\,, q\,, yq + bzr\,, y^2q + 2byzr\,, \psi(x\,,y)r \right.$

[11, II]$_1$ $\left| \begin{array}{c} p\,, xp + \frac{m-1}{2}zr\,, x^2p + (m-1)xzr\,, q\,, yq + azr\,, y^2q + ayzr\,, \\ \varphi_j(y)x^jr \\ {\scriptstyle (j=0,1,\dots,m-1)} \end{array} \right|$

[11, II]$_2$ $\left| \begin{array}{c} p\,, xp + \frac{m-1}{2}zr\,, x^2p + (m-1)xzr\,, q\,, yq + \frac{n-1}{2}zr\,, y^2q + (n-1)yzr \\ \varphi_j(y)x^jr\,, \bar{\varphi}_i(x)y^ir \\ {\scriptstyle (j=0,1,\dots,m-1\,;\; i=0,1,\dots,n-1)} \end{array} \right|$

[11, II]$_3$ $\left| \begin{array}{c} p\,, xp\,, x^2p\,, q\,, yq\,, y^2q + ayr \\ \varphi(x)r \end{array} \right|$

[11, II]$_4$ $\left| \begin{array}{c} p\,, xp + \left[\frac{m-1}{2}z + ax^m\right]r\,, x^2p + \left[(m-1)xz + \frac{2a}{m+1}x^{m+1}\right]r\,, q\,, yq\,, y^2q \\ \varphi_j(y)x^jr \\ {\scriptstyle (j=0,1,\dots,m-1)} \end{array} \right|$

[11, IV] $p, xp, x^2p, q, yq, y^2q, \psi_0(x, y)r, \psi_1(x, y)zr$

[11, V]$_1$ $p, xp, x^2p, q, yq, y^2q, \psi(x, y)r$, $\varphi(x)zr, \bar{\varphi}(y)zr$

[11, V]$_2$ $p, xp, x^2p, q, yq, y^2q + ayzr, \psi(x, y)r$, $\varphi(x)zr$

[11, VI] $p, xp, x^2p + axzr, q, yq, y^2q + ayzr, \psi(x, y)r$, zr

[11, VII] $p, xp, x^2p + (m-1)xzr, q, yq, y^2q$, $\varphi_j(y)x^jr, \varphi(y)zr$ $(j=0, 1, \dots, m-1)$

[11, VIII] $p, xp, x^2p + (m-1)xzr, q, yq, y^2q + ayzr$, $\varphi_j(y)x^jr, zr$ $(j=0, 1, \dots, m-1)$

[12] **Gruppo accorciato:** $p, xp + yq, x^2p + 2xyq$.

93. — *Un gruppo di seconda specie* si riduce senza difficoltà alla forma

$$p, xp + yq + \alpha_1 r, x^2p + 2xyq + [ayz + \alpha_2]r, \theta(x, y)r$$

dove le α_1, α_2 sono funzioni determinate, indipendenti da z, e la θ è o una funzione arbitraria o una funzione dipendente da infinite costanti arbitrarie, definita da un sistema (S) di equazioni lineari alle derivate parziali.

Nel primo caso abbiamo senz'altro il gruppo

[12, I] $p, xp, yq, x^2p + 2xyq + ayzr, \psi(x, y)r$

Nel secondo caso occorre anzitutto studiare il sistema (S), che definisce la $\theta(x, y)$. In base alle

$$(p, \theta r) = \theta_x r, (xp + yq + \alpha_1 r, \theta r) = [x\theta_x + y\theta_y]r,$$
$$(x^2p + 2xyq + [ayz + \alpha_2]r, \theta r) = x^2\theta_x + 2xy\theta_y - ay\theta$$

abbiamo che il sistema, insieme con ogni sua soluzione particolare θ, deve ammettere anche le

$$\theta_x \,,\; x\theta_x + y\theta_y \,,\; x^2\theta_x + 2xy\theta_y - ay\theta \,,$$

o, in altre parole, il sistema (S) deve ammettere le trasf. inf.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \,,\; x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \,,\; x^2\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} - ay\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} \,. \tag{49}$$

Le due prime implicano che le equazioni di (S) siano della forma (n. 73)

$$\sum_{m,n} a_{m,n} y^{m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} = 0 \,. \tag{50}$$

E la terza trasf. inf. (49), se si pone

$$\frac{\partial x^m \partial y^n}{\partial^{m+n}\theta} = \theta_{m,n} \,,$$

imprime alle varie derivate parziali di θ gli incrementi

$$\delta\theta_{m,n} = -\left\{ m(m+2n-1)\theta_{m-1,n} + (2[m+n]x + a)\theta_{m,n} + 2my\theta_{m-1,n+1} \right\} \delta t \,;$$

cosicchè, applicando questa trasf. inf. alla (50) e tenendo conto della (50) stessa, concludiamo che il sistema (S) deve contenere, insieme con ogni sua equazione (50), anche la

$$\sum_{m,n} a_{m,n} y^{m+n-1} \left\{ m(m+2n-1)\theta_{m-1,n} + 2my\theta_{m-1,n+1} \right\} = 0 \,. \tag{51}$$

Ora si immagini di avere ridotto il sistema (S) alla forma canonica del Tresse, in modo che in ogni equazione la ***derivata principale*** sia espressa per mezzo di derivate di ordine inferiore o, eventualmente, di derivate dello stesso ordine, aventi minore l'ordine parziale rispetto ad x (n. 78); e supponiamo che la (50) sia precisamente, fra le equazioni d'ordine minimo di (S), quella in cui la derivata principale ha il minimo ordine rispetto ad x. Risulta allora dalla forma stessa della (51) che quest'equazione o coincide, a meno di un fattore numerico, colla (50) o si riduce ad una identità. Il confronto dei coefficienti delle (50) (51) mostra che la prima ipotesi è impossibile; e la seconda conduce alla conclusione che la (50) non può contenere nessuna derivazione rispetto ad x, o, in altre parole,

deve avere la forma seguente (dove togliamo ai coefficienti il primo indice costantemente nullo):

$$a_n y^n \frac{\partial^n \theta}{\partial y^n} + a_{n-1} y^{n-1} \frac{\partial^{n-1}\theta}{\partial y^{n-1}} + \ldots + a_1 y \frac{\partial \theta}{\partial y} + a_0 \theta = 0 . \tag{52}$$

Quest'equazione si riduce a coefficienti costanti se si assume come nuova y la $\log y$, talchè la sua soluzione generale, nell'insieme delle funzioni di x e y, sarà della forma

$$\sum_{s,t} \mu_{s,t}(x) y^{c_s} \log^t y \qquad (s = 1, 2, \ldots h; t = 0, 1, \ldots, n_s) \tag{53}$$

dove le $\mu_{s,t}$ sono funzioni arbitrarie e indipendenti di x, e le c_s sono costanti determinate.

La soluzione generale del sistema (S) sarà della forma (53), dove ciascuno dei coefficienti $\mu_{s.t}$ sarà suscettibile di un insieme lineare di determinazioni (che per uno, almeno, dei coefficienti sarà ad infinite dimensioni) e dove inoltre i vari insiemi delle $\mu_{s,t}$ possono essere mutuamente vincolati da speciali corrispondenze lineari (cfr. il n. 2).

In ogni caso, dal fatto che l'insieme delle θ deve essere trasformato in sè dalla terza delle trasf. inf. (49) si conclude, tenendo conto della forma (53) delle θ stesse, che è necessariamente $a = 0$.

Ora noi condurremo a termine la determinazione nel caso in cui i vari coefficienti $\mu_{s.t}$ della espressione generale (53) della θ sono fra loro indipendenti; l'ipotesi che fra gli insiemi delle determinazioni delle determinazioni delle diverse $\mu_{s.t}$ intercedano delle corrispondenze non può condurre che a sottogruppi dei gruppi che noi costrurremo, e d'altra parte, dopo numerosi tentativi, ci siamo convinti della impossibilità pratica di assegnare in forma esplicita e generale il rappresentante tipico di siffatti gruppi.

Supposto dunque che nella espressione (53) della θ ciascuna delle $\mu_{s.t}$, applichiamo le (49) alla

$$\mu_{s.t}(x) y^{c_s} \log^t y :$$

otteniamo così rispettivamente

$$\mu'_{s.t} y^{c_s} \log^t y \ , \ [x\mu'_{s.t} + c_s \mu_{s.t}] y^{c_s} \log^t y + t\mu_{s.t} y^{c_s} \log^{t-1} y ,$$

$$[x^2 \mu'_{st} + 2c_s x \mu_{st}] y^{c_s} \log^t y + 2tx\mu_{st} y^{c_s} \log^{t-1} y .$$

Di qui risulta che, per ciascuna coppia di valori degli indici s, t, l'insieme dei coefficienti di

$$y^{c_s} \log^t y \tag{54}$$

contiene, con ogni determinazione particolare $\mu_{s.t}$, anche le

$$\mu'_{s.t}\,, \quad x\mu'_{s.t}\,, \quad x^2\mu'_{st} + 2c_s x \mu_{s.t} \tag{55}$$

e inoltre le

$$\mu_{s.t+1}\,, \quad x\mu_{s.t+1}$$

dove la $\mu_{s.t+1}$ rappresenta una qualsiasi determinazione del coefficiente di

$$y^{c_s} \log^{t+1} y\,.$$

Ora il coefficiente della (54), dovendo esser definito da equazioni differenziali o è addirittura una funzione arbitraria di x, oppure ammette un numero finito di determinazioni; e in quest'ultimo caso risulta dall'esistenza, nell'insieme, delle prime due (55) che la $\mu_{s.t}$ ammette determinazioni della forma

$$1\,, \; x\,, \; x^2\,, \; x^3\,, \; \ldots$$

fino ad un certo esponente dipendente da s e t. Per certi valori di s e t sia $m_{s.t} - 1$ il massimo valore corrispondente dell'esponente di x. Allora la terza delle (55) dà

$$|\, m_{st} - 1 + 2c_s |\, x^{m_{st}} y^{c_s} \log^t y\,,$$

onde risulta necessariamente

$$c_s = \frac{1 - m_{st}}{2}$$

e perciò $m_{s.t}$ deve dipendere solo da s e non da t. Ma all'insieme delle $\mu_{s.t}$ deve appartenere la $x\mu_{s.t}$ al diminuire di t di un'unità, deve crescere di 1, cosicchè arriviamo ad un assurdo. Fa eccezione solo il caso in cui manchino per un certo esponente c_s i termini logaritmici; e allora avremo per la θ determinazioni della forma

$$x^{i-1} y^{\frac{1-m_j}{2}} \qquad (j = 1, 2, \ldots h\,;\; i = 1, 2, \ldots, m_j) \tag{56}$$

dove gli m_j sono h numeri interi positivi determinati.

Accanto a queste la θ ammetterà, in quanto deve dipendere da infinite costanti arbitrarie, altre determinazioni della forma

$$\varphi_{s.t}(x)\, y^{c_s} \log^t y \qquad (s=1,2,\dots,k;\, t=0,1,\dots,n_s), \tag{57}$$

dove le $\varphi_{s.t}$ sono, al solito, funzioni arbitrarie.

Ciò premesso, restano da determinare le funzioni α_1, α_2 di x, y che compaiono in

$$xp + yq + \alpha_1 r\ ,\ x^2 p + 2xyq + \alpha_2 r\ .$$

Combinando queste trasf. inf. fra loro e con la p, troviamo che deve essere

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \equiv 0\,,\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \equiv \alpha_1\,,\ x\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + y\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} - x^2\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - 2xy\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \equiv \alpha_2 \qquad [\text{modd. } (56)\ (57)], \tag{58}$$

onde risulta anzitutto

$$\alpha_1 \equiv \sum a_j x^{m_j} y^{\frac{1-m_j}{2}} + \bar{\alpha}_1(y)\,,$$

e basta assumere come nuova z la

$$z - \sum \frac{2a_j}{m_j+1} x^{m_j} y^{\frac{1-m_j}{2}} - \int \frac{\bar{\alpha}_1 dy}{y}$$

per ridurre $\alpha_1 = 0$, senza alterare la forma della p, che risulta aumentata di una trasf. inf. del gruppo. Allora, in base alla seconda delle (58), avremo

$$\alpha_2 \equiv \sum b_j x^{m_j} y^{\frac{1-m_j}{2}} + \bar{\alpha}_2(y)$$

e la terza delle (58) richiede

$$\frac{1}{2}\sum (m_j - 1) b_j x^{m_j} y^{\frac{1-m_j}{2}} + y\bar{\alpha}'_2 - \bar{\alpha}_2 \equiv 0\,;$$

cosicchè anzitutto le b_j saranno tutte nulle, tranne il caso in cui uno dei numeri m_j sia uguale ad 1 e quindi nel gruppo si abbia la r. In ogni caso dovremo avere

$$y\bar{\alpha}'_2 - \bar{\alpha}_2 = \rho$$

dove ρ rappresenta una combinazione lineare (a coefficienti costanti) delle

$$y^{\frac{1-m_j}{2}}\,,\ y^{c_s} \log^t y\,,$$

ossia

$$\varkappa_2 = cy + y \int y^{-2} \varphi dy$$

dove c è una costante determinata. Ma, ricordando che

$$\int y^a \log^t y dy = \frac{1}{a+1} y^{a+1} \log^t y - \frac{1}{a+1} \int y^a \log^{t-1} y dy$$

e che perciò codesto integrale, qualunque sia t e *purchè* a *non sia uguale* $a - 1$, è una combinazione lineare a coefficienti costanti delle

$$y^{a+1} \log^t y \, , y^{a+1} \log^{t-1} y \, , \ldots , y^{a+1} \log y \, , y^{a+1} \, ,$$

concludiamo che in generale sarà

$$\varkappa_2 = cy \, ;$$

talchè avremo in primo luogo i gruppi

$$[12, \mathrm{II}]_1 \qquad \left| \begin{array}{c} p \, , xp + yq \, , x^2 p + 2xyq + cyr \\ x^{i-1} y^{\frac{1-m_j}{2}} \, , \varphi_{s \, . \, t}(x) y^{c_s} \log^t y r \\ (j = 1, 2, \ldots, h \, ; i = 1, 2, \ldots, m_j \, ; s = 1, 2, \ldots, k \, ; t = 0, 1, \ldots, n_s) \end{array} \right. \, ,$$

$$[12, \mathrm{II}]_2 \qquad \left| \begin{array}{c} p \, , xp + yq \, , x^2 p + 2xyq + [bx + cy] r \\ r \, , x^{i-1} y^{\frac{1-m_j}{2}} r \, , \varphi_{st}(x) y^{c_s} \log^t y r \\ (j = 1, 2, \ldots, k \, ; i = 1, 2, \ldots, m_j \, ; s = 1, 2, \ldots, k \, ; t = 0, 1, \ldots, n_s) \end{array} \right.$$

Fa eccezione il caso in cui una delle c_s sia uguale ad 1, in quanto allora, se n è il rispettivo esponente massimo del logaritmo, avremo

$$\alpha_2 \equiv cy + y \int y^{-1} [a_0 + a_1 \log y + \ldots + a_n \log^n y] dy =$$

$$= y \left[c + a_0 \log y + \frac{a_1}{2} \log^2 y + \ldots + \frac{a_n}{n+1} \log^{n+1} y \right] ;$$

e si potrà prendere senz'altro

$$\alpha_2 \equiv a \log^{n+1} y \, ,$$

cosicchè otteniamo i gruppi

[12, II]$_3$

$$p\,,\; xp + yq\,,\; x^2p + 2xyq + a\log^{n+1}yr$$
$$x^{i-1}y^{\frac{1-m_j}{2}}r\,,\; \varphi_l(x)y\log^l yr\,,\; \varphi_{s\cdot t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
$$(j=1,2,\dots,h\,;\; i=1,2,\dots,m_j\,;\; l=0,1,\dots,n\,;\; s=1,2,\dots,k\,;\; t=0,1,\dots,n_s)$$

[12, II]$_4$

$$p\,,\; xp + yq\,,\; x^2p + 2xyq + [ax + b\log^{n+1}y]r$$
$$r\,,\; x^{i-1}y^{\frac{1-m_j}{2}}r\,,\; \varphi_l(x)y\log^l yr\,,\; \varphi_{s\cdot t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
$$(j=1,2,\dots,h\,;\; i=1,2,\dots,m_j\,;\; l=0,1,\dots,n\,;\; s=1,2,\dots,k\,;\; t=0,1,n_s)$$

94. — Pei *gruppi di terza specie*, partendo dal gruppo generatore

$$p\,,\; xp + yq\,,\; x^2p + 2xyq + [ax + by]r\,,\; r$$

otteniamo i tipi seguenti, ove, nel caso del sottogruppo intransitivo [V], si faccia sulle θ la stessa ipotesi assunta nel n. prec.

[12, IV]

$$p\,,\; xp + yq\,,\; x^2p + 2xyq\,,\; \psi_0(x\,,y)r\,,\; \psi_1(x\,,y)zr$$

[12, V]

$$p\,,\; xp + yq\,,\; x^2p + 2xyq + [ax + by]zr\,,\; \psi(x\,,y)r$$
$$zr\,,\; x^{i-1}y^{\frac{1-m_j}{2}}zr\,,\; \varphi_{s\cdot t}(x)y^{c_s}\log^t y\,zr$$
$$(j=1,2,\dots,h\,;\; i=1,2,\dots,m_j\,;\; s=1,2,\dots,k\,;\; t=0,1,\dots,n_s)$$

[12, VI]

$$p\,,\; xp + yq\,,\; x^2p + 2xyq + [ax + by]zr\,,\; \psi(x\,,y)r\,,\; zr$$

[12, VII]

$$p\,,\; xp + yq\,,\; x^2p + 2xyq\,,\; \varphi_{s\cdot t}(x)y^{c_s}\log^t yr\,,\; \varphi(x)zr$$
$$(s=1,2,\dots,k\,;\; t=0,1,\dots,n_s)$$

[12, VIII]

$$p\,,\; xp + yq\,,\; x^2p + 2xyq + axzr\,,\; \varphi_{s\cdot t}(x)y^{c_s}\log^t yr\,,\; zr$$
$$(s=1,2,\dots,k\,;\; t=0,1,\dots,n_s)$$

[13] **Gruppo accorciato:** $p, xp, yq, x^2p + 2xyq$.

95 — Qui basterà aggiungere una trasf. inf.

$$yq + [\overline{\beta}_1(x, y)z + \beta_1(x, y)]r$$

ai gruppi testè determinati e corrispondenti al gruppo accorciato [12].

Ci limitiamo quindi alla enumerazione.

[13, I] $$p, xp + azr, yq - azr, x^2p + 2xyq, \psi(x, y)r$$

[13, II]$_1$ $$p, xp - zr, yq + zr, x^2p + 2xyq + cyr,$$
$$x^{i-i}y^{\frac{1-m_j}{2}}r, \varphi_{s.t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
$$(j = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m_j;\ s = 1, 2, \dots, k;\ t = 0, 1, \dots, n_s)$$

[13, II]$_2$ $$p, xp + azr, yq - azr, x^2p + 2xyq,$$
$$x^{i-1}y^{\frac{1-m_j}{2}}r, \varphi_{st}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
(c. s.)

[13, II]$_3$ $$p, xp + ar, yq - ar, x^2p + 2xyq$$
$$x^{i-1}y^{\frac{1-m_j}{2}}r, \varphi_{s.t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
(c. s.)

[13, II]$_4$ $$p, xp + a\log^{m+1}yr, yq - a\log^{m+1}yr, x^2p + 2xyq$$
$$x^{i-1}y^{\frac{1-m_j}{2}}r, \varphi_l(x)\log^l yr, \varphi_{s.t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
$$(j = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, \dots, m_j;\ l = 0, 1, \dots, m;\ s = 1, 2, \dots, k;\ t = 0, 1, \dots, n_s)$$

[13, II]$_5$ $$p, xp + a\log^{m+1}yr, yq - a\log^{m+1}yr, x^2p + 2xyq + bxr$$
$$r, x^{i-1}y^{\frac{1-m_j}{2}}r, \varphi_l(x)\log^l yr, \varphi_{s.t}(x)y^{c_s}\log^t yr,$$
(c. s.)

[13, II]$_6$

$$p\,,\ xp + a\log^{m+1}yr\,,\ yq - a\log^{m+1}yr\,,\ x^2p + 2xyq + a\log^{n+1}yr$$
$$x^{i-1}y^{\frac{1-m_j}{2}}r\,,\ \varphi_l(x)\log^l yr\,,\ \bar\varphi_u(x)y\log^u yr\,,\ \varphi_{s\cdot t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
$$(j=1,2,\dots,k;\ i=1,2,\dots,m_j;\ l=0,1,\dots,m;\ u=0,1,\dots,n;\ s=1,2,\dots,k;\ t=0,1,\dots,n_s)$$

[13, II]$_7$

$$p\,,\ xp + a\log^{m+1}yr\,,\ yq - a\log^{m+1}yr\,,\ x^2p + 2xyq + [bx + c\log^{n+1}y]r$$
$$r\,,\ x^{i-1}y^{\frac{1-m_j}{2}}r\,,\ \varphi_l(x)\log^l yr\,,\ \bar\varphi_u(x)y\log^u yr\,,\ \varphi_{s\cdot t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
$$(c\cdot s\cdot)$$

[13, IV]
$$p\,,\ xp\,,\ yq\,,\ x^2p + 2xyq\,,\ \psi_0(x, y)r\,,\ \psi_1(x, y)zr$$

[13, V]
$$p\,,\ xp\,,\ yq\,,\ x^2p + 2xyq + axzr\,,\ \psi(x, y)r$$
$$zr\,,\ x^{i-1}y^{\frac{1-m_j}{2}}zr\,,\ \varphi_{s\cdot t}(x)y^{c_s}\log^t yzr$$
$$(j=1,2,\dots,h;\ i=1,2,\dots,m_j;\ s=1,2,\dots,k;\ t=0,1,\dots,n_s)$$

[13, VI]
$$p\,,\ xp\,,\ yq\,,\ x^2p + 2xyq + axzr\,,\ \psi(x, y)r\,,\ zr$$

[13, VII]
$$p\,,\ xp\,,\ yq\,,\ x^2p + 2xyq\,,\ \varphi_{st}(x)y^{c_s}\log^t yr\,,\ \varphi(z)r$$
$$(s=1,2,\dots,k;\ t=0,1,\dots,n_s)$$

[13, VIII]
$$p\,,\ xp\,,\ yq\,,\ x^2p + 2xyq + axzr\,,\ \varphi_{s\cdot t}(x)y^{c_s}\log^t yr\,,\ zr$$
$$(s=1,2,\dots,k;\ t=0,1,\dots,n_s)$$

[14] **Gruppo accorciato**: $p\,,\ q\,;\ xp + (x+y)q$.

96. — Cominciando dai *gruppi di seconda specie*, i quali saranno riducibili alla forma

$$p + \alpha_0 r\,,\ q\,,\ xp + (x+y)q + (az + \alpha_1)r\,,\ \psi(x, y)r$$

dove α_0, α_1 sono funzioni determinate indipendenti da z, avremo anzitutto il gruppo massimo

[14, I]
$$p\,,\ q\,,\ xp + [x+y]q + azr\,,\ \psi(x, y)r$$

Se la θ è definita da un sistema (S) con ogni sua soluzione particolare θ ammette anche le

$$\theta_x \ , \ \theta_y \ , \ x\theta_x + [x+y]\theta_y \ , \tag{59}$$

o, in altre parole, il sistema (S) ammette le trasf. inf.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} \ , \ x\frac{\partial f}{\partial x} + [x+y]\frac{\partial f}{\partial y} \ .$$

Le prime due implicano che il sistema (S) sia a coefficienti costanti (o riducibile a tale per mezzo di sole eliminazioni algebriche). La terza trasf. inf. imprime alle

$$\theta_{s,t} = \frac{\partial^{s+t}\theta}{\partial x^s \partial y^t}$$

gli incrementi

$$\delta\theta_{s\cdot t} = -[(s+t)\theta_{s\cdot t} + s\theta_{s-1\cdot t+1}]\delta h$$

dove δh è un parametro infinitesimo arbitrario; cosicchè se

$$\sum a_{s\cdot t}\theta_{s\cdot t} = 0 \tag{60}$$

è un'equazione del sistema (S), il sistema stesso dovrà contenere anche la equazione

$$\sum [(s+t)a_{s\cdot t} + (s+1)a_{s+1\cdot t-1}]\theta_{s\cdot t} = 0 \ ,$$

la quale potrà, eventualmente, anche ridursi ad una identità.

Ora supponiamo che il sistema (S) sia ridotto alla solita forma canonica del Tresse e che la (60) sia precisamente, fra le equazioni d'ordine minimo, quella in cui la derivata principale è rispetto ad x d'ordine minimo. Allora la (61) non può che ridursi ad una identità o identificarsi colla (60) stessa, a meno di un moltiplicatore numerico. — Se n è l'ordine della (60), i termini di massimo ordine nella (61) sono

$$na_{n\cdot 0}\theta_{n\cdot 0} + [na_{n-1\cdot 1} + na_{n\cdot 0}]\theta_{n-1\cdot 1} + [na_{n-2\cdot 2} + (n-1)a_{n-1\cdot 1}]\theta_{n-2\cdot 2} + \dots \\ + [na_{0\cdot n} + a_{1\cdot n-1}]\theta_{0\cdot n}$$

cosicchè la (61) non può essere una identità se, contro l'ipotesi, non mancano *tutti* i termini di ordine n; mentre d'altra parte identifi-

cando la (61) colla (60), a meno del moltiplicatore n, si trova che il solo coefficiente di un termine d'ordine n che possa essere diverso da zero è $a_{0.n}$; e allora, pei coefficienti dei termini di ordine $< n$, si trova in base alla

$$(n - s - t)a_{s.t} = (s + 1)a_{s+1.t-1}\,,$$

che essi sono tutti nulli. In conclusione il sistema (S) contiene fra le equazioni di ordine minimo la

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial y^n} = 0\,,$$

cosicchè la θ sarà un polinomio in y di grado inferiore ad x

$$\theta = \mu_0(x) + y\mu_1(x) + \ldots + y^{n-1}\mu_{n-1}(x)\,,$$

dove i coefficienti μ_i sono funzioni di x, variabili ciascuna in un insieme lineare. Siccome l'insieme delle θ deve contenere con ciascuna sua determinazione particolare anche le (59), avremo in primo luogo, che l'insieme dei coefficienti di ciascuna potenza della y deve contenere tutte le derivate delle sue determinazioni, cosicchè codesto coefficiente sarà una funzione arbitraria o ammetterà uno dei soliti insiemi lineari di funzioni (esponenziali e razionali) definiti da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. — In secondo luogo il coefficiente di ciascuna potenza ammette tutte le determinazioni dei coefficienti delle potenze di esponente maggiore, ed altre ne può ammettere *proprie* o *appartenenti* all'esponente che si considera. — Infine, dal fatto che all'insieme delle θ appartiene la terza delle (59) deduciamo che quei coefficienti μ_i, che non sono funzioni arbitrarie, debbono ridursi a funzioni razionali intere e che, al diminuire di 1 dell'esponente di y, il massimo esponente di x deve crescere *almeno* di 1.

Insomma prendendo senz'altro a considerare il caso in cui i vari coefficienti μ_i sono mutuamente indipendenti (cfr. n. 92), concludiamo che la θ ammette un sistema fondamentale di determinazioni della forma seguente, dove, per uniformità con altri casi analoghi, indichiamo il primitivo n con $n + n_1$:

$$\varphi_i(x)y^{i-1}\,,\quad x^{s-1}y^{n+t-1} \tag{62}$$

$$(i=1,2,\ldots,n\,;\ t=1,2,\ldots,n_1\,;\ s=1,2,\ldots,m_{n_1}+\ldots+m_t)\,,$$

dove gli n_1 numeri interi m_t sono tutti diversi dallo zero; perciò nella spezzata del solito diagramma i lati paralleli all'asse y hanno tutti la lunghezza 1.

Ciò premesso, determiniamo le funzioni α_0, α_1 che compaiono nelle

$$p + \alpha_0 r \ , \ xp + [x+y]q + [az + \alpha_1]r \ .$$

Dalle

$$(q, p + \alpha_0 r) = \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} r \ , \ (q, xp + [x+y]q + [nz + \alpha_1]r) = q + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} r$$

risulta

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial y} \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \equiv 0 \qquad [\text{modd. } (62)]$$

e quindi

$$\alpha_0 \equiv \lambda_0(x) y^n + \sum_{t=1}^{n_1} y^{n+t} \sum_{u=1}^{m_t} a_{t.u} x^{m_{t+1} + \cdots + m_{n_1} + u - 1}$$

$$\alpha_1 \equiv \lambda_1(x) y^n + \sum_{t=1}^{n_1} y^{n+t} \sum_{u=1}^{m_t} a_{t.u} x^{m_{t+1} + \cdots + m_{n_1} + u - 1} \ .$$

Ora scegliendo come nuova z la

$$z - \int \left\{ \lambda_0 y^n + \sum_{t=1}^{n_1} y^{n+t} \sum_{u=1}^{m_t - 1} a_{tu} x^{m_{t+1} + \cdots + m_{n_1} + u - 1} \right\} dx$$

si annullano in α_0, oltre λ_0, tutti gli $a_{t.u}$ tranne quelli corrispondenti agli indici $u = m_t$; mentre la q viene semplicemente aumentata di una trasf. inf. del gruppo. Avremo cioè, tralasciando il secondo indice, divenuto superfluo,

$$\alpha_0 = \sum_{t=1}^{n_1} a_t x^{m_t + \cdots + m_{n_1} - 1} y^{n+t} \ .$$

Ma in base alla

$$(p + \alpha_0 r, xp + [x+y]q + [az + \alpha_1]r) = p + q + \left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + a\alpha_0 - x \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} - [x+y] \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} \right] r$$

concludiamo che si deve avere

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \equiv x \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} + [x+y] \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} + [1-a]\alpha_0 ,$$

ossia

$$\sum_{t=1}^{n_1} [m_t + \ldots + m_{n_1} + n + t - a]\, a_t x^{m_t + \cdots + m_{n_1} - 1} y^{n+t} + \sum_{t=1}^{n_1} [n+t] a_t x^{m_t + \cdots + m_{n_1}} y^{n+t-1} \equiv$$

$$\equiv \lambda'_1 y^n + \sum_{t=1}^{n_1} y^{n+t} \sum_{u=1}^{m_t} [m_{t+1} + \ldots + m_{n_1} + u - 1] a_{tu} x^{m_t + \cdots + m_{n_1} + u - 2} .$$

Confrontando i coefficienti di y^{n+t}, si trova che questa congruenza si spezza nelle seguenti

$$\lambda'_1 \equiv 0 \qquad \left[\text{modd. } 1, x, \ldots, x^{m_1 + \cdots + m_{n_1} - 1}\right]$$

$$[m_t + \ldots + m_{n_1} + n + t - a] a_t x^{m_t + \cdots + m_{n_1} - 1} + [n + t + 1] a_{t+1} x^{m_{t+1} + \cdots + m_{n_1}} \equiv$$

$$\equiv \sum_{u=1}^{m_t} [m_{t+1} + \ldots + m_{n_1} + u - 1] a_{t.u} x^{m_{t+1} + \cdots + m_{n_1} + u - 2} \left[\text{modd.} 1, x, \ldots, x^{m_{t+1} + \cdots + m_{n_1} - 1}\right]$$

Di qui risulta $a_t = 0$, salvo il caso in cui sia

$$a = m_t + \ldots + m_{n_1} + n + t .$$

Inoltre dovremo avere $a_{t.u} = 0$ per $u > 2$; e quanto ad $a_{t.1}, \bar{a}_{t.2}$ il primo resta arbitrario, e il secondo deve essere tale che si abbia

$$[n + t + 1] a_{t+1} = [m_{t+1} + \ldots + m_{n_1} + 1] \bar{a}_{t.2} .$$

Concludendo, se supponiamo $a_h \gtrless 0$, avremo

$$p + a_h x^{m_h + \cdots + m_{n_1} - 1} y^{n+h} q ,$$

$$xp + [x+y]q + \Big\{ (m_h + \ldots m_{n_1} + n + h) z + \frac{n+h}{m_h + \ldots + m_{n_1} + 1} a_h x^{m_h + \cdots + m_{n_1} + 1} y^{n+h+1} +$$

$$+ \sum_{t=1}^{n_1} \bar{a}_t x^{m_{t+1} + \cdots + m_{n_1}} y^{n+t} \Big\} r .$$

Abbiamo così, secondo che è $a_h = 0$ o $a_h \gtrless 0$, i due gruppi seguenti

$$[14, \mathrm{II}]_1 \qquad \begin{gathered} p\,,\; q\,, \\ xp + [x+y]q + \left\{ a_0 z + \sum_{t=1}^{n_1} a_t x^{m_{t+1}+\cdots+m_{n_1}} y^{n+t} \right\} r \\ \varphi_i(x) y^{i-1} r\,,\; x^{s-1} y^{n+t-1} r \\ (i=1,2,\ldots,n;\; t=1,2,\ldots,n_1;\; s=1,2,\ldots,m_t+\cdots+m_{n_1}) \end{gathered}$$

$$[14, \mathrm{II}]_2 \qquad \begin{gathered} p + a x^{m_h+\cdots+m_{n_1}-1} y^{n+h} r\,,\; q \\ xp + [x+y]q + \Big\{ (m_h + \cdots + m_{n_1} + n + h) z + \\ + \frac{n+h}{m_h+\cdots+m_{n_1}+1} a x^{m_h+\cdots+m_{n_1}+1} y^{n+h} + \sum_{t=1}^{n_1} a_t x^{m_{t+1}+\cdots+m_{n_1}} y^{n+t} \Big\} r \\ \varphi_i(x) y^{i-1} r\,,\; x^{s-1} y^{n+t-1} r \end{gathered}$$

Nel caso in cui manchino le $x^{s-1}y^{n+t-1}r$, si trovano agevolmente i due gruppi

$$[14, \mathrm{II}]_3 \qquad \begin{gathered} p\,,\; q\,,\; xp + [x+y]q + azr\,,\; \varphi_i(x) y^i r \\ (i=0,1,\ldots,n-1) \end{gathered}$$

$$[14, \mathrm{II}]_4 \qquad \begin{gathered} p\,,\; q\,,\; xp + [x+y]q + a y^n r\,,\; \varphi_i(x) y^i r \\ (i=0,1,\ldots,n-1) \end{gathered}$$

Enumeriamo infine i *gruppi di terza specie*.

$$[14, \mathrm{IV}] \qquad p\,,\; q\,,\; xp + [x \quad y]q\,,\; \psi_0(x,y) r\,,\; \psi_1(x,y) z r$$

$$[14, \mathrm{V}] \qquad \begin{gathered} p\,,\; q\,,\; xp + [x+y]q\,,\; \psi(x,y) r \\ \bar{\varphi}_i(x) y^i z r\,,\; x^{s-1} y^{n+t-1} z r \\ (i=0,1,\ldots,n-1;\; t=1,\ldots,n_1;\; s=1,2,\ldots,m_t+\cdots+m_{n_1}) \end{gathered}$$

[14, VI]
$$\begin{array}{|c|} p\,,\,q\,,\,xp+[x+y]q\,,\,\psi(x\,,y)r \\ x^{s-1}y^{t-1}zr \\ {\scriptstyle (t=1,2,\ldots,n\,;\;i=1,2,\ldots,m_1+\cdots+m_n)} \end{array}$$

[14, VII]
$$p\,,\,q\,,\,xp+[x+y]q\,,\,\varphi_i(x)y^i r\,,\,\varphi(x)zr \qquad {\scriptstyle (i=0,1,\ldots,n-1)}$$

[14, VIII]
$$p\,,\,q\,,\,xp+[x+y]q\,,\,\varphi_i(x)y^i r\,,\,x^j zr \qquad {\scriptstyle (i=0,1,\ldots,n-1\,;\;j=0,1,\ldots,m-1)}$$

[15] **Gruppo accorciato:** $p\,,\,xp+[sy+x^s]q\,,\,q\,,\,xq\,,\,\ldots\,,\,x^{s-1}q\,,\,s<1$.

97. — Un *gruppo di seconda specie* sia ridotto alla forma

$$p+\alpha_0 r\,,\,q\,,\,xp+[sy+x^s]q+[z\alpha_1+\bar{\alpha}_1]r\,,\,x^l q+[z\beta_l+\bar{\beta}_l]r\,,\,\theta(x\,,y)r \qquad {\scriptstyle (l=0,1,\ldots,s-1)}$$

dove le $\alpha_0\,,\alpha_1\,,\bar{\alpha}_1\,,\beta_l\,,\bar{\beta}_l$ sono funzioni di x e y da determinare.

Combinando codeste trasf. inf. si trova che deve aversi

$$\text{a)}\qquad \frac{\partial\bar{\beta}_l}{\partial y}=0\,,\quad \frac{d\bar{\beta}_l}{dx}=l\bar{\beta}_{l-1}\,,\quad \frac{\partial\bar{\alpha}_1}{\partial y}=0\,,\quad \frac{d\bar{\alpha}_1}{dx}=s\bar{\beta}_{s-1}\,,$$

$$\text{b)}\qquad x\frac{d\bar{\beta}_l}{dx}=(l-s)\bar{\beta}_l\,.$$

Dai primi due gruppi di equazioni *a*) e dalle *b*) risulta senz'altro che le $\bar{\beta}_l$ sono nulle. Invero dalle prime discenderebbe che le $\bar{\beta}_l$ costituiscono una serie di polinomi dell'Appell in x, cioè una serie di polinomi della forma

$$\bar{\beta}_l=\binom{l}{1}b_1 x^{l-1}+\ldots+\binom{l}{l-1}b_{l-1}x+b_l \qquad (l=1\,,2\,,\ldots\,,s-1).$$

dove le b_l sono costanti determinate; e dalle *b*) si ricava subito che tutte le costanti b_l debbono esser nulle.

Allora abbiamo senz'altro $\bar{\alpha}_1=$ cost. e otteniamo un gruppo di seconda specie della forma

$$p+\alpha_0 r\,,\,q\,,\,xp+[sy+x^s]q+[az+\bar{\alpha}_1]r\,,\,x^l q+\beta_l r\,,\,\theta(x\,,y)r\,.$$

Se la θ è arbitraria si ottiene il gruppo massimo di seconda specie

$$[15, I] \qquad \left| \begin{array}{c} p, q, xq, \ldots, x^{s-1}q, xp + [sy + x^s]q + azr, \psi(x, y)r \\ s > 1 \end{array} \right|$$

In secondo luogo supponiamo che la θ sia definita da un sistema (S) di equazioni lineari alle derivate parziali. Queste, in base alla presenza nel gruppo delle p e q, sarà a coefficienti costanti.

Inoltre, in quanto il gruppo contiene la $xq + \beta_1 r$, il sistema (S) deve ammettere la trasf. inf.

$$x \frac{\partial f}{\partial y},$$

la quale, estesa alle successive derivate di θ, dà

$$\delta \theta_{r \cdot t} = - r \theta_{r-1, t+1},$$

cosicchè (S), insieme con ogni sua equazione

$$(63) \qquad \sum a_{r \cdot t} \theta_{r \cdot t} = 0$$

conterrà anche la

$$(64) \qquad \sum r a_{r \cdot t} \theta_{r-1 \cdot t+1} = 0$$

Se la (63) è la solita equazione d'ordine minimo (cfr. n. prec.) la (64) non può manifestamente identificarsi con essa e deve perciò ridursi ad una identità, cosicchè si conclude che la (63) non può contenere derivazioni rispetto ad x; cioè, lasciando il primo indice superfluo, avrà la forma

$$(63') \qquad \sum a_t \frac{\partial^t \theta}{\partial y^t} = 0 .$$

Ma la $xp + [sy + x^s]q + [az + \alpha_1]r$ induce sul sistema (S) la trasf. inf.

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + [sy + x^s] \frac{\partial f}{\partial y} - a\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

la quale, prolungata, dà

$$\delta \theta_{0 \cdot t} = - st \theta_{0 \cdot t} ;$$

cosicchè ad (S) apparterranno, con la (63'), anche le infinite equazioni, che se ne deducono applicando iteratamente la trasf. inf. precedente,

$$\sum t^i a_t \frac{\partial^t \theta}{\partial y^t} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, \infty).$$

Quest' equazione si spezza perciò in quelle che si ottengono uguagliando a zero i vari suoi termini; cosicchè (S) fra le sue equazioni di ordine minimo conterrà un' equazione della forma

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial y^n} = 0$$

e la θ sarà un polinomio in y di grado inferiore ad n

$$\theta = \mu_0(x) + y\mu_1(x) + y^2\mu_2(x) + \dots + y^{n-1}\mu_{n-1}(x)$$

dove, al solito, le μ_i ammettono ciascuno un certo insieme lineare di determinazioni, il quale, almeno per uno di codesti coefficienti, è ad infinite dimensioni.

Supponiamo anche qui che codesti vari insiemi lineari siano fra loro indipendenti, ossia che ciascuna μ_i possa assumere tutte le determinazioni di cui è suscettibile, indipendentemente dalle determinazioni delle altre μ_i.

Si trova allora, come al n. prec., che la θ ammette un sistema fondamentale di determinazioni della forma

$$\varphi_i(x)y^{i-1}, \quad x^{s-1}y^{n+t-1}$$
$$(i=1,2,\dots,n;\ t=1,2,\dots,n_1;\ s=1,2,\dots,m_t+\dots+m_{n_1}),$$

dove gli n_1 numeri interi m_t debbono ora esser tutti, tranne eventualmente, m_{n_1}, maggiori o almeno uguali ad s: m_{n_1} può essere $< s$ od anche nullo (quando fra le θ vi sia la sola y^{n+n_1-1} di grado $n + n_1 - 1$ in y).

Ciò premesso, occupiamoci delle funzioni $\alpha_0, \alpha_1, \beta_t$, che compaiono nelle trasf. inf. del nostro gruppo

$$p + \alpha_0 r, q, x^t q + \beta_t r, xp + [sy + x^s]q + [az + \alpha_1]r.$$

La presenza delle $x^{s-1}y^{n+t-1}$ fra le possibili determinazioni di θ complica enormemente i calcoli, come già si è visto trattando il gruppo [14], che è un caso particolare del gruppo, di cui qui ci occupiamo. Anzi è praticamente impossibile di assegnare in forma

esplicita un gruppo della nostra specie, in cui sia tenuto conto di tutte le possibili particolarità, dipendenti essenzialmente dalle relazioni di uguaglianza o disuguaglianza che possono intercedere fra i numeri $m_1, m_2, \dots, m_{n_1}$. D'altra parte, quando siano fissati i valori di questi interi, diventa facile, sulla traccia del n. prec., compiere la determinazione. Perciò noi qui supporremo che la θ ammetta soltanto le determinazioni

$$\varphi_i(x)y^i \qquad (i=0,1,\dots,n-1).$$

In base alla presenza della q, dovremo avere

$$\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\equiv 0\,,\ \frac{\partial\beta_l}{\partial y}\equiv 0\,,\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\equiv 0 \qquad [\text{modd. } \varphi_i(x)y^i]$$

e quindi

$$\alpha_0\equiv\bar{\alpha}_0(x)y^n\,,\ \beta_l\equiv\pi_l(x)y^n\,,\ \alpha_1\equiv\alpha(x)y^n\,,$$

dove le $\alpha_0, \pi_l, \alpha_1$ sono funzioni determinate dalla sola x. Ma ponendo

$$z'=z-y^n\int_0^x\bar{\alpha}_0dx$$

si riduce $\alpha_0=0$, mentre la q viene semplicemente aumentata di una trasf. inf. del gruppo e le altre trasf. inf. non mutano forma.

Allora, ricorrendo alla p, troviamo

$$\frac{d\pi_1}{dx}=0\,,\ \frac{d\pi_l}{dx}=l\pi_{l-1}\,.\ \frac{d\bar{\alpha}_1}{dx}=s\pi_{s-1}\,;$$

onde risulta che $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{s-1}, \alpha_1$ costituiscono una successione di polinomi dell' Appell

$$\pi_l=lc_1x^{l-1}+\binom{l}{2}c_2x^{l-2}+\dots+\binom{l}{l-1}c_{l-1}x+c_l \qquad (l=1,2,\dots,s-1)$$

$$\alpha_1=sc_1x^{s-1}+\binom{s}{2}c_2x^{s-2}+\dots+\binom{s}{s-1}c_{s-1}x+c_s\,,$$

dove $c_1, c_2, \dots, c_s$ sono costanti determinate.

Inoltre, dalla

$$(xp+[sy+x^s]q+[az+\alpha_1y^n]r\,,\ x^lq+\pi_ly^nr)=[l-s]x^lq+[x\pi'_l+(sn-a)\pi_l]y^nr\,,$$

ricaviamo

$$x\pi'_l=[l+a-s(n+1)]. \tag{65}$$

Se è

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{t-1} = 0 \ , \ c_t \lesseqgtr 0$$

talchè si abbia

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_{t-1} = 0 \ , \ \pi_t = c_t \ , \ \pi_{t+1} = (t+1)c_t x + c_{t+1} \ , \ \dots \ .$$

la (65) dà

$$a = s[n+1] - t \ , \ c_{t+1} = c_{t+2} = \dots = c_s = 0 \, ;$$

e otteniamo il gruppo

$$[16, \mathrm{II}]_1 \quad \left| \begin{array}{c} p \, , q \, , xq \, , \dots \, x^{t-1}q \, , x^t q + cy^n r \, , \dots \, , x^l q + \binom{l}{t} c x^{l-t} y^n r \, , \dots \\ xp + [sy + x^s]q + \left[(s[n+1] - t)z + \binom{s}{t} c x^{s-t} y^n \right] r \\ \varphi_i(x) y^i r \\ (l = t, t+1, \dots, s-1 \, ; \, i = 0, 1, 2, \dots, n-1) \end{array} \right|$$

Se poi tutte le c_l sono nulle, si avrà:

$$[15, \mathrm{II}]_2 \quad \begin{array}{c} p \, , q \, , xq \, , \dots , x^{s-1}q \, , xp + [sy + x^s]q + [az + cy^n]r \\ \varphi_i(x) y^i r \\ (i = 0, 1, \dots, n-1) \end{array}$$

La enumerazione dei *gruppi di terza specie* si compie agevolmente notando che il gruppo generatore è dato semplicemente dal gruppo accorciato stesso, accresciuto della traslazione infinitesima r:

$$[15, \mathrm{IV}] \quad p \, , q \, , xq \, , \dots , x^{s-1}q \, , xp + [sy + x^s]q \, , \psi_0(x, y)r \, , \psi_1(x, y)zr$$

$$[15, \mathrm{V}] \quad \begin{array}{c} p \, , q \, , xq \, , \dots , x^{s-1}q \, , xp + [sy + x^s]q \, , \psi(x, y)r \, , \\ \varphi_i(x) y^i zr \, , x^{s-1} y^{n+t-1} zr \\ (i = 0, 1, \dots, n-1 \, ; \, t = 1, 2, \dots, n_1 \, ; \, s = 1, 2, \dots, m_t + \dots + m_{n_1}) \end{array}$$

$$[15, \mathrm{VI}] \quad \begin{array}{c} p \, , q \, , xq \, , \dots , x^{s-1}q \, , xp + [sy + x^s]q \, , \psi(x, y)r \\ x^{s-1} y^{t-1} zr \\ (t = 1, 2, \dots, n \, ; \, s = 1, 2, \dots, m_t + \dots + m_n) \end{array}$$

[15, VII] $$p, q, xq, \dots, x^{s-1}q, xp + [sy + x^s]q, \varphi_i(x)y^i r, \varphi(x)zr \quad (i=0,1,\dots,n-1)$$

[15, VIII] $$p, q, xq, \dots, x^{s-1}q, xp + [sy + x^s]q, \varphi_i(x)y^i r, x^t zr \quad (i=0,1,\dots,n-1;\ t=0,1,\dots,m-1)$$

[16] **Gruppo accorciato:** $p, xp + cyq, q, xq, \dots, x^s q \qquad (s > 0)$.

98. — Un *gruppo di seconda specie* si riduce agevolmente (cfr. n. 84) alla forma

$$p + \alpha_0 r, q, xp + cyq + [az + \alpha_1]r, x^l q + [\bar\beta_l z + \beta_l]r, \theta(x, y)r,$$

dove le $\alpha_0, \alpha_1, \bar\beta_l, \beta_l$ sono funzioni indipendenti da z.

Le $\bar\beta_l$ si possono determinare indipendentemente da ogni ipotesi particolare sulla θ. Infatti combinando le $p + \alpha_0 r$ e q con le $x^l q + \dots$, si trova

$$\frac{\partial \bar\beta_l}{\partial y} = 0, \quad \frac{d\bar\beta_1}{dx} = 0, \quad \frac{d\bar\beta_l}{dx} = l\bar\beta_l$$

onde risulta che le $\bar\beta_l$ sono polinomi dell' Appell, relativi ad una successione di costanti, di cui la prima è nulla; cioè

$$\bar\beta_l = lc_1 x^{l-1} + \binom{l}{2} c_2 x^{l-2} + \dots + \binom{l}{l-1} c_{l-1} x + c_l.$$

Ma in base alla

$$(xp + cyq + [az + \alpha_1]r, x^l q + [\bar\beta_l z + \beta_l]r) = [l - c]x^l q + [x\bar\beta'_l z + \dots]r$$

avremo

$$x\bar\beta'_l = [l - c]\bar\beta_l,$$

talchè risulta che se c non è uguale ad un intero minore ad $s + 1$, si ha necessariamente $c_1 = c_2 = \dots = c_s = 0$. Se invece c è un intero t compreso fra 0 ed $s + 1$ (esclusi gli estremi), la c_t può essere diversa da zero, mentre le altre c_s debbono essere nulle. Otteniamo così, nel caso in cui θ sia arbitraria, i due gruppi

[16, I]$_1$ $$p, q, xp + cyq + azr, xq, x^2 q, \dots, x^s q, \psi(x, y)r$$

$$[16, \mathrm{I}]_2 \qquad \begin{gathered} p\,,\,q\,,\,xp + tyq + azr\,,\,xq\,,\,\ldots\,,\,x^{t-1}q\,,\,x^tq + bzr\,,\,\ldots\,,\,x^{t+i}q + \binom{t+i}{i} bx^izr \\ \psi(x\,,y)r \\ {\scriptstyle (i=0,1,\ldots,s-t)} \end{gathered}$$

Nel caso in cui la θ è definita da un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, non appartenenti alla classe del MAYER, si trova, come al n. prec., che le θ sono polinomi in y; e, se i coefficienti delle varie potenze di y sono indipendenti, le determinazioni della θ sono della forma

$$\varphi_j(x)y^i \quad , \quad x^{s-1}y^{n+t-1}$$
$$(i=0,1,\ldots,n-1\,;\,t=1,2,\ldots,n_1\,;\,s=1,2,\ldots,m_t+\cdots+m_{n_1})$$

dove i numeri interi $m_1, m_2, \ldots, m_{n_1-1}$ sono tutti non minori di s, mentre m_{n_1} può avere qualsiasi valore.

Limitandoci anche qui, come al n. prec., a considerare il caso in cui la θ non ammette le determinazioni $x^{s-1}y^{n+t-1}$ e supponendo che c non sia un intero compreso fra 0 ed $s+1$, avremo un gruppo della forma

$$p + \alpha_0 r\,,\,q\,,\,xp + cyq + |az + \alpha_1|r\,,\,x^lq + \beta_l r\,.\,\varphi_i(x)y^ir\,.$$

Come al n. prec. si trova

$$\alpha_0 \equiv \bar{\alpha}_0(x)y^n\;,\;\beta_l \equiv \pi_l(x)y^n\;,\;\alpha_1 \equiv \alpha(x)y^n \qquad |\text{modd. } \varphi_i y^i|,$$

talchè scegliendo

$$z' = z - y^n \int_0^x \alpha_0 dx$$

si riduce anche qui $\alpha_0 = 0$ senza alterare la forma dalle altre trasf. inf. Avremo allora, combinando la p con le altre trasf. inf.,

$$\pi'_1 = 0\;,\;\pi'_l = l\pi_{l-1}\;,\;\alpha'_1 = 0\,,$$

cioè le π_1, α_1 si ridurranno a due costanti determinate, mentre le π_l, costituiranno una successione di polinomi dell' APPELL, la cui prima costante è nulla.

Ma dalla

$$(xp + cyq + |az + by^n|r\,,\,x^lq + \pi_l y^n r) \equiv (l-c)x^lq + |x\pi'_l - (a-cn)\pi_l|y^nr$$

deduciamo

$$x\pi'_l = |a + l - c(n+1)]\pi_l\,,$$

e di qui, analogamente al n. prec., risulta che, se i π_l non sono tutti nulli deve aversi per un certo indice t compreso fra 0 ed $s+1$ (esclusi gli estremi)

$$a = c(n+1) - t\,,\ \pi_1 = \dots = \pi_{t-1} = 0\,,\ \pi_t = a\,,\ \pi_{t+i} = \binom{t+i}{i} a x^i (i = 0, \dots, s-t)\,.$$

Otteniamo dunque i due gruppi

$$[16, II]_1 \qquad \begin{array}{c} p\,,\, q\,,\, xq\,, \dots,\, x^{t-1}q\,,\, x^t q + a y^n r\,, \dots,\, x^{t+i} q + \binom{t+i}{i} a x^i y^n r \\ xp + cyq + [(c[n+1] - t)z + by^n] r \\ \varphi_j(x) y^j r \\ {\scriptstyle (i=0,1,\dots,s-t\,;\ j=0,1,\dots,n-1)} \end{array}$$

$$[16, II]_2 \qquad \begin{array}{c} p\,,\, q\,,\, xq\,, \dots,\, x^s q\,,\, xp + cyq + [az + by^n] r\,,\, \varphi_i(x) y^i r \\ {\scriptstyle (i=0,1,\dots,n-1)} \end{array}$$

Se poi $c = t$, dove t è un intero compreso fra 0 ed $s+1$ (esclusi gli estremi) avremo un gruppo

$$\begin{array}{c} p + \alpha_0 r\,,\, q\,,\, xq + \beta_1 r\,, \dots,\, x^{t-1} q + \beta_{t-1} r\,,\, x^t q + [bz + \beta_t] r\,, \\ x^{t+i} q + \left[\binom{t+i}{i} b x^i z + \beta_{t+i}\right] r \\ xp + tyq + [az + \alpha_1] r\,,\, \varphi_j(x) y^j r \\ {\scriptstyle (i=0,1,\dots,s-t\,;\ j=0,1,\dots,n-1)}\,. \end{array}$$

Anche qui come al n. prec. si può ridurre $\alpha_0 = 0$ e si dimostra che è

$$\beta_1 = c_1 y^n\ ,\ \beta_l = \pi_l y^n\ ,\ \alpha_1 = b_1 y^n$$

dove i π_l sono polinomi dell'Appell relativi ad una successione di costanti, la prima delle quali è nulla. Ma, in base alla

$$(x^{t-1} q + \pi_{t-1} y^n r\,,\, x^t q + [bz + \pi_t y^n] r) \equiv b \pi_{t-1} y^n r$$

ricaviamo

$$b \pi_{t-1} = 0$$

e, poichè l'ipotesi $b = 0$ condurrebbe ad un caso particolare dei gruppi determinati pocanzi, concludiamo

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_{t-1} = 0\,.$$

Ma allora, prendendo a considerare la

$$x^t q + | bz + c_t y^n | r ,$$

basta porre

$$z' = z + \frac{c_t}{b} y^n$$

per ridurre $c_t = 0$, senza alterare la forma delle altre trasf. inf.; dopo di che la

$$(x^t q + bzr , x^{t+i} q + \left[\binom{t+i}{i} b x^i z + \pi_{t+i} y^n \right] r) \equiv - b \pi_{t+i} y^n r$$

ci avverte che tutti i π_l sono nulli. Si ha così il gruppo

$$[16, II]_3 \qquad \begin{gathered} p , q , xq , \dots , x^{t-1} q , x^t q + bzr , x^{t+i} q + \binom{t+i}{i} b x^i z r \\ xp + tyq + azr , \varphi_j(x) y^j r \\ (i = 0, 1, \dots, s-t \; ; \; j = 0, 1, \dots, n-1) \end{gathered}$$

99. — Pei *gruppi di terza specie* il gruppo generatore è nel caso generale lo stesso gruppo accorciato, più la traslazione infinitesima r. Ma se $c = -1$, o se $c = t - 1$, dove t sia un numero intero compreso fra 0 ed $s + 1$ (esclusi gli estremi) o se $c = \frac{s}{2}$ abbiamo rispettivamente il primo o il secondo o il terzo dei tre gruppi seguenti:

$$\text{a)} \qquad p + ayr , q , xq , \dots , x^s q , xp - yq , r$$

$$\text{b)} \quad \left\{ \begin{gathered} p , q , xq , \dots , x^{t-1} q , x^t q + axr . \\ x^{t+1} q + \frac{t+1}{2} a x^2 r , \dots , x^s q + \frac{s(s-1) \dots (t+1)}{(s-t+1)!} a x^{s-t+1} r \\ xp + (t-1) xq , r \end{gathered} \right.$$

$$\text{c)} \qquad p , q , xq , \dots , x^{s-1} q , x^s q + ayr , 2xp + syq , r$$

Dovremo quindi associare ai singoli sottogruppi intransitivi [IV]-[VIII] ciascuno dei quattro gruppi precedenti. Ma è agevole vedere come non tutte queste combinazioni diano luogo a gruppi distinti. Otteniamo insomma i gruppi seguenti:

$$[16, IV] \qquad p , q , xq , \dots , x^s q , xp + cyq , \psi_0(x, y) r , \psi_1(x, y) zr$$

[16, V]₁

$$p, q, xq, \ldots, x^t q, xp + cyq, \psi(x, y)r$$
$$\varphi_i(x) y^i zr, x^{r-1} y^{n+t-1} zr$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ t = 1, 2, \ldots, n_1;\ r = 1, 2, \ldots, m_t + \cdots + m_{n_1})$$

[16, V]₂

$$p, q, xq, \ldots, x^{s-1}q, x^s q + ayzr, 2xp + syq, \psi(x, y)r, \varphi(x)zr$$

[16, V]₃

$$p + ayzr, q, xq, \ldots, x^s q, xp - yq, \psi(x, y)r, \varphi(x)zr$$

[16, VI]₁

$$p, q, xq, \ldots, x^s q, xp + cyq, \psi(x, y)r, x^{i-1} y^{j-1} zr$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m_j + \cdots + m_n;\ m_t > s)$$

[16, VI]₂

$$p, q, xq, \ldots, x^{t-1}q, x^t q + axzr, \ldots, x^s q + \frac{s(s-1)\ldots(t+1)}{(s-t+1)!} ax^{s-t+1} zr$$
$$xp + (t-1)yq, \psi(x, y)r, x^{i-1} zr$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m < s-t+2)$$

[16, VI]₃

$$p, q, xq, \ldots, x^{s-1}q, x^s q + ayzr, 2xp + syq, \psi(x, y)r, x^{i-1} zr$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

[16, VI]₄

$$p + ayzr, q, xq, \ldots, x^s q, xp - yq, \psi(x, y)r, x^{i-1} zr$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

[16, VII]

$$p, q, xq, \ldots, x^s q, xp + cyq, \varphi_i(x) y^i r, \varphi(x) zr$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

[16, VIII]₁

$$p, q, xq, \ldots, x^s q, xp + cyq, \varphi_i(x) y^i r, x^j zr$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, n-1)$$

[16, VIII]₂

$$p, q, xq, \ldots, x^{t-1}q, x^t q + axzr,$$
$$x^{t+1}q + \frac{t+1}{2} ax^{2}zr, \ldots, x^s q + \frac{(t+1)\ldots(s-1)s}{(s-t+1)!} ax^{s-t+1} zr$$
$$xp + (t-1)yq, \varphi_i(x) y^i r, x^j zr$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, m-1 < s-t+1)$$

[17] **Gruppo accorciato:** $p, q, xp, yq, xq, \dots, x^sq \quad (s > 0)$.

100. — Basterà aggiungere una trasf. inf. della forma

$$xp + [\alpha_1(x, y)z + \alpha_1(x, y)]r$$

ai gruppi testè determinati partendo dal gruppo [16], e, naturalmente, prenderemo le mosse dai tipi dove c ha un valore generico (cioè non nullo o intero). Otteniamo così i gruppi:

[17, I] $\qquad p, q, xp + azr, yq + bzr, xq, \dots, x^sq, \psi(x, y)r$

[17, II]₁ $\qquad p, q, xp + azr, yq + bzr, xq, \dots, x^sq, \varphi_j(x)y^jr \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$

[17, II]₂
$$p, q, xp - tzr, yq + [(n+1)z + by^n]r,$$
$$xq, \dots, x^{t-1}q, x^tq + ay^nr, x^{t+i}q + \binom{t+i}{i} ax^iy^nr$$
$$\varphi_j(x)y^jr$$
$$(i = 1, 2, \dots, s-t\,;\ j = 0, 1, \dots, n-1)$$

[17, II]₃ $\qquad p, q, xp + [az + a_1y^n]r, yq + nzr, xq, \dots, x^sq, \varphi_j(x)y^jr \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$

[17, II]₄ $\qquad p, q, xp + ay^nr, yq + [nz + by^n]r, xq, \dots, x^sq, \varphi_j(x)y^jr \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$

[17, IV] $\qquad p, q, xp, yq, xq, \dots, x^sq, \psi_0(x, y)r, \psi(x, y)zr$

[17, V] $\qquad p, q, xp, yq, xq, \dots, x^sq, \psi(x, y)r, \varphi_i(x)y^izr, x^{l-1}y^{n+t-1}zr$
$$(i = 0, 1, \dots, n-1\,;\ t = 1, 2, \dots, n_1\,;\ l = 1, 2, \dots, m_t + \dots + m_{n_1}\,;\ m_t > s)$$

[17, VI] $\qquad p, q, xp, yq, xq, \dots, x^sq, \psi(x, y)r, x^{l-1}y^{t-1}zr$
$$(t = 1, 2, \dots, n\,;\ l = 1, 2, \dots, m_t + \dots + m_{n_1}\,;\ m_t < s)$$

[17, VII]

$$p\,,\,q\,,\,xp\,,\,yq\,,\,xq\,,\,\dots\,,\,x^s q\,,\,\varphi_i(x)y^i r\,,\,\varphi(x)zr$$
$$(i=0,1,\dots,n-1)$$

[17, VIII]

$$p\,,\,q\,,\,xp\,,\,yq\,,\,xq\,,\,\dots\,,\,x^s q\,,\,\varphi_i(x)y^i r\,,\,x^j zr$$
$$(i=0,1,\dots,n-1\,;\;j=0,1,\dots,m-1)$$

[18] **Gruppo accorciato**: $p\,,\,2xp+syq\,,\,x^2p+sxyq\,,\,q\,,\,\dots\,,\,x^s q \qquad (s>0)$.

101. — I gruppi corrispondenti a questo gruppo accorciato si otterranno, ponendo $2c=s$ nei gruppi relativi al gruppo accorciato [16] e aggiungendo una trasf. inf. della forma

$$x^2p+sxyq+[\alpha_2 z+\alpha_2]r\,.$$

Otteniamo così i gruppi:

$[18, I]_1$

$$p\,,\,2xp+syq+azr\,,\,x^2p+sxyq+axzr\,,\,q\,,\,xq\,,\,\dots\,,\,x^s q$$
$$\psi(x\,,\,y)r$$

$[18, I]_2$

$$p\,,\,xp+yq+azr\,,\,x^2p+2xyq+2[ax+by]zr\,,$$
$$q\,,\,xq+bzr\,,\,x^2q+2bxzr\,,\,\psi(x\,,\,y)r$$

$[18, II]_1$

$$p\,,\,2xp+syq+[az+a_1y^n]r\,,\,x^2p+sxyq+[axz+axy^n]r$$
$$q\,,\,xq\,,\,\dots\,,\,x^s q\,,\,\varphi_i(x)y^i r$$
$$(i=0,1,\dots,n-1)$$

$[18, II]_2$

$$p\,,\,2xp+syq+syq+[(ns-2)z+ay^n]r\,,$$
$$x^2p+sxyq+[(ns-2)xz+axy^n+by^n]r$$
$$q\,,\,xq\,,\,\dots\,,\,x^s q\,,\,\varphi_i(x)y^i r$$
$$(i=0,\dots,n-1)$$

$[18, II]_3$

$$p\,,\,xp+yq+[n-1]zr\,,\,x^2p+2xyq+[2(n-1)xz+ay^n]r$$
$$q\,,\,xq+bzr\,,\,x^2q+2bxzr\,,\,\varphi_i(x)y^i r$$
$$(i=0,1,\dots,n-1)$$

Pei *gruppi di terza specie* il gruppo generatore è riducibile in generale alla forma

a) $p\,,\, 2xp + syq\,,\, x^2p + sxyq + axr\,,\, q\,,\, \dots\,,\, x^sq\,,\, r\,;$

e inoltre, pei valori particolari $s = 1\,,\, 2$, alla forma

b) $p\,,\, 2xp + yq\,,\, x^2p + xyq + [ax + by^2]r\,,\, q\,,\, xq + 2byr\,,\, r$

c) $p\,,\, xp + yq\,,\, x^2p + 2xyq + [ax + by]r\,,\, q\,,\, xq\,,\, x^2q + bxr\,,\, r\,;$

onde otteniamo i gruppi seguenti:

[18, IV] $p\,,\, 2xp + syq\,,\, x^2p + sxyq\,,\, q\,,\, xq\,,\, \dots\,,\, x^sq\,,\, \psi_0(x\,,\, y)r\,,\, \psi_1(x\,,\, y)zr$

[18, V]$_1$ $$p\,,\, 2xp + syq\,,\, x^2p + sxyq\,,\, q\,,\, xq\,,\, \dots\,,\, x^sq\,,\, \psi(x\,,\, y)r\,,\, \varphi_i(x)y^izr \quad (i=0,1,\dots,n-1)$$

[18, V]$_2$ $$p\,,\, 2xp + yq\,,\, x^2p + sxyq + by^2zr\,,\, q\,,\, xq + 2byzr \\ \psi(x\,,\, y)r\,,\, \varphi(x)zr$$

[18, V]$_3$ $$p\,,\, xp + yq\,,\, x^2p + 2xyq + byzr\,,\, q\,,\, xq\,,\, x^2q \\ \psi(x\,,\, y)r\,,\, \varphi(x)zr$$

[18, VI]$_1$ $$p\,,\, 2xp + syq\,,\, x^2p + sxyq + axzr\,,\, q\,,\, xq\,,\, \dots\,,\, x^sq \\ \psi(x\,,\, y)r\,,\, zr$$

[18, VI]$_2$ $$p\,,\, 2xp + yq\,,\, x^2p + xyq + [ax + by^2]zr\,,\, q\,,\, xq + 2byzr \\ \psi(x\,,\, y)r\,,\, zr$$

[18, VI]$_3$ $$p\,,\, xp + yq\,,\, x^2p + 2xyq + [ax + by]zr\,,\, q\,,\, xq\,,\, x^2q + bxzr \\ \psi(x\,,\, y)r\,,\, zr$$

[18, VII] $$p\,,\, 2xp + syq\,,\, x^2p + sxyq\,,\, q\,,\, xq\,,\, \dots\,,\, x^sq \\ \varphi_i(x)y^ir\,,\, \varphi(x)zr \quad (i=0,1,\dots,n-1)$$

[18, VIII]

$$p\,,\,2xp+syq\,,\,x^2p+sxyq\,,\,q\,,\,xq\,,\,\dots\,,\,x^sq$$
$$\varphi_i(x)y^ir\,,\,zr$$
$$(i=0,1,\dots,n-1)$$

[19] **Gruppo accorciato:** $p\,,\,xp\,,\,yq\,,\,x^2p+sxyq\,,\,q\,,\,xq\,,\,\dots\,,\,x^sq\,,\qquad(s>0)$.

102. — Partendo sia dal gruppo [17] sia dal gruppo [18], troviamo i gruppi seguenti:

[19, I]

$$p\,,\,xp+azr\,,\,yq+bzr\,,\,x^2p+sxyq+\{2a+sb\}xzr\,,$$
$$q\,,\,xq\,,\,\dots\,,\,x^sq\,,\,\psi(x,y)r$$

[19, II]$_1$

$$p\,,\,xp+azr\,,\,yq+bzr\,,\,x^2p+sxyq+\{2a+sb\}xzr$$
$$q\,,\,xq\,,\,\dots\,,\,x^sq\,,\,\varphi_i(x)y^ir$$
$$(i=0,1,\dots,n-1)$$

[19, II]$_2$

$$p\,,\,xp+ay^nr\,,\,yq+\{nz+by^n\}r\,,\,x^2p+sxyq+\{nxz+(2a+sb)xy^n\}r$$
$$q\,,\,xq\,,\,\dots\,,\,x^sq\,,\,\varphi_i(x)y^ir$$
$$(i=0,1,\dots,n-1)$$

[19, II]$_3$

$$p\,,\,xp-zr\,,\,yq+(n+1)zr\,,\,x^2p+sxyq+\left(\{(n+1)s-2\}xz+\frac{s}{n+1}y^{n+1}\right)r$$
$$q\,,\,xq+y^nr\,,\,x^2q+2xy^nr\,,\,\dots\,,\,x^sq+sx^{s-1}y^nr\,,\,\varphi_i(x)y^ir$$
$$(i=0,1,\dots,n-1)$$

[19, II]$_4$

$$p\,,\,xp-zr\,,\,yq+nzr\,,\,x^2p+sxyq+(\{ns-2\}xz+cy^n)r$$
$$q\,,\,xq\,,\,\dots\,,\,x^sq\,,\,\varphi_i(x)y^ir$$
$$(i=0,1,\dots,n-1)$$

[13, IV]

$$p\,,\,xp\,,\,yq\,,\,x^2p+sxyq\,,\,q\,xq\,,\,\dots\,,\,x^sq\,,\,\psi_0(x,y)r\,,\,\psi_1(x,y)zr$$

[19, V]

$$p\,,\,xp\,,\,yq\,,\,x^2p+sxyq\,,\,q\,,\,xq\,,\,\dots\,,\,x^sq\,,\,\psi(x,y)r\,,\,\varphi_i(x)y^izr$$
$$(i=0,1,\dots,n-1)$$

[19, VI] $$p\,,\ xp\,,\ yq\,,\ x^2p + sxyq + axzr\,,\ q\,,\ \ldots\,,\ x^sq\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ zr$$

[19, VII] $$p\,,\ xp\,,\ yq\,,\ x^2p + sxyq\,,\ q\,,\ xq\,,\ \ldots\,,\ x^sq\,,\ \varphi_i(x)y^ir\,,\ \varphi(x)zr \quad (i=0,1,\ldots,n-1)$$

[19, VIII] $$p\,,\ xp\,,\ yq\,,\ x^2p + sxyq + axzr\,,\ q\,,\ xq\,,\ \ldots\,,\ x^sq\,,\ \varphi_i(x)y^ir\,,\ zr \quad (i=0,1,n-1)$$

[20] **Gruppo accorciato:** $p + q\,,\ xp + yq\,,\ x^2p + y^2q$.

103. — I gruppi accorciati considerati sin qui erano contenuti ciascuno in uno dei successivi, talchè potemmo valerci mano mano delle determinazioni già compiute per le nuove determinazioni. Incontreremo fra poco un'altra catena siffatta di gruppi. Intanto il gruppo che qui consideriamo fa, in qualche modo, parte a sè stesso.

Gioverà anzitutto ridurre il nostro gruppo ad una forma più maneggevole nel calcolo; scegliendo a tale scopo come nuova y la $y - x$, il gruppo [20] diventa

$$p\,,\ xp + yq\,,\ x^2p + y|2x + y|q\,;$$

cosicchè dovremo in primo luogo determinare i gruppi (*di seconda specie*) aventi la forma

$$p + |\alpha_0 z + \alpha_0|r\,,\ xp + yq + |\bar{\alpha}_1 z + \alpha_1|r\,,\ x^2p + y|2x + y|q + |\bar{\alpha}_2 z + \alpha_2|r\,,\ \theta(x\,.\,y)r\,,$$

dove le $\alpha_i\,,\alpha_i$ sono funzioni di $x\,,y$ da determinarsi e θ è o una funzione arbitraria o una funzione (dipendente da infinite costanti arbitrarie) definita da un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali.

In ogni caso, mediante una opportuna trasformazione della forma:

$$x' = x\,,\ y' = y\,,\ z' = z\lambda(x\,,y) + \mu(x\,.\,y)$$

si può far sì che siano simultaneamente nulle $\alpha_0\,,\alpha_0$ e α_1. Allora α_2 deve soddisfare alle relazioni

$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial x} = 0\,,\ x\frac{\partial\alpha_2}{\partial x} + y\frac{\partial\alpha_2}{\partial y} = \alpha_2\,.$$

onde risulta, per una certa costante a,

$$\alpha_2 = ay \,.$$

Nel caso, in cui θ sia funzione arbitraria, otteniamo un gruppo che nelle primitive variabili sarà

$$[20\,,\mathrm{I}] \qquad p + q \,,\, xp + yq \,,\, x^2p + y^2q + a[y - x]zr \,,\, \psi(x\,,y)r$$

Supponiamo in secondo luogo che la θ sia definita da un certo sistema (S) di equazioni lineari alle derivate parziali. Allora in base alle

$$(p\,,\theta r) = \theta_x r \,,\, (xp + yq + \alpha_1 r \,,\theta r) = [x\theta_x + y\theta_y]r$$
$$(x^2p + [2x + y]yq + [ayz + \alpha_2]r \,,\theta r) = [x^2\theta_x + [2x + y]y\theta_y - ay\theta]r \,,$$

concludiamo che il sistema (S) deve ammettere insieme con ogni sua soluzione particolare θ, anche le

$$\theta_x \,,\, x\theta_x + y\theta_y \,,\, x^2\theta x + [2x + y]y\theta_y - ay\theta \,.$$

Le due prime condizioni implicano che le equazioni di (S) siano della forma (n. 72)

$$\sum_{m,n} a_{m,n} y^{m+n} \frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 \,, \tag{67}$$

dove le $a_{m,n}$ sono costanti determinate; cosicchè noi dovremmo determinare i più generali sistemi di equazioni della forma (67) che ammettono la terza trasf. inf. (66). Ma, come risulta già da un caso particolare cui accenneremo tra breve, codesti sistemi non sono integrabili in termini finiti, cosicchè noi, rinunciando senz'altro al caso generale, tratteremo qualche caso particolare notevole.

Notiamo che la terza condizione (66) richiede che il sistema (S) comprenda, insieme con ogni sua equazione

$$F(\theta) = 0 \,,$$

anche la

$$F(x^2\theta_x + [2x + y]\, y\theta_y - ay\theta) = 0$$

ossia, come risulta sviluppando e tenendo conto delle prime due condizioni, (66),

$$F_{2\cdot 0}Dx + 2yF_{1\cdot 0}Dy + yF_{0\cdot 1}Dy + 2F_{1\cdot 1}Dy + F_{0\cdot 2}Dy - aF_{0\cdot 1} - yF_{1\cdot 0}Dy = 0$$

Applicando questa trasformazione ad un' equazione della forma (67) troviamo che il sistema (S) deve contenere anche l' equazione

$$\sum_{m,n} \{ (m+1)(m+2n)a_{m+1 \cdot n} + (n+1)(n-a)a_{m \cdot n+1} + \\ + 2(m+1)a_{m+1 \cdot n-1} + (n-m)a_{m \cdot n} \} y^{m+n} \frac{\partial^{m+n}\theta}{\partial x^m \partial y^n} = 0 \, . \tag{68}$$

Per esaurire un caso particolare notevole supponiamo che le θ siano definite da un' unica equazione del 2.° ordine, la quale sarà della forma

$$y^2[a_{20}\theta_{2\cdot 0} + a_{11}\theta_{1\cdot 1} + a_{02}\theta_{0\cdot 2}] + y[a_{10}\theta_{1\cdot 0} + a_{01}\theta_{0\cdot 1}] + a_{00}\theta = 0 \, ; \tag{69}$$

allora, tenuto conto della (68), in conseguenza della (69) dovrà sussistere l' equazione

$$y^2[-2a_{20}\theta_{2\cdot 0} + 4a_{20}\theta_{1\cdot 1} + 2(a_{11} + a_{02})\theta_{0\cdot 2}] + \\ + y\{(2a_{20} - a\,a_{11} - a_{10})\theta_{1\cdot 0} + (2a_{10} + a_{01} + 2a_{11} + 2[1-a]a_{0}\,)\theta_{01} - a\,a_{01}\theta = 0 \, , \tag{70}$$

il che richiede che, per un certo fattore c (che, può anche esser nullo) si abbia

$$(c+2)a_{20} = 0 \qquad ca_{10} = 2a_{20} - a\,a_{11} - a_{10} \qquad ca_{00} = -a\,a_{01}$$
$$ca_{11} = 4a_{20} \qquad ca_{01} = 2a_{11} + 2a_{10} + a_{01} + 2[1-a]a_{20}$$
$$ca_{02} = 2a_{11} + 2a_{02}$$

Se $a_{20} \gtrless 0$, si trova

$$a_{11} = -2a_{\cdot 0} \, , \, a_{02} = a_{2\cdot 0} \, , \, a_{10} = -2(a+1)a_{20} \, , \, a_{01} = 2(a+1)a_{20} \, , \, a_{00} = a(a+1)a_{20} \, ;$$

se invece $a_{20} = 0$, e la (70) non è una identità, risulta

$$a_{11} = 0 \, , \, a_{10} = 0 \, , \, a_{01} = -2[a-1\,a_{02} \, , \, a_{00} = a[a-1]a_{02} \, ;$$

e infine se la (70) è una identità

$$a_{20} = 0 \, , \, a_{02} = -a_{11} \, , \, a_{10} = -a\,a_{11} \, , \, a_{01} = 0 \, .$$

Abbiamo così tre tipi di equazioni lineari alle derivate parziali del 2.° ordine, invarianti rispetto al nostro gruppo: cioè le equazioni

a) $\quad y^2[\theta_{20} - 2\theta_{11} + \theta_{02}] + 2(a+1)y[\theta_{01} - \theta_{10}] + a[a+1]\theta = 0$

b) $\quad y^2\theta_{02} - 2[a-1]y\theta_{01} + a[a-1]\theta = 0$

c) $\quad y^2[\theta_{11} - \theta_{02}] - ay\theta_{10} + b\theta = 0 \, .$

Ora l'equazione *c*) non pare integrabile, in generale, in termini finiti; mentre è facile vedere che le equazioni *a*), *b*) ammettono come soluzione generale rispettivamente

$$\varphi_0(x+y)y^{-a}\,,\ \varphi_1(x+y)y^{-a-1}$$

e

$$\varphi_0(x)y^{a}\,,\ \varphi_1(x)y^{a-1}$$

dove, per l'una e per l'altra, le φ_0, φ_1 sono funzioni ***arbitrarie*** e ***indipendenti*** del rispettivo argomento.

Analogamente, se si cercano le equazioni invarianti del 3.° ordine, si trovano quattro tipi di equazioni, due dei quali sono analoghi alle *a*) e *b*) ed integrabili facilmente, mentre gli altri due non sembrano integrabili in termini finiti.

Così, generalizzando, abbiamo, accanto a casi non riducibili ad una forma tipica esplicita, due tipi di determinazioni delle θ, cioè le

$$\varphi_0(x+y)y^{-a}\,,\ \varphi_1(x+y)y^{-a-1}\,,\ \ldots\,,\ \varphi_n(x+y)y^{-a-n} \tag{71}$$

e le

$$\varphi_0(x)y^{a}\,,\ \varphi_1(x)y^{a-1}\,,\ \ldots\,,\ \varphi_{11}(x+y)y^{a-n}\,. \tag{72}$$

Ma se, ponendo $y' = x + y\,,\ x' = x$, torniamo alle primitive variabili, vediamo che i due casi (71) e (72) si scambiano fra loro con lo scambio delle x, y'; talchè basterà considerare soltanto uno dei due casi p. es. il caso (72).

Allora dalla

$$(p\,,\ xp + yq + \alpha_1 r) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} r$$

ricaviamo che deve essere

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \equiv 0$$

rispetto al modulo (72); onde risulta che la α_1 è indipendente da x, e si potrà ridurre a zero senza alterare la forma delle altre trasf. inf. del gruppo. Dopo ciò l'alternata

$$(p\,,\ x^2p + [2x + y]yq + [ayz + \alpha_2]r) = 2xp + 2yq + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} r$$

ci dice che anche α_2 è congruo ad una funzione indipendente dalla x; e la

$$(xp + yq\,,\ x^2p + [2x + y]yq + [ayz + \alpha_2]r) = x^2p + [2x + y]yq + \left[ayz + y\frac{d\alpha_2}{dy}\right]r$$

implica

$$y\frac{d\alpha_2}{dy} \equiv \alpha_2 \qquad [\text{mod. } (72)];$$

ossia, tenuto conto della indipendenza di α_2 da x

$$(73) \qquad y\frac{d\alpha_2}{dy} = \alpha_2 + \sum c_i y^{a-i}.$$

Di qui risulta, per valori generali di a,

$$\alpha_2 \equiv by$$

e si ha eccezione soltanto se, essendo h un numero intero fra 0 ed n (estremi compresi) si ha

$$a = h;$$

giacchè allora risulta

$$(74) \qquad \alpha_2 \equiv y[b_0 + b_1 \log y].$$

Nel caso generale, in quanto sarà $a \lessgtr 0$, basterà assumere come nuova z la

$$z + \frac{b}{a}$$

per ridurre $b = 0$; talchè, tornando alle primitive variabili, avremo il gruppo

$$[20, \text{II}]_1 \qquad p + q,\ xp + yq,\ x^2p + y^2q + a[y - x]zr,\ \varphi_i(x)[y - x]^{a-i}r \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

Se poi è $a = h$ ed $h > 0$ nella espressione (74) di α_2 si può senz'altro supporre $b_0 = 0$, talchè avremo

$$[20, \text{II}]_2 \quad p + q,\ xp + yq,\ x^2p + y^2q + (h[y - x]z + b \log[y - x])r,\ \varphi_i(x)[y - x]^{h-i}r \quad (i = 0, 1, \cdots, n;\ 0 < h < n)$$

Infine se $a = 0$, troviamo

$$[20, \text{II}]_3 \quad p + q,\ xp + yq,\ x^2p + y^2q + [y - x](b_0 + b_1 \log[y - x])r,\ \varphi_i(x)[y - x]^{-i}r \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

104. — Si trova agevolmente che il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie* è dato da

$$p+q\,,\ xp+yq\,,\ x^2p+y^2q+[ax+by]r\,,\ r$$

cosicchè otteniamo i tipi:

[20, IV] $$p+q\,,\ xp+yq\,,\ x^2p+y^2q\,,\ \psi_0(x,y)r\,,\ \psi_1(x,y)zr$$

[20, V] $$p+q\,,\ xp+yq\,,\ x^2p+y^2q\,,\ \psi(x,y)r\,,\ \varphi_i(x)[y-x]^{-i}zr \quad (i=0,1,\dots,n)$$

[20, VI] $$p+q\,,\ xp+yq\,,\ x^2p+y^2q+[ax+by]zr\,,\ \psi(x,y)r\,,\ zr$$

[20, VII] $$p+q\,,\ xp+yq\,,\ x^2p+y^2q+n[y-x]zr\,,\ \varphi_i(x)[y-x]^ir\,,\ \varphi(x)zr \quad (i=0,1,\dots,n)$$

[20, VIII] $$p+q\,,\ xp+yq\,,\ x^2p+y^2q+[ax+n(y-x)]zr\,,\ \varphi_i(x)[y-x]^ir\,,\ zr \quad (i=0,1,\dots,n)$$

[21] Gruppo accorciato: $q\,,\ xq\,,\ \alpha_1(x)q\,,\ \dots,\ \alpha_s(x)q$.

105. — Con questo gruppo si inizia l'ultima categoria di gruppi, della cui determinazione dobbiamo occuparci in questo capitolo.

Un gruppo di seconda specie si può ridurre senz'altro alla forma

$$q\,,\ xq+[\beta_0z+\bar\beta_0]r\,,\ \alpha_i(x)q+[\beta_iz+\bar\beta_i]r\,,\ \theta(x,y)r \quad (i=1,2,\dots,s)$$

dove le β_i, $\bar\beta_i$ sono indipendenti da z e le β_i sono indipendenti anche da y. Se la θ è arbitraria, si ha il gruppo

[21, I] $$q\,,\ xq+\beta_0(x)zr\,,\ \alpha_1(x)q+\beta_1(x)zr\,,\ \dots,\ \alpha_s(x)q+\beta_s(x)zr\,,\ \psi(x,y)r$$

Supponiamo in secondo luogo che la θ sia definita da un sistema (S) di equazioni lineari alle derivate parziali. Codesto si-

stema (S) dovrà esser tale che, se θ è una qualsiasi soluzione di (S), debbono pur esser tali le

$$\theta_y \ , \ x\theta_y - \beta_0\theta \ , \ \alpha_i\theta_y - \beta_i\theta \ . \tag{75}$$

Dalla prima di queste condizioni risulta che il sistema (S) deve essere riducibile a coefficienti indipendenti da y. Inoltre, se

$$F(\theta) = 0 \tag{76}$$

è un' equazione di (S), ogni soluzione del sistema deve pur soddisfare all' equazione

$$F(x\theta_y - \beta_0\theta) = 0 \, ,$$

ossia, sviluppando,

$$xFD_y(\theta) + F_{1\cdot 0}D_y(\theta) - \sum_{i=0}^{h} \frac{1}{i!}\beta_0^{(i)}F_{1\cdot 0}(\theta) = 0 \, ,$$

dove h rappresenta l' ordine della F rispetto alla D_x, e le $F_{i.0}$ sono le derivate fuuzionali della F rispetto alla D_x, mentre poniamo

$$\beta_0^{(i)} = \frac{d^i\beta_0}{dx^i} \ .$$

Ma si ha

$$FD_y(\theta) = 0 \, ,$$

cosicchè concludiamo che il sistema (S) deve contenere, insieme con ogni equazione (76), anche la

$$F_{10}D_y(\theta) - \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{i!}\beta_0^{(i)}F_{i\cdot 0}(\theta) = 0 \, , \tag{77}$$

la quale è manifestamente di ordine non superiore all' ordine h di F.

È poi chiaro che la (77) può essere *identicamente* soddisfatta solo nel caso in cui sia identicamente nulla la $F_{1\cdot 0}$, il che richiede che la (76) *non contenga nessuna derivazione rispetto ad* x.

Ciò posto, immaginiamo ridotto il sistema (S) alla forma canonica del Tresse e al solito consideriamo fra le equazioni di ordine minimo quella, in cui la derivata principale è di indice minimo rispetto ad x. Sia quest' equazione

$$D_{x^q}D_{y^{p-q}}(\theta) - G(\theta) = 0 \tag{78}$$

dove G indica una forma differenziale di ordine p al più, nella quale le derivate di ordine p hanno, rispetto ad x, un indice minore di q.

Applicando alla (78) il procedimento stesso con cui dalla (76) si passa alla (77), otteniamo l'equazione

$$q\, D_{x^{q-1}} D_{y^{p-q+1}}(\theta) - G_{10} D_y(\theta) + \ldots = 0\,, \tag{79}$$

dove tutti i termini non scritti sono di ordine inferiore a p. Ora notiamo che in quanto la G è di ordine non superiore a p e i suoi eventuali termini di ordine p sono, rispetto ad x, di ordine minore di q, la (79) è al più dell'ordine p ed è già ridotta alla forma canonica del TRESSE, ammettendo come derivata principale la

$$D_{x^{q-1}} D_{y^{p-q+1}}\,.$$

Ma questa conclusione contraddice all'ipotesi che la (78) sia, fra le equazioni d'ordine minimo quella in cui è pur minimo l'indice della derivata principale rispetto ad x. Dovrà dunque essere necessariamente $q = 0$ e otteniamo un'equazione della forma

$$D_{y^p}(\theta) - G(\theta) = 0 \tag{80}$$

dove G è una forma differenziale lineare *d'ordine minore di* p (in quanto l'equazione ha la forma canonica del TRESSE).

Applicando alla (80) il procedimento con cui si passa dalla (76) alla (77), otteniamo l'equazione

$$G_{1\cdot 0} D_y(\theta) - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i!} \beta_0^{(i)} G_{i\cdot 0}(\theta) = 0\,; \tag{81}$$

la quale, essendo di ordine inferiore a p, deve essere soddisfatta ***identicamente***, giacchè, in caso contrario, avremmo in (S), contro l'ipotesi, un'equazione d'ordine inferiore a p. Ma il fatto che la (81) sia soddisfatta identicamente ci dice, come notammo dapprincipio, che la G non implica nessuna derivata rispetto ad x; onde concludiamo che fra le equazioni d'ordine minimo del sistema (S) vi è un'equazione della forma

$$\frac{\partial^p \theta}{dy^p} = \sum_{n=0}^{p-1} \lambda_n(x) \frac{\partial^n \theta}{\partial y^n}\,. \tag{82}$$

Ora la soluzione generale di quest'equazione è data da un in-

sieme lineare di funzioni, di cui un sistema fondamentale ha la forma

$$\varphi_i(x)y^i\ ,\ \varphi_{s\,.\,j}(x)y^s e^{\gamma_j(x)y} \qquad (i=0,1,\ldots,n-1\ ;\ j=1,\ldots,k\ ;\ s=0,1,\ldots,n_j-1) \tag{83}$$

dove le φ_i, $\varphi_{s\,.\,i}$ sono funzioni arbitrarie e indipendenti, e le γ_j sono funzioni determinate di x. Mancano le $\varphi_i y^i$ sempre e solo quando nella (82) sia $\lambda_0 \lesseqgtr 0$. E notiamo che l'insieme lineare (83) è trasformato in sè stesso da tutte le trasf. inf. del nostro gruppo.

Di qui risulta che la soluzione generale del nostro sistema (S) sarà della forma

$$\theta = \sum_i \mu_i(x)y^i + \sum_{j,s} \mu_{j\,.\,s}(x)y^s e^{\gamma_j(x)y}\ ,$$

dove le μ_i, $\mu_{j\,.\,s}$ saranno funzioni x, variabili ciascune in un insieme lineare; e questi vari insiemi lineari potranno essere legati (a priori non possiamo escluderlo) da mutue corrispondenze, in modo che, fissate, nei rispettivi insiemi, le determinazioni di alcune fra le μ_i, $\mu_{s\,.\,j}$ restino fissate (univocamente o no) le determinazioni delle altre.

A me non è riuscito di assodare se, come appar verosimile, codeste corrispondenze siano, in generale, assolutamente indeterminate e tanto meno di ridurle ad una forma tipica generale. Perciò considererò il caso in cui le μ_i e le $\mu_{j\,.\,s}$ sono fra loro mutuamente indipendenti.

In base alle

$$(q\,,\mu_i y^i r) = i\mu_i y^{i-1} r\ ,\ (xq + [\beta_0 z + \bar\beta_0]r\ ,\ \mu_i y^i r) = [ix - \beta_0 y]\mu_i y^{i-1} r\ ,$$
$$(\alpha_j q + [\beta_j z + \bar\beta_j]r\ ,\ \mu_i y^i r) = [i\alpha_j - \beta_j y]\mu_i y^{i-1} r\ ,$$

concludiamo in primo luogo che il coefficiente di y^i ammette tutte le determinazioni del coefficiente di y^{i+1} ed eventualmente altre ancora. In secondo luogo, se le β_j non sono tutte costanti, tutte le μ_i, in quanto ammettono i moltiplicatori β_j, saranno arbitrarie. Se poi le β_j sono tutte costanti, le μ_i possono, almeno da un certo indice in poi, ammettere ciascuna soltanto un numero finito di determinazioni linearmente indipendenti. — Se le

$$\sigma_{n\,.\,l}(x) \qquad (l = 1, 2, \ldots, m_n)$$

costituiscono un sistema fondamentale di determinazioni del coeffi-

ciente della massima potenza y^{n-1} di y, il coefficiente di y^{n-2} ammetterà le determinazioni

$$\sigma_{n,l} \;, \quad x\sigma_{n,l} \;, \quad \alpha_1\sigma_{n,l} \;, \ldots , \quad \alpha_s\sigma_{n,l} \qquad (l=1,2,\ldots,m_n);$$

e accanto a queste altre ne potrà ammettere *proprie* dell'esponente $n-2$

$$\sigma_{n-1,l}(x) \qquad\qquad (l=1,2,\ldots,m_{n-1}) \;.$$

Così continuando vediamo che le $\mu_i y^i$ saranno della forma

$$\sigma_{l,j}\, x^u \alpha_1^{u_1} \alpha_2^{u_2} \ldots \alpha_s^{u_s} y^{i-1} \tag{84}$$
$$(i=1,2,\ldots,n\,;\; l=i,i+1,\ldots,n\,;\; j=1,2,\ldots,m_l\,;\; u+u_1+u_2+\cdots+u_s=0,1,\ldots,l-i).$$

Può anche accadere che da un certo esponente in giù i coefficienti delle potenze di y siano arbitrarie e allora troviamo il seguente sistema fondamentale di determinazioni delle $\mu_i y^i$:

$$\varphi_l(x) y^{l-1} \;, \quad \sigma_{l,j} x^u \alpha_1^{u_1} \alpha_2^{u_2} \ldots \alpha_s^{u_s} y^{u+i-1} \tag{85}$$
$$(l=1,2,\ldots,n\,;\; i=1,2,\ldots,n_1\,;\; l=i,i+1,\ldots,n_1\,;\; j=1,2,\ldots,m_l\,;\; u+u_1+\cdots+u_s=0,1,\ldots,l-i)$$

Passando alle

$$\mu_{j,t}(x) y^s e^{\gamma_j(x) y} \,,$$

teniamo conto delle

$$\left\{\begin{aligned} &\left(q \,, \mu_{j,t} y^s e^{\gamma_j y} r\right) = [t + \gamma_j y]\, \mu_{j,t} y^{t-1} e^{\gamma_j y} r \,, \\ &\left(xq + [\beta_0 z + \overline{\beta}_0]\, r \,, \mu_{j,t} y^t e^{\gamma_j y} r\right) = \left(x[t + \gamma_j y] - \beta_0 y\right) \mu_{j,t} y^{t-1} e^{\gamma_j y} r \,, \\ &\left(\alpha_i q + [\beta_i z + \overline{\beta}_i]\, r \,, \mu_{j,t} y^t e^{\gamma_j y} r\right) = \left(\alpha_i [t + \gamma_j y] - \beta_i y\right) \mu_{j,t} y^{t-1} e^{\gamma_j y} r \,. \end{aligned}\right. \tag{86}$$

Dalla prima di queste alternate discende che se una γ_j è funzione di x, le corrispondenti $\mu_{j,s}$, per ogni valore di s, sono tutte arbitrarie. E se anche una γ_j è costante ed è, p. es., $\gamma_1 = c$, risulta dalle due ultime alternate (86) che le $\mu_{1,t}$ sono ancora arbitrarie salvo il caso in cui sia, per certe costanti determinate b_i,

$$\beta_0 = cx + b_0 \quad , \quad \beta_i = c\alpha_i + b_i :$$

e allora basta porre

$$z' = z e^{-cy}$$

per ridurre $c = 0$; talchè le $\mu_{1,t}$ avranno la stessa forma trovata dianzi (84).

In conclusione le determinazioni di θ ammetteranno nel nostro caso un sistema fondamentale della forma:

$$\varphi_t(x)y^{t-1}\ , \quad \varphi_{h,k}(x)y^{k-1}e^{\gamma_h(x)y} \tag{87}$$
$$(t=1,2,\dots,n\ ;\ h=1,2,\dots,q\ ;\ k=1,2,\dots,k_h\ ;)$$

$$\sigma_{l,j}(x)x^u\alpha_1^{u_1}\dots\alpha_s^{u_s}y^{n+i-1}\ , \tag{88}$$
$$(i=1,2,\dots,n_1\ ;\ l=i,i+1,\dots,n_1\ ;\ j=1,2,\dots,m_l\ ;\ u+u_1+\dots+u_s=0,1,\dots,l-1)$$

E dobbiamo ricordare che se le β_i non sono tutte costanti, mancano completamente le (88). In quest' ultimo caso si trova senza difficoltà il gruppo seguente, ed un caso particolare del gruppo $[21\,,\mathrm{II}]_3$ che determineremo fra poco:

$$[21\,,\mathrm{II}]_1 \qquad \left|\begin{array}{c} q\,,\ xq+\beta_0(x)zr\,,\ \alpha_i(x)q+\beta_i(x)zr \\ \varphi_t(x)y^{t-1}r\ ,\ \varphi_{h,n}(x)y^{k-1}e^{\gamma_h(x)y}r \\ (i=1,2,\dots,s\ ;\ t=1,2,\dots,n\ ;\ h=1,2,q\ ;\ k=1,2,3,k_h) \end{array}\right|$$

Nel caso generale si trovano i gruppi:

$$[21\,,\mathrm{II}]_2 \qquad \left|\begin{array}{c} q\,,\ xq+b\,zr\,,\ \alpha_1(x)q+b_1zr\,,\dots,\ \alpha_s(x)q+b_szr \\ \varphi_t(x)y^{t-1}r\ ,\ \varphi_{h,k}(x)y^{k-1}e^{\gamma_h(x)y}r \\ (t=1,2,\dots,n\ ;\ h=1,2,q\dots,k=1,2,\dots,k_h) \\ \sigma_{lj}(x)x^u\alpha_1^{u_1}\dots\alpha_s^{u_s}y^{n+i-1}r\ , \\ (i=1,2,\dots,n_1\ ;\ l=i,i+1,\dots,n_1\ ;\ j=1,2,\dots,m_l\ ;\ u+u_1+\dots+u_s=0,1,\dots,l-i) \end{array}\right|$$

$$[21\,,\mathrm{II}]_3 \qquad \left|\begin{array}{c} q\,,\ xq+\beta_0(x)y^nr\,,\ \alpha_1(x)q+\beta_1(x)y^nr\,,\dots,\ \alpha_s(x)q+\beta_s(x)y^nr\,, \\ \varphi_t(x)y^{t-1}r\ ,\ \varphi_{hk}(x)y^{k-1}e^{\gamma_h(x)y}r\,, \\ \sigma_{lj}(x)x^u\alpha_1^{u_1}\dots\alpha_s^{u_s}y^{n+i-1}r\,, \\ (c\cdot s) \end{array}\right|$$

Pei *gruppi di terza specie* il gruppo generatore è

$$q\,,\ xq+\beta_0(x)r\,,\ \alpha_i(x)q+\beta_i(x)r\,,\ r\ ;$$

cosicchè otteniamo i tipi:

$$[21\,,\mathrm{VI}] \qquad |\ q\,,\ xq\,,\ \alpha_1(x)q\,,\dots,\ \alpha_s(x)q\,,\ \psi_0(x,y)r\,,\ \psi_1(x,y)zr\ |$$

[21, V]$_1$

$$q\,,\ xq\,,\ \alpha_1(x)q\,,\ \dots,\ \alpha_s(x)q\,,\ \psi(x\,,y)r$$
$$\varphi_t(x)y^{t-1}zr\,,\ \varphi_{hk}(x)y^{k-1}e^{\gamma_h(x)y}zr\,,\ \sigma_{lj}(x)x^u\alpha_1^{u_1}\dots\alpha_s^{u_s}y^{n+i-1}zr$$
$$(c\cdot s)$$

[21, V]$_2$

$$q\,,\ xq+\beta_0(x)zr\,,\ \alpha_1(x)q+\beta_1(x)zr\,,\ \dots,\ \alpha_s(x)q+\beta_s(x)zr\,,\ \psi(x\,,y)r$$
$$\varphi_{h,k}(x)y^{k-1}e^{\gamma_h(x)y}zr\,,\ \sigma_{lj}(x)x^u\alpha_1^{u_1}\dots\alpha_s^{u_s}y^{i-1}zr$$
$$(h=1,2,\dots,q\,;\ k=1,2,\dots,k_h\,;\ i=1,2,\dots,n\,;\ l=i,i+1,\dots,n\,;$$
$$j=1,2,\dots,m_l\,;\ u+u_1+\dots+u_s=0,1,\dots,l-i)$$

[21, VI]

$$q\,,\ xq+\beta_0(x)zr\,,\ \alpha_1(x)q+\beta_1(x)zr\,,\ \dots,\ \alpha_s(x)q+\beta_s(x)zr\,,\ \psi(x\,,y)r$$
$$\sigma_{l,j}(x)x^u\alpha_1^{u_1}\dots\alpha_s^{u_s}y^{i-1}zr$$
$$(i=1,2,\dots,n\,;\ l=i,i+1,\dots,n\,;\ j=1,2,\dots,m_l\,;\ u+u_1+\dots+u_s=0,1,\dots,l-i)$$

[21, VII]

$$q\,,\ xq\,,\ \alpha_1(x)q\,,\ \dots,\ \alpha_s(x)q\,,\ \varphi_{i,j}(x)y^je^{\gamma_i(x)y}r\,,\ \varphi(x)zr$$
$$(i=1,2,\dots,h\,;\ j=0,1,\dots,m_h)$$

[21, VIII]

$$q\,,\ xq+\beta_0(x)zr\,,\ \alpha_1(x)q+\beta_1(x)zr\,,\ \dots,\ \alpha_s(x)q+\beta_s(x)zr$$
$$\varphi_{ij}(x)y^je^{\gamma_i(x)y}r\,,\ \sigma_l(x)zr\,,\ zr$$
$$(i=1,2,\dots,h\,;\ j=0,1,\dots,m_h\,;\ l=1,2,\dots,k)$$

[22] **Gruppo accorciato**: $q\,,\ xq\,,\ \alpha_1(x)q\,,\ \dots,\ \alpha_s(x)q\,,\ yq$.

106. — Aggiungiamo ai gruppi or ora determinati una trasf. inf.

$$yq+[\eta_1(x\,,y)z+\eta_2(x\,,y)]r\,.$$

Quando si considera un gruppo di seconda specie

$$q\,,\ xq+[\beta_0z+\overline{\beta}_0]r\,,\ \alpha_i(x)q+[\beta_iz+\overline{\beta}_i]r\,,\ \theta(x\,,y)r$$

dalla

$$(q\,,\ yq+[\eta_1z+\eta_2]r)=q+\left[\frac{\partial\eta_1}{\partial y}z+\frac{\partial\eta_2}{\partial y}\right]r$$

ricaviamo

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial y}=0\,;$$

e allora, in base alle

$$(xq + [\beta_0 z + \bar\beta_0]r\,,\, yq + [\eta_1 z + \eta_2]r) = xq + \left[x\frac{\partial\eta_2}{\partial y} + \bar\beta_0\eta_1 - y\frac{\partial\bar\beta_0}{\partial y} - \beta_0\eta_2\right]r$$

$$(\alpha_i q + [\beta_i z + \bar\beta_i]r\,,\, yq + [\eta_1 z + \eta_2]r) = \alpha_i q + \left[\alpha_i\frac{\partial\eta_2}{\partial y} + \bar\beta_i\eta_1 - y\frac{\partial\bar\beta_i}{\partial y} - \beta_i\eta_2\right]r$$

concludiamo $\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$: talchè otteniamo anzitutto il gruppo:

$$[20,1] \qquad q\,.\,xq\,,\,\alpha_1(x)q\,,\ldots,\,\alpha_s(x)yq\,,\,yq + z\eta(x)r\,,\,\psi(x\,,y)r$$

In secondo luogo, se la θ è definita da un sistema (S) di equazioni alle derivate parziali, si trova, come al n. prec., che essa ha la forma

$$\theta = \sum \mu_i(x)y^i + \sum_{j\,,s} \mu_{js}(x)y^s e^{\gamma_j(x)y}\,,$$

in quanto il gruppo contiene le

$$q\,,\,xq + \ldots\,,\,\alpha_i(x)r + \ldots;$$

ma, in base alla

$$(yq + [\eta_1 z + \eta_2]r\,,\,\theta(x\,,y)r) = [y\theta_y - \eta_1\theta]r$$

concludiamo che deve essere

$$(89) \qquad y\theta_y - \eta_1\theta = 0 \qquad [\text{mod. } \theta];$$

il che implica che debbono essere identicamente nulle tutte le γ_j, cosicchè la θ sarà un polinomio in y. E di più iterando la (89) troviamo che debbono appartenere all'insieme delle θ le infinite funzioni

$$\sum (i - \eta_1)^t \mu_i y^i \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots),$$

onde si conclude che le varie μ_i sono fra loro indipendenti. Se poi la η_1 non è costante abbiamo senz'altro che ciascuno di codesti coefficienti è una funzione arbitraria, talchè le θ saranno date dalle

$$(90) \qquad \varphi_i(x)y^i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1):$$

mentre, nel caso in cui la η_1 è costante, potremo avere, oltre le (90),

altre determinazioni, in numero finito, della θ, aventi la forma (cfr. n. prec.)

$$\sigma_{lj}(x) x^u \alpha_1^{u_1} \ldots \alpha_s^{u_s} y^{n+i-1}$$

$$(i=1,2,\ldots,n_1\,;\ l=i,i+1,\ldots,n_1\,;\ j=1,2,\ldots,m_l\,;\ u+u_1+\cdots+u_s=0,1,\ldots,l-i)$$

Così, corrispondentemente al gruppo $[21, \mathrm{II}]_3$, si trovano agevolmente i gruppi:

$[22, \mathrm{II}]_1$

$$q\,,\ xq+\beta_0(x)y^n r\,,\ \alpha_h(x)q+\beta_h(x)y^n r\,,\ yq+[(n+1)z+\eta(x)y^n]r$$
$$\varphi_t(x)y^t r\,,\ \sigma_{lj}(x)x^u \alpha_1^{u_1} \ldots \alpha_s^{u_s} y^{n+i-1} r$$
$$(h=1,2,\ldots,s\,;\ t=0,1,\ldots,n-1\,;\ i=1,2,\ldots,n_1\,;\ l=i,i+1,\ldots,n_1\,;\ j=1,2,\ldots,m_l\,;\ u+u_1+\cdots+u_s=0,1,\ldots,l-i)$$

$[22, \mathrm{II}]_2$

$$q\,,\ xq\,,\ \alpha_1(x)q\,,\ \ldots\,,\ \alpha_s(x)q\,,\ yq+[az+\eta(x)y^n]r$$
$$\varphi_t(x)y^t r\,,\ \sigma_{lj}(x)x^u \alpha_1^{u_1} \ldots \alpha_s^{u_s} y^{n+i-1} r$$
$$(c \cdot s)$$

$[22, \mathrm{II}]_3$

$$q\,,\ xq\,,\ \alpha_1(x)q\,,\ \ldots\,,\ \alpha_1(x)q\,,\ yq+[\eta(x)z+\eta_1(x)y^n]r$$
$$\varphi_t(x)y^t r$$
$$(t=0,1,\ldots,r-1)$$

Pei *gruppi di terza specie* il gruppo generatore è

$$q\,,\ xq\,,\ \alpha_1(x)q\,,\ \ldots\,,\ \alpha_s(x)q\,,\ yq+\eta(x)r\,,\ r:$$

talchè otteniamo i gruppi seguenti:

$[22, \mathrm{IV}]$

$$q\,,\ xq\,,\ \alpha_1(x)q\,,\ \ldots\,\alpha_s(x)q\,,\ yq\,,\ \psi_0(x,y)r\,,\ \psi(x,y)zr$$

$[22, \mathrm{V}]$

$$q\,,\ xq\,,\ \alpha_1(x)q\,,\ \ldots\,,\ \alpha_s(x)q\,,\ yq\,,\ \psi(x,y)r$$
$$\varphi_t(x)y^t zr\,,\ \sigma_{lj}(x)x^u \alpha_1^{u_1} \ldots \alpha_s^{u_s} y^{n+i-1} zr$$
$$(c \cdot s)$$

$[22, \mathrm{VI}]$

$$q\,,\ xq\,,\ \alpha_1(x)q\,,\ \ldots\,,\ \alpha_s(x)q\,,\ yq+\eta(x)zr\,,\ \psi(x,y)r$$
$$\sigma_{lj}(x)x^u \alpha_1^{u_1} \ldots \alpha_s^{u_s} y^{n+i-1} zr$$
$$(c \cdot s)$$

[22 , VII] $\quad q\,,\, xq\,,\, \alpha_1(x)q\,,\, \dots\,,\, \alpha_s(x)q\,,\, yq\,,\, \varphi_j(x)y_j r\,,\, \varphi(x)zr \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$

[22 , VIII] $\quad q\,,\, xq\,,\, \alpha_1(x)q\,,\, \dots\,,\, \alpha_s(x)q\,,\, yq + \eta(x)zr\,,\, \varphi_j(x)y^j r\,,\, zr\,,\, \sigma_i(x)zr \quad (j = 0, 1, \dots, n-1\,;\; i = 1, 2, h)$

[23] **Gruppo accorciato:** $p\,,\, x^j e^{a_i x} q \qquad (i = 1\,, \dots ,\, k\,;\, j = 0\,, 1\,, \dots ,\, m_i)$

107. — Un *gruppo di seconda specie* si riduce senza difficoltà alla forma

$$p\,,\, x^j e^{a_i x} q + [\beta_{ij}(x\,,y)z + \bar\beta_{ij}(x\,,y)]r\,,\, \theta(x\,,y)r\,.$$

In base alla

$$\left(p\,,\, e^{a_1 x} q + [\beta_{10}z + \bar\beta_{10}]r\right) = a_1 e^{a_1 x} q + \left[\frac{\partial\beta_{10}}{\partial x}z + \frac{\partial\bar\beta_{10}}{\partial x}\right]r$$

troviamo

$$\frac{\partial\beta_{10}}{\partial x} = a\beta_{10}\,,\quad \beta_{10} = \gamma(y)e^{a_1 x}\,,$$

talchè, ponendo

$$z' = z - \int\gamma dy\,,$$

si riduce $\beta_{10} = 0$ senza alterare la p e la forma delle altre trasf. inf. del gruppo.

Ciò posto, le alternate

$$\left(e^{a_1 x} q\,,\, x^j e^{a_i x} q\,[\beta_{ij}z + \bar\beta_{ij}]r\right) = e^{a_1 x}\left[z\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial y} + \frac{\partial\bar\beta_{ij}}{\partial y}\right]r$$

ci dicono che le β_{ij} sono indipendenti dalla y; e dalle

$$\left(p\,,\, x^j e^{a_i x} q + [\beta_{ij}z + \bar\beta_{ij}]r\right) = [a_i x^j + jx^{j-1}]e^{a_i x} q + \left[z\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial\bar\beta_{ij}}{\partial x}\right]r$$

ricaviamo

$$\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial x} = a_i\beta_{ij} + j\beta_{i,j-1}\,;$$

cosicchè, posto

$$\beta_{ij} = \pi_{ij}e^{a_i x}\,,$$

risulta subito che le π_{ij} costituiscono, per ciascun valore dell' indice i, una successione di polinomi dell' APPELL

$$\pi_{ij} = c_{i_0} x^j + \binom{j}{1} c_{i \cdot 1} + \dots + \binom{j}{j-1} c_{i \cdot j-1} x + c_{i \cdot j}$$

dove le c_{ij} sono costanti determinate e la $c_{1 \cdot 0}$ è nulla.

Così, nel caso in cui la θ sia arbitraria, otteniamo il gruppo

$$[23, \text{I}] \quad \left| \begin{array}{c} p, e^{a_i x} \left\{ x^j q + \left[c_{i_0} x^j + \binom{j}{1} c_{i_1} x^{j-1} + \dots + \binom{j}{j-1} c_{i \cdot j-1} x + c_{ij} \right] z r \right\}, \psi(x, y) r \\ (i = 1, 2, \dots, k \ ; \ j = 0, 1, \dots, m_i) \end{array} \right|$$

Supponiamo in secondo luogo che la θ sia definita da un sistema (S) di equazioni lineari alle derivate parziali. Avremo un gruppo della forma

$$p, e^{a_i x} \left\{ x^j q + \pi_{ij} z r \right\} + \beta_{ij} r, \ \theta(x, y) r,$$

dove le $\pi_{1j}, \pi_{2j}, \dots, \pi_{kj}$ costituiscono altrettante successioni di polinomi dell' APPELL. Assumendo per un momento come nuova y la $y e^{-a_1 x}$, si annulla la a_1, mentre la p diventa $p - a_1 y q$; e le altre trasf. inf. non mutano forma.

Avremo dunque nel gruppo trasformato le

$$x^j q + [z \pi_{1j} + \bar{\beta}_{1 \cdot j}] r,$$

talchè potremo ripetere le considerazioni del n. 105, fino a concludere che le θ debbono essere della forma

$$\theta = \sum \mu_i(x) y^i + \sum \mu_{sj}(x) y^s e^{\gamma_j(x) y};$$

e se si torna alle primitive variabili, la forma delle θ non muta.

Ma qui, tenendo conto della p, si conclude, in più, che le γ_j che compaiono negli esponenziali sono tutte costanti; altrimenti, a moltiplicare un medesimo esponenziale, avremmo, iterando la p, infinite potenze di y; e in conclusione la forma delle θ sarà

$$\theta = \sum \mu_i(x) y^i + \sum \mu_{sj}(x) y^s e^{b_j y},$$

dove ciascuna delle μ_i, μ_{sj} è variabile in un insieme lineare di fun-

zioni. Nel caso in cui codeste μ_i, μ_{sj} sono fra loro indipendenti, si trova, sulle tracce del n. 105, che la θ ammetterà un sistema fondamentale della forma

$$\varphi_i(x)y^i\,,\ \varphi_{si}(x)y^s e^{b_j y}\,, \tag{91}$$
$$(i=0,1,\ldots,n-1\,;\ j=1,2,\ldots,k\,;\ s=0,1,\ldots,m_i)$$

se i polinomi π_{ij} non sono tutti nulli. Se poi codesti polinomi sono tutti nulli potremo avere per la θ, oltre le (91), altre determinazioni in numero finito, aventi la forma

$$x^u e^{(h_{l_j}+u_1 a_1+\cdots+u_k a_k)x} y^{n+t-1}$$
$$(t=1,2,\ldots,n_1\,;\ l=t,t+1,\ldots,n_1\,;\ j=1,2,\ldots,r_l\,;\ u+u_1+\cdots+u_k=0,1,\ldots,l-i+m_{l_j})$$

Ma la presenza di queste ultime funzioni, mentre in generale non ha influenza alcuna sulle $\overline{\beta}_{i.j}$, può per particolari valori delle costanti h_{lj} e a_i e degli interi v_l, introdurre termini aggiuntivi, che è facile calcolare quando codesti valori siano numericamente dati, ma che è praticamente impossibile ridurre ad una forma tipica generale. Perciò ci limiteremo a condurre a termine i calcoli sotto l'ipotesi che la θ ammetta soltanto le determinazioni (91). Allora, in base alla

$$\left[e^{a_1 x}q\,,\ xje^{a_i x}q+\left[z\pi_{ij}e^{a_i x}+\overline{\beta}_{ij}\right]r\right)=e^{a_1 x}\frac{\partial\overline{\beta}_{ij}}{\partial y}\,r\,,$$

si conclude, tenuto conto del fatto che l'insieme delle θ è tale che con ogni particolare sua determinazione contiene il prodotto di essa per una funzione arbitraria di x,

$$\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial y}\equiv 0 \qquad [\text{mod. } (91)],$$

ossia, supposto che non manchino le $\varphi_i y^i$,

$$\beta_{ij}\equiv\eta_{ij}(x)y^n\,.$$

Ma allora dalla

$$\left(p\,,\ xje^{a_i x}q+\left[z\pi_{ij}e^{a_i x}+\eta_{ij}y^n\right]r\right)=\left[a_i x+j\right]x^{j-1}e^{a_i x}q+$$
$$+\left[z(\pi'_{ij}+a_i\pi_{ij})e^{a_i x}+\frac{\partial\eta_{ij}}{\partial x}y^n\right]r$$

si ricava

$$\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial x} = a_i \eta_{ij} + j \eta_{i.j-1} \,,$$

ossia

$$\eta_{ij} = e^{a_i x} \pi_{ij} = e^{a_i x} \left[c_{i_0} x^j + \binom{j}{1} c_{i1} x^{j-1} + \dots + \binom{j}{j-1} c_{i.j-1} x + c_{ij} \right] .$$

Resta infine da tener conto della

$$\left(e^{a_i x} [x^j q + (z\pi_{ij} + y^n \bar{\pi}_{ij}) r] \,, e^{a_u x} [x^v q + (z\pi_{uv} + y^n \bar{\pi}_{uv}) r] \right) \equiv y^n [\bar{\pi}_{ij} \pi_{uv} - \pi_{ij} \bar{\pi}_{uv}] \,,$$

la quale ci dice che deve essere

$$\bar{\pi}_{ij} \pi_{uv} - \pi_{ij} \bar{\pi}_{uv} = 0 \,.$$

Avremo quindi o $\pi_{ij} = 0$ per ogni coppia degli indici i, j, oppure

$$\bar{\pi}_{ij} = c \pi_{ij} \,;$$

e in quest' ultimo caso basta assumere come nuova z la

$$z + cy^n$$

per ridurre simultaneamente a zero tutti i $\bar{\pi}_{ij}$ senza alterare la forma delle trasf. inf. del gruppo.

Otteniamo così i due gruppi:

$$[23, \text{II}]_1 \quad \left| \begin{array}{c} p \,, e^{a_i x} \left\{ x^j q + z \left[c_{i_0} x^j + \binom{j}{1} c_{i1} x^{j-1} + \dots + \binom{j}{j-1} c_{i.j-1} x + c_{ij} \right] r \right\} \\ \varphi_l(x) y^{l-1} r \,, \; \varphi_{uv}(x) y^v e^{b_u y} r \\ (i = 1, 2, \dots, k \,;\; j = 0, 1, \dots, m_i \,;\; l = 1, 2, \dots, n \,;\; u = 1, 2, \dots, h \,;\; v = 0, 1, \dots, n_u) \end{array} \right|$$

$$[23, \text{II}]_2 \quad \left| \begin{array}{c} p \,, e^{a_j x} \left\{ x^j q + y^n \left[c_{i0} x^j + \binom{j}{1} c_{i1} x^{j-1} + \dots + \binom{j}{j-1} c_{i.j-1} x + c_{ij} \right] r \right\} \\ \varphi_l(x) y^l r \,, \; \varphi_{u.v}(x) y^v e^{b_u y} r \\ (c \cdot s) \end{array} \right|$$

Se poi mancano le $\varphi_l y^l$ si trova, con le stesse considerazioni precedenti, oltre un caso particolare di $[23, \text{II}]_1$, il gruppo:

$$[23, \text{II}]_3 \quad \left| \begin{array}{c} p \,, e^{a_i x} \left\{ x^j q + \left[c_{i_0} x^j + \binom{j}{1} c_{i1} x^{j-1} + \dots + \binom{j}{j-1} c_{i.j-1} x + c_{ij} \right] r \right\} \\ \varphi_{uv}(x) y^v e^{b_u y} r \\ (c \cdot s) \end{array} \right.$$

I *gruppi di terza specie* il cui gruppo generatore è

$$p\,,\ e^{a_i x} \left\{ x^j q + \left[c_{i_0} x^j + \binom{j}{1} c_{i\cdot 1} x^{j-1} + \dots + \binom{j}{j-1} c_{i\cdot j-1} x + c_{ij} \right] r \right\}\,,\ r\,,$$

sono riducibili ai tipi seguenti:

[23, IV]

$$p\,,\ x^j e^{a_i x} q\,,\ \psi_0(x,y) r\,,\ \psi_1(x,y) zr$$
$$(i=1,2,\dots,k\ ;\ j=0,1,\dots,n_i)$$

[23, V]

$$p\,,\ e^{a_i x} \left\{ x^j q + z \left[c_{i0} x^j + \binom{j}{1} c_{i_1} x^{j-1} + \dots + \binom{j}{j-1} c_{i\cdot j-1} x + c_{ij} \right] r \right\}\,,\ \psi(x,y) r\,,$$
$$\varphi_p(x) y^{p-1} zr\,,\ \varphi_{qr}(x) y^q e^{b_r y} zr\,,\ x^u e^{[h_{lw} + u_1 a_1 + \dots + u_k a_k]x} y^{n+t-1} zr$$
$$\left(\begin{matrix} i=1,2,\dots,k\ ;\ j=0,1,\dots,m_i\ ;\ p=1,2,\dots,n\ ;\ r=1,2,\dots,h\ ;\ q=0,1,\dots,q_h\ ;\ t=1,2,\dots,n_1\ ; \\ l=t,t+1,\dots,n_1\ ;\ w=1,2,\dots,v_l\ ;\ u+u_1+\dots+u_k=0,1,\dots,l-i+m_{lw} \end{matrix}\right)$$

[23, VI]

$$p\,,\ e^{a_i x} \left\{ x^j q + z \left[c_{i_0} x^j + \binom{j}{1} c_{i_1} x^{j-1} + \dots + \binom{j}{j-1} c_{ij-} x + c_{ij} \right] r \right\}\,,\ \psi(x,y) r$$
$$x^u e^{[h_{lw} + u_1 a_1 + \dots + u_k a_k]x} y^{n+t-1} zr$$
$$(c\cdot s\cdot)$$

[23, VII]

$$p\,,\ x^j e^{a_i x} q\,,\ \varphi_{s\cdot t}(x) y^s e^{b_t y} r\,,\ \varphi(x) zr$$
$$(i=1,2,\dots,k\ ;\ j=0,1,\dots,m_j\ ;\ t=1,2,\dots,h\ ;\ s=0,1,\dots,n_t)$$

[23, VIII]

$$p\,,\ e^{a_i x} \left\{ x^j q + z \left[c_{i_0} x^j + \binom{j}{1} c_{i_1} x^{j-1} + \dots + \binom{j}{j-1} c_{i\cdot j-1} x + c_{ij} \right] r \right\}$$
$$\varphi_{s\cdot t}(x) y^s e^{b_t y} r\,,\ zr\,,\ x^u e^{c_v x} zr$$
$$(i=1,2,\dots,k\ ;\ j=0,1,\dots,m_i\ ;\ t=1,2,\dots,h\ ;\ s=0,1,\dots,n_t\ ;\ v=1,2,\dots,l\ ;\ u=0,1,\dots,u_v)$$

[24] **Gruppo accorciato**: $p\,,\ q\,,\ yq\,,\ xq\,,\ \dots,\ x^m q\,,\ x^j e^{a_i x} q$.

108. — Aggiungeremo una trasf. inf.

$$yq + [\eta_1(x,y) z + \eta_2(x,y)] r$$

a ciascuno dei gruppi determinati or ora, ponendovi $a_1 = 0$; e per avere un controllo dei nostri risultati, potremo anche aggiungere una trasf. inf.

$$p + [\alpha_1(x,y) z + \alpha_2(x,y)] r$$

a ciascuno dei gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [22]. Il *gruppo di seconda specie* massimo è

$$[24\,,\,\mathrm{I}] \qquad \boxed{p\,,q\,,xq\,,\ldots,x^m q\,,x^j e^{a_i x} q\,,yq + czr\,,\psi(x\,,y)r}$$

Se la $\theta(x\,,y)$ nelle trasf. inf. θr è definita da un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali si dimostra (cfr. nn. 105, 107) che le sue determinazioni costituiscono o un insieme della forma

$$(92) \qquad \varphi_i(x)y^{i-1}$$

$$(93) \qquad x^u e^{[hl_j + u_1 a_1 + \cdots + u_k a_k]x} y^{n+t-1}$$
$$(t=1,2,\ldots,n_1\,;\ l=t,t+1,\ldots,n_1\,;\ j=1,2,\ldots,r_l\,;\ u+u_1+\cdots+u_k=0,1,\ldots,l-t+m_{l_j})$$

o un insieme lineare contenuto in un insieme siffatto. Limitatamente al caso, in cui la θ ammette esclusivamente le determinazioni (92), si trovano i due gruppi

$$[24\,,\,\mathrm{II}]_1 \qquad \begin{array}{|c|} p\,,x\,,\ldots,x^m q\,,x^j e^{a_i x} q\,,yq + [cz + c_1 y^n]r\,,\varphi_l(x)y^l r \\ (i=1,2,\ldots,k\,;\ j=0,1,\ldots,m_i\,;\ l=0,1,\ldots,n-1) \end{array}$$

$$[24\,,\mathrm{II}]_2 \quad \begin{array}{|c|} p\,,xq + y^n\left[ic_1 x^{i-1} + \binom{i}{2}c_2 x^{i-2} + \cdots + \binom{i}{i-1}c_{i-1}x + c_i\right]r \\ e^{a_j x}\left\{x^l q + y^n\left[c_{j0}x^l + \binom{l}{1}c_{j1}x^{l-1} + \cdots + \binom{l}{l-1}c_{j\cdot l-1}x + c_{j\cdot l}\right]r\right\} \\ yq + [(n+1)z + ay^n]r\,,\varphi_u(x)y^{u-1}r \\ (i=0,1,\ldots,m\ j=1,2,\ldots,k\,;\ l=0,1,\ldots,m_j\,;\ u=1,2,\ldots,n) \end{array}$$

Infine i *gruppi di terza specie* sono riducibili ai tipi seguenti:

$$[24\,,\,\mathrm{IV}] \qquad \begin{array}{|c} p\,,q\,,xq\,,\ldots,x^m q\,,x^j e^{a_i x} q\,,yq\,,\psi_0(x\,,y)r\,,\psi_1(x\,,y)zr \\ (i=1,2,\ldots,k\,;\ j=0,1,\ldots,m_i) \end{array}$$

$$[24\,,\,\mathrm{V}] \quad \begin{array}{|c} p\,,q\,,xq\,,\ldots,x^m q\,,x^r e^{a_s x} q\,,yq\,,\psi(x\,,y)r \\ \varphi_i(x)y^{i-1}zr\,,x^u e^{[hl_j + u_1 a_1 + \cdots + u_k a_k]x} y^{n+t-1}zr \\ (s=1,2,\ldots,k\,;\ r=0,1,\ldots,m_j\,;\ i=1,2,\ldots,n\,;\ t=1,2,\ldots,n_1\,;\ l=t,t+1,\ldots,n_1\,;\ j=1,2,\ldots,v_l\,; \\ u+u_1+\cdots+u_h=0,1,\ldots,l-t+m_{l_j}) \end{array}$$

[24, VI]
$$p,\ q,\ xq,\ \dots,\ x^m q,\ x^r e^{a_s x} q,\ yq + cxzr,\ \psi(x,y)r$$
$$zr,\ x^u e^{[hl_j + u_1 a_1 + \dots + u_k a_k]x} y^{t-1} zr$$
$$(s=1,2,\dots,k;\ r=0,1,\dots,m_s;\ t=1,2,\dots,n;\ l=t,t+1,\dots,n;\ j=\ ,2,\dots,v_l;$$
$$u+u_1+\dots+u_k=0,1,2\dots,l-t+m_{lj})$$

[24, VII]
$$p,\ q,\ xq,\ \dots,\ x^m q,\ x^r e^{a_s x} q,\ yq,\ \varphi_l(x) y^{l-1} r,\ \varphi(x) zr$$
$$(s=1,2,\dots,k;\ r=0,1,\dots,m_s;\ l=1,2,\dots,n)$$

[24, VIII]
$$p,\ q,\ xq,\ \dots,\ x^m q,\ x^r e^{a_s x} q,\ yq + cxzr,\ \varphi_l(x) y^{l-1} r,\ zr,\ x^u e^{b_v x} zr$$
$$(t=1,2,\dots,k;\ r=0,1,\dots,m_s;\ l=1,2,\dots,n;\ v=1,2,h;\ u=0,1,\dots,n_v)$$

Capitolo IX.

Gruppi che ammettono un gruppo accorciato infinito imprimitivo.

109. — In quest' ultimo capitolo ci dobbiamo occupare di *quei guppi* (doppiamente imprimitivi) *che trasformano in sè stessa la solita stella di retta*

(1) $$x = \text{cost.}\ ,\ y = \text{cost.}$$

e inducono in essa un gruppo infinito imprimitivo, talchè permutano le une nelle altre ∞^1 superficie cilindriche a generatrici appartenenti alla stella (1).

Quanto al metodo di determinazione ci riferiamo senz' altro a quanto si disse in generale nel capitolo V. Qui, come gruppi accorciati, assumeremo successivamente i singoli gruppi infiniti imprimitivi in due variabili, quali furono determinati dal Lie (*); e poichè i rappresentanti tipici scelti da lui ammettono nel piano il fascio invariante di rette

(2) $$x = \text{cost.}$$

avremo, come al capitolo precedente, che *i gruppi, che noi qui ver-*

(*) *Untersuchungen über unendl. cont. Gruppen:* Cap. 1.

remo mano mano determinando, trasformeranno in sè simultaneamente la stella di rette (1) *e* ***il fascio di piani*** (2).

Riproduciamo senz'altro la tabella dei gruppi infiniti imprimitivi. In essa, secondo l'uso costantemente osservato in questo lavoro, indichiamo colle lettere greche le varie funzioni, con le lettere latine minuscole le costanti; di più le lettere φ e ψ designano ***funzioni arbitrarie*** rispettivamente di una o due variabili, mentre le altre lettere greche minuscole rappresentano funzioni determinate dei relativi argomenti.

I. — ***Gruppi che ammettono due schiere invarianti di curve*** ($x =$ cost. e $y =$ cost.).

[1] $\varphi(x)p$;

[2] $\varphi(x)p , q$;

[3] $\varphi(x)p , q$;

[4] $\varphi(x)p , q , yq , y^2q$;

[5] $\varphi_1(x)p , \varphi_2(x)q$.

II. — ***Gruppi che ammettono una sola schiera invariante di curve*** ($x =$ cost.).

A) *Gruppi intransitivi*

[6] $\varphi(x)q$;

[7] $\varphi(x)q , \alpha_1(x)yq , \dots , \alpha_s(x)yq$;

[8] $\varphi_0(x)q , \varphi_1(x)yq$;

[9] $\varphi_0(x)q , \varphi_1(x)yq , \varphi_2(x)y^2q$;

[10] $\psi(x , y)q$.

B) *Gruppi che inducono nella schiera invariante un gruppo* ∞^1.

[11] $\varphi(x)q , p$;

[12] $\varphi(x)q , p$;

[13] $\varphi_0(x)q , \varphi_1(x)yq , p$;

[14] $\varphi_0(x)q , \varphi_1(x)yq , \varphi_2(x)y\ q , p$;

[15] $\psi(x , y)q , p$.

C) *Gruppi che inducono nella schiera invariante un gruppo* ∞^2.

[16] $\varphi(x)q , p , xp + cyq$;

[17] $\varphi(x)q , yq , xyq , \dots , x^m yq , p , xp$;

[18] $\varphi_0(x)q , \varphi_1(x)yq , p , xp$;

[19] $\varphi_0(x)q , \varphi_1(x)yq , \varphi_2(x)y\ q , p , xp$;

[20] $\psi(x , y)q , p , xp$.

D) *Gruppi che inducono nella schiera invariante un gruppo* ∞^3.

[**21**] $\varphi(x)q\,,p\,,xp+cyq\,,x^2p+2cxyq$;

[**22**] $\varphi(x)q\,,yq\,,p\,,xp\,,x^2p+2cxyq$;

[**23**] $\varphi_0(x)q\,,\varphi_1(x)yq\,,p\,,xp\,,x^2p$;

[**24**] $\varphi_0(x)q\,,\varphi_1(x)yq\,,\varphi_2(x)y^2q\,,p\,,xp\,,x^2p$;

[**25**] $\psi(x\,,y)q\,,p\,,xp\,,x^2p$.

E) *Gruppi che inducono nella schiera invariante un gruppo* ∞^∞.

[**26**] $\varphi(x)q\,,\bar{\varphi}(x)p+c\bar{\varphi}'yq$;

[**27**] $\varphi(x)q\,,\bar{\varphi}(x)p+c\bar{\varphi}'yq\,,yq$;

[**28**] $\varphi_0(x)q\,,\varphi_1(x)yq\,,\bar{\varphi}(x)p$;

[**29**] $\varphi_0(x)q\,,\varphi_1(x)yq\,,\varphi_2(x)y^2q\,,\bar{\varphi}(x)p$;

[**30**] $\psi(x\,,y)q\,,\bar{\varphi}(x)p$.

[**31**] $\varphi(x)p+[y\varphi'+cy^3\varphi''']q$;

[**32**] $\varphi(x)p+y\varphi'q\,,yq$;

[**33**] $\varphi(x)p+\left[y\varphi'+\frac{1}{2}y^2\varphi''\right]q$.

Ciò premesso, iniziamo senz'altro la nostra determinazione, secondo il metodo indicato al n. 40 . Divideremo la trattazione in sei paragrafi, ordinatamente corrispondenti alle sei categorie, in cui dianzi furono distribuiti i gruppi in due variabili, che noi assumeremo successivamente come gruppi accorciati.

§ 1. — Gruppi che ammettono due fasci invarianti di piani.

Sono questi i gruppi corrispondenti ai gruppi accorciati [**1**]-[**5**]. Ove si tenga conto della forma di questi, risulta manifesto come la determinazione dei gruppi, di cui qui ci dobbiamo occupare, sia compiuta nella sua parte sostanziale, quando si conoscano i gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [**1**].

[1] Gruppo accorciato: $\varphi(x)p$.

110. — Cominciamo dal determinare i corrispondenti *gruppi di prima specie*, cioè quei gruppi, che, ottenuti prolungando [**1**], non contengono nessuna trasf. inf. che lasci ferma ogni singola retta della

stella invariante (1), o, in altre parole, nessuna trasf. inf. della forma

$$\alpha(x, y, z) r .$$

Un gruppo siffatto sarà della forma

$$\varphi(x) p + \zeta(x, y, z) r ,$$

dove la ζ è una funzione dipendente dalla φ; e la corrispondenza tra φ e ζ deve essere *univoca,* perchè, qualora ad una stessa determinazione di φ corrispondessero due diverse determinazioni ζ_1 e ζ_2 per ζ, il gruppo conterrebbe, contro l'ipotesi, la trasf. inf.

$$[\zeta_1 - \zeta_2] r .$$

Avremo allora

$$\zeta = A(\varphi) ,$$

dove A è una forma differenziale lineare

$$A(\varphi) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \alpha_i(x, y, z) \frac{d^i \varphi}{dx^i} .$$

Qui si tratta di determinare le funzioni α_i in modo che le trasf. inf.

$$\varphi(x) p + A(\varphi) r \tag{3}$$

generino un gruppo.

Combinando due trasf. inf. (3), troviamo

$$(\varphi p + A(\varphi) r , \varphi_1 p + A(\varphi_1) r) = [\varphi \varphi'_1 - \varphi_1 \varphi'] p +$$
$$+ [\varphi D_x A(\varphi_1) - \varphi_1 D_x A(\varphi) + A(\varphi) D_z A(\varphi_1) - A(\varphi_1) D_z A(\varphi)] r$$

onde risulta per la forma differenziale lineare A la equazione

$$A(\varphi \varphi'_1 - \varphi' \varphi_1) = \varphi D_x A(\varphi_1) - \varphi_1 D_x A(\varphi) + A(\varphi) D_z A(\varphi_1) - A(\varphi_1) D_z A(\varphi) ; \tag{4}$$

e noi dobbiamo appunto determinare la più generale forma differenziale A, che soddisfa a questa equazione funzionale.

Per $\varphi = 1$ la (3) dà

$$p + \alpha_0(x, y, z) r$$

e basta assumere come nuova z una soluzione della

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha_0 \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

per ridurre $\alpha_0 = 0$, qualora essa già non sia tale.

Ponendo allora nella (4) $\varphi = 1$, $A(1) = 0$, otteniamo per la A l'equazione funzionale

$$A\, D_x(\varphi_1) = D_x A(\varphi_1),$$

talchè concludiame che la A è commutabile con la D_x e perciò i suoi coefficienti sono indipendenti dalla x (*).

Ciò premesso, consideriamo le trasf. inf. (3) corrispondenti alle determinazioni $1, x, x^2$ di φ,

$$p\,, xp + \alpha_1 r\,, x^2 p + [2x\alpha_1 + \alpha_2] r\,, \tag{5}$$

le quali generano manifestamente un sottogruppo ∞^3 del nostro gruppo (3); e vediamo a quali forme esso sia riducibile.

Anzitutto se è $\alpha_1 = 0$, dalla alternata (si ricordi che le α_i sono tutte indipendenti da x)

$$(xp\,, x^2 p + \alpha_2 r) = x^2 p\,,$$

si conclude che anche α_2 è nulla e si ottiene una prima forma ridotta del gruppo (5), cioè la

$$p\,, xp\,, x^2 p\,. \tag{a}$$

Se poi $\alpha_1 \lessgtr 0$, assumendo come nuova z la

$$e^{\int \frac{dz}{\alpha_1}}$$

si riduce $\alpha_1 = z$; dopo di che combinando la trasf. inf. $xp + zr$ con la $x^2 p + [2xz + \alpha_2] r$, si trova che deve essere

$$z \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = 2\alpha_2$$

ossia

$$a_2 = \alpha(y) z^2\,.$$

(*) Cfr. Pincherle-Amaldi. *Op. cit.*, pag. 120.

Se $\alpha = 0$, otteniamo la forma ridotta

$$b) \qquad p\,,\, xp + zr\,,\, x^2p + 2xzr\,;$$

e se $\alpha \lesseqgtr 0$, basta assumere come nuova z la αz per ridurre $\alpha = 1$ e ottenere la terza forma ridotta possibile

$$c) \qquad p\,,\, xp + zr\,,\, x^2p + [2x + z]zr\,.$$

Esaminiamo ora partitamente i tre casi *a*) *b*) e *c*).

Nel caso *a*) abbiamo per la forma A

$$A(1) = 0\,,\; A(x) = 0\,,\; A(x^2) = 0$$

ossia

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0\,.$$

Ponendo allora nella equazione fondamentale (4)

$$\varphi = x\,,\; A(x) = 0\,,$$

otteniamo che, per ogni funzione φ_1, deve essere

$$A(x\varphi'_1) = xD_xA(\varphi_1) + A(\varphi_1)\,. \tag{6}$$

Si ricordi ora che per una formola fondamentale, che si può far risalire al D'Alembert, ma ebbe dal Pincherle le più eleganti applicazioni al *Calcolo funzionale* (*), si ha, per il prodotto $\mu\varphi$ di due funzioni qualsiasi di x,

$$A(\mu\varphi) = \mu A(\varphi) + \mu' A'(\varphi) + \frac{1}{2!}\mu'' A''(\varphi) + \dots + \frac{1}{n!}\mu^{(n)} A^{(n)}(\varphi)\,,$$

dove μ', μ'', ... sono le successive derivate di μ e A', A'', ..., $A^{(n)}$ sono le n *derivate funzionali* di A, cioè

$$\begin{cases} A'(\varphi) = \alpha_1\varphi + \alpha_2\varphi' + \frac{1}{2}\alpha_3\varphi'' + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\alpha_n\varphi^{(n-1)}\,, \\ A''(\varphi) = \alpha_2\varphi + \alpha_3\varphi' + \frac{1}{2}\alpha_4\varphi'' + \dots + \frac{1}{(n-2)!}\alpha_n\varphi^{(n-2)}\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^{(n)}(\varphi) = \alpha_n\varphi\,. \end{cases}$$

(*) Cfr. p. es. Pincherle-Amaldi, op. cit., pag. 107.

Allora sviluppando la (6), troviamo

$$xA(\varphi'_1) + A'(\varphi_1) = xD_x A(\varphi_1) + A(\varphi_1),$$

ossia, in base alla commutabilità di A e D_x,

$$A'D_x = A,$$

il che implica manifestamente che la A sia del 1.° ordine (al più). Ma poichè α_0, α_1 sono nulle, concludiamo che la A è identicamente nulla e il nostro gruppo, sotto l'ipotesi a), si riduce al gruppo in una sola variabile

$$\varphi(x)p.$$

III. — Passiamo ad esaminare il caso, in cui il nostro gruppo contenga il sottogruppo

$$b) \qquad p, xp + zr, x^2p + 2xzr;$$

o in altre parole il caso, in cui sia

$$A(1) = 0, A(x) = z, A(x^2) = 2xz$$

ossia

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = z, \alpha_2 = 0.$$

Ponendo allora nell'equazione (4)

$$\varphi = x, A(x) = z,$$

troviamo

$$A(x\varphi'_1) - A(\varphi_1) = xD_x A(\varphi_1) + zD_z A(\varphi_1)$$

ossia, sviluppando e riducendo,

$$(7) \qquad A'D_x(\varphi_1) = zD_z A(\varphi_1).$$

Poichè quest'equazione deve sussistere identicamente, cioè qualunque sia la funzione φ_1, dovremo avere, identificando i coefficienti,

$$z\frac{\partial \alpha_i}{\partial z} = i\alpha_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e quindi

$$(8) \qquad \alpha_i = z^i \gamma_i(y)$$

dove le γ_i sono funzioni determinate di y: in particolare sappiamo già essere

$$\gamma_1 = 1 , \gamma_2 = 0 .$$

Dopo ciò, ponendo nella (4)

$$\varphi = x^2 , A(x^2) = 2xz ,$$

otteniamo

$$A(x^2\varphi'_1) - 2A(x\varphi_1) = x^2 D_x A(\varphi_1) + 2xz D_z A(\varphi_1) - 2xA(\varphi_1) - 2z\varphi_1$$

ossia, sviluppando e tenendo conto della (7),

$$A'' D_x = 2A' - 2z D^0_x .$$

Questa identità funzionale, che scritta esplicitamente dà

$$\alpha_3\varphi_1'' + \frac{1}{2}\alpha_4\varphi_1''' + \dots + \frac{1}{(n-2)!}\alpha_n\varphi_1^{(n-1)} = 2\left[\frac{1}{2}\alpha_3\varphi_1'' + \frac{1}{3!}\alpha_4\varphi_1''' + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\alpha_n\varphi_1^{(n-1)}\right],$$

implica, per $i < 3$,

$$\alpha_i = 0 ;$$

talchè avremo

$$A = zD_x + \frac{1}{3!}\gamma_3(y)z^3 D^3_x .$$

Poichè si verifica agevolmente che questa forma A soddisfa alla (4), concludiamo che, corrispondentemente all'ipotesi di un sottogruppo b), si ha il gruppo

$$[1]_1 \qquad \varphi(x)p + \left[z\varphi' + \frac{1}{3!}\alpha(y)z^3\varphi'''\right]r$$

112. — Esaminiamo infine il caso in cui il gruppo contenga il sottogruppo

$$c) \qquad p , xp + zr , x^2p + [2x + z]zr ,$$

cioè il caso in cui sia

$$A(1) = 0 , A(x) = z , A(x^2) = [2x + z]z$$

ossia

$$\alpha_0 = 0 \,, \alpha_1 = z \,, \alpha_2 = z^2 \,.$$

Come al n. prec. sussisterà la (7) e avremo ancora per la α_i le espressioni (8): soltanto qui sarà

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1 \,.$$

Ciò posto, ponendo nella (4)

$$\varphi = x^2 \,, A(x^2) = [2x + z]z \,,$$

otteniamo

$$A(x^2\varphi'_1) - 2A(x\varphi_1) = x^2 D_x A(\varphi_1) + [2x + z]z D_z A(\varphi_1) - 2[x + z]A(\varphi_1) - 2z\varphi_1$$

ossia, sviluppando e tenendo conto della (7) e della commutabilità di A e D_x,

$$A'' D_x = 2A' + z^2 D_z A - 2zA - 2z D_x^0 \,.$$

Ora, identificando i coefficienti delle varie potenze di D_x nei due membri di quest'equazione, che deve sussistere per qualsiasi funzione φ_1, si trova, per $i > 2$,

$$z\alpha_i = \alpha_{i+1}$$

e in particolare $\alpha_n = 0$, talchè in ultima analisi risulta (*)

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_n = 0 \,,$$

e la forma A sarà del tipo

$$A = zD_x + \frac{1}{2} z^2 D_x^2 \,.$$

Si verifica facilmente che questa forma A soddisfa all'equazione fondamentale (4); onde otteniamo il gruppo in due sole variabili

$$[1]_2 \qquad \left| \varphi(x)p + \left[z\varphi' + \frac{1}{2} z^2\varphi'' \right] r \right| \,.$$

(*) Questa conclusione è legata in modo essenziale all'ipotesi che la A sia una forma d'ordine *finito*. Quando la A fosse d'ordine infinito, avremmo altri gruppi, i quali per altro non sarebbero più definiti da equazioni differenziali, ma da equazioni funzionali.

113. — Gruppi di seconda specie. — Si tratta dei gruppi che ammettono un sottogruppo intransitivo massimo (invariante) della forma

$$\theta(x, y)r,$$

dove θ è la soluzione generale di un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali. I due casi estremi si hanno quando θ sia arbitraria e quando θ ammetta un numero finito di determinazioni linearmente indipendenti.

In ogni caso, poichè escludiamo che il gruppo contenga trasf. inf. della forma λr, dove λ dipenda da z, le trasf. inf. del nostro gruppo saranno della forma [n. 41]

$$(9) \qquad \varphi(x)p + [z\zeta_1(x, y) + \zeta_2(x, y)]r$$

dove ζ_1, ζ_2 dipendono da φ e la ζ_1 è univocamente determinata, quando sia fissata la φ, giacchè in caso contrario avremmo nel gruppo, contro l'ipotesi, almeno una trasf. inf. della forma $z\alpha(x, y)r$.

Risulta di qui

$$\zeta_1 = A(\varphi)$$

dove A è una forma differenziale lineare

$$A = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \alpha_m(x, y) \frac{d^m\varphi}{dx^m}$$

a coefficienti indipendenti da z.

Quanto alla ζ_2, quando sia fissata la φ, risulterà determinata *a meno di una determinazione generica di* θ.

Ma occupiamoci anzitutto della A. Combinando due trasf. inf. (9) corrispondenti a due diverse funzioni $\varphi(x), \varphi_1(x)$, troviamo

$$(\varphi p + [zA(\varphi) + \dots]r, \varphi_1 p + [zA(\varphi_1) + \dots]r) = [\varphi\varphi'_1 - \varphi'\varphi]p + \\ + \{ z[\varphi D_x A(\varphi_1) - \varphi_1 D_x A(\varphi)] + \dots \} r$$

dove nei due membri i termini non scritti sono indipendenti da z. Risulta di qui che la A dovrà soddisfare alla equazione

$$A[\varphi\varphi'_1 - \varphi'\varphi_1] = \varphi D_x A(\varphi_1) - \varphi_1 D_x A(\varphi),$$

la quale è un caso particolare della (4).

Considerata la trasf. inf. del nostro gruppo, corrispondente alla determinazione $\varphi = 1$,

$$p + [\alpha_0 z + \beta_0] r$$

si può ridurre simultaneamente

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0$$

per mezzo di una trasformazione

$$x' = x \,,\; y' = y \,,\; z' = z\lambda(x\,,y) + \mu(x\,,y)\,,$$

la quale manifestamente non cambia la forma delle altre trasf. inf. del gruppo.

Dopo ciò, in base a considerazioni perfettamente analoghe a quelle del n. 111 si conclude che la A deve avere coefficienti indipendenti da x ed essere di ordine inferiore al 2.°, cosicchè, essendo $\alpha_0 = 0$, avremo

$$A = \alpha(y) D_x\,;$$

e il nostro gruppo sarà della forma

$$\varphi(x)p + [\alpha(y)z\varphi' + \zeta_2(x\,,y)]r \,,\; \theta(x\,,y)r\,.$$

Se la θ è arbitraria otteniamo il gruppo

$$[1\,,\mathrm{I}] \qquad \boxed{\varphi(x)p + z\alpha(y)\varphi' r \,,\; \psi(x\,,y)r}$$

dove α è una funzione determinata.

Supponiamo in secondo luogo che la θ sia definita da un sistema (S) di equazioni lineari alle derivate parziali ed esaminiamo anzitutto il caso, in cui il nostro gruppo è della forma

$$\alpha) \qquad \varphi(x)p + \zeta_2(x\,,y)r \,,\; \theta(x\,,y)r\,.$$

Poichè qui abbiamo in particolare le trasf. inf.

$$p \,,\; xp + \beta_1(x\,,y)r\,,$$

avremo, in base al n. 76, che le determinazioni della θ saranno della forma

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \underset{(i=0\,,1\,,\dots\,,n-1)}{\bar\varphi_i(y)x^i} \,,\qquad \underset{(j=1\,,2\,,\dots\,,h)}{\varphi_j(x)\sigma_j(y)} \\ \underset{(t=2\,,\dots\,,n_1\;;\; l_t=1\,,2\,,\dots\,,m_t+\dots+m_n)}{\rho_{l_t}(x)y^{m+t-1}} \end{array} \right.$$

Ma qui, in base alla

$$(\varphi p + \zeta_2 r, \bar{\varphi}_i x^i r) = i\varphi(x)\bar{\varphi}_i(y)x^{i-1}r,$$

risulta che, se $i > 0$, fra le determinazioni di θ compare il prodotto

$$\varphi(x)\bar{\varphi}_i(y)$$

di una funzione arbitraria di x per una funzione arbitraria di y e la θ è addirittura una funzione arbitraria di x e y: cosicchè riotteniamo un caso particolare di $[1, I]$.

Escluso questo caso, avremo che fra le (10) le $\bar{\varphi}_i(y)x^i$ o mancano del tutto o si riducono alla sola $\bar{\varphi}_0(y)$. E se mancano del tutto, l'alternata

$$(\varphi p + \zeta_2 r, \rho_{l_t}(y)x^t r) = t\varphi(x)x^{t-1}\rho_{l_t}(y)r$$

ci dice che per $t > 0$ ciascuna ρ_{l_t} ammette come moltiplicatore una funzione arbitraria di x, cosicchè le ρ_{l_t} per $t > 0$ rientrano fra le σ_j delle $\varphi_j(x)\sigma_j(y)$.

Insomma le determinazioni delle θ saranno date o da

$$a) \qquad \varphi_j(x)\sigma_j(y) \quad , \quad \bar{\varphi}(y) \qquad (j = 1, 2, \ldots, h)$$

o da

$$b) \qquad \varphi_j(x)\sigma_j(y) \quad , \quad \rho_i(y) \qquad (j = 1, 2, \ldots, h; i = 1, 2, \ldots, k).$$

Si tratta ora di determinare per ogni trasf. inf.

$$\varphi(x)p + \zeta_2(x, y)r$$

la ζ_2, che, come già dicemmo, dipende da φ e, per una data φ, è determinata a meno di una determinaziene arbitraria di θ. Basterà quindi che noi determiniamo, per ciascuna φ, una delle corrispondenti determinazioni di ζ_2.

Ora, nel caso a) dalla

$$(p, xp + \beta_1 r) = p + \frac{\partial \beta_1}{\partial x} r$$

deduciamo

$$\beta_1 \equiv \gamma_1(y)x \qquad [\text{modd. } \varphi_j(x)\sigma_j(y), \bar{\varphi}(y)];$$

e, assumendo come nuova z la $z - \gamma_1 x$ riduciamo $\gamma_1 = 0$, senza alterare le altre trasf. inf. del gruppo.

Analogamente si trova, per $\varphi = x^2$,

$$x^2p + 2\gamma_2(y)xr$$

e per $\varphi = x^3$,

$$x^3p + 3\gamma_2(y)x^2r$$

e alternando si conclude, per induzione completa,

$$x^ip + i\gamma_2(y)x^{i-1}r \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, \infty).$$

Otteniamo così il gruppo (dove γ_2 è rappresentato con α)

$$[1, \mathrm{II}]_1 \qquad \begin{array}{|c|} \hline \varphi(x)p + \alpha(y)\varphi' r \\ \varphi_j(x)\sigma_j(y)r \ , \ \bar{\varphi}(y)r \\ {\scriptstyle (j=1,2,\dots,h)} \\ \hline \end{array}$$

Analogamente nel caso b) si trova

$$[1, \mathrm{II}]_2 \qquad \begin{array}{|c|} \hline \varphi(x)p + \rho_1(y)\varphi' r \\ \varphi_j(x)\sigma_j(y)r \ , \ \rho_i(y)r \\ {\scriptstyle (j=1,2,\dots,h\,;\ i=1,2,\dots,k)} \\ \hline \end{array}$$

114. — Consideriamo in secondo luogo il gruppo

$$\beta) \qquad \varphi(x)p + [az\varphi' + \zeta_2]r \, , \, \theta(x, y)r$$

dove a rappresenta una costante diversa dallo zero.

Allora in base alla presenza nel gruppo delle trasf. inf.

$$p \, , \, xp + [az + \dots]r \, ,$$

si avrà anzitutto che le determinazioni della θ sono della forma (10). Ma ove si tenga conto della prima trasf. inf. β) per φ qualsiasi, si conclude facilmente che debbono mancare completamente le $\varphi_i(y)x^i$ e le $\rho_{l_t} x^{n+t}$; cosicchè avremo da considerare i gruppi della forma

$$\varphi(x)p + [az\varphi' + \zeta_2(x, y)]r \qquad \varphi_j(x)\sigma_j(y)r \; (j = 1, 2, \dots, h).$$

Prenderemo anche qui le mosse dalle

$$x^ip + [aizx^{i-1} + \beta_i]r \qquad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

dove le β_i sono determinate *modulo* $\varphi_j\sigma_j$ e in particolare è

$$\beta_0 \equiv 0 \, .$$

Anzitutto si trova come pocanzi

$$\beta_1 \equiv \gamma_1(y) ;$$

ma, supposto, com'è lecito, $a \gtrless 0$, si riduce $\gamma_1 = 0$, ponendo

$$z' = z + \frac{\gamma_1}{a} ;$$

cosicchè risulta

$$\beta_2 \equiv \gamma_2(y)$$

e dalla

$$(xp + azr , x^2p + [2axz + \gamma_2]r) = x^2p + [2axz - a\gamma_2]r$$

si conclude o $\gamma_2 = 0$ o $a = -1$.

Se $\gamma_2 = 0$, si ottiene ancora

$$\beta_3 \equiv \gamma_3(y)$$

e dalla

$$(xp + azr , x^3p + [3ax^2z + \gamma_3]r) = 2x^3p + [\partial ax^2z - a\gamma_3]r$$

deduciamo o $\gamma_3 = 0$ o $a = -2$.

Nel caso in cui sia $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ si ritrova alternando e iterando

$[1, II]_3$

$$\boxed{\varphi(x)p + az\varphi' r , \varphi_j(x)\sigma_j(y)r \quad (j = 1, 2, \ldots, h)}$$

Dopo ciò restano da considerare i due casi

$$a = -1 , \gamma_1 = 0 , \gamma_2 \gtrless 0 ; \; a = -2 , \gamma_1 = \gamma_2 = 0 , \gamma_3 \gtrless 0 ,$$

i quali danno luogo ai due nuovi gruppi

$[1, II]_4$

$$\boxed{\varphi(x)p + \left[\frac{1}{2}\alpha(y)\varphi'' - z\varphi'\right]r , \varphi_j(x)\sigma_j(y)r \quad (j = 1, 2, \ldots, h)}$$

$[1, II]_5$

$$\boxed{\varphi(x)p + \left[\frac{1}{3!}\alpha(y)\varphi''' - 2z\varphi'\right]r , \varphi_j(x)\sigma_j(x)r}$$

115. — Nella precedente discussione abbiamo trattato il caso

$$\beta) \qquad \varphi(x)p + [\alpha(y)z\varphi' + \zeta_2(x, y)]r, \theta(x, y)r$$

solo sotto l'ipotesi che α sia costante.

Passando ora al caso in cui α sia funzione di y, potremo anzitutto assumere come nuova y la α e considerare il gruppo

$$\beta) \qquad \varphi(x)p + [yz\varphi' + \zeta_2(x, y)]r, \theta(x, y)r.$$

Si tratta di determinare la forma delle θ. Ora in base alla presenza delle

$$p, xp + yzr$$

si conclude (n. 78) che la θ non può ammettere se non determinazioni della forma

$$\varphi_i(y)x^i$$

e, in base alla

$$(\varphi(x)p + [y\varphi'z + \zeta_2]r, \varphi_i(y)x^i r) = [i\varphi(x) - y\varphi'x]x^{i-1}\varphi_i(y)r$$

si conclude senz'altro che la θ è funzione arbitraria di x e y, cosicchè si ricade su di un gruppo del tipo $[1, I]$.

116. — Se il sottogruppo intransitivo massimo è finito e della forma

$$\rho_i(x, y)r \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$

in base alla presenza delle

$$p, xp + [\alpha(y)z + \ldots]r$$

si conclude che le ρ_i saranno della forma

$$\lambda_{i.t}(y)x^{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots n; t = 1, 2, \ldots, m_i + m_{i+1} + \ldots + m_t).$$

Ma allora in base alla

$$(\varphi(x)p + \alpha z\varphi' r, \lambda_{i.t}x^{i-1}r) = [(i-1)\varphi - \alpha\varphi' x]\lambda_{i.t}x^{i-2}r$$

si conclude che le ρ_i sono indipendenti da x e che α è nullo: dopo

di che considerazioni analoghe a qnelle del n. 113 conducono al gruppo

[1, III] $$\varphi(x)p + \sigma(y)\varphi' r\,,\ \rho_i(y)r \qquad (i = 1, 2, \dots, h)$$

117. Gruppi di terza specie. — Il gruppo generatore (n. 41) è qui riducibile alla forma (n. prec.)

$$\varphi(x)p + \alpha(y)\varphi' r\,,\ r:$$

perciò dovremo associare successivamente al gruppo

$$\varphi(x)p + z\alpha\varphi' r\,,\ zr$$

un gruppo intransitivo di ciascuno dei tipi [IV]-[IX].

Il gruppo massimo di terza specie è senz'altro

[1, IV] $$\varphi(x)p\,,\ \psi_0(x, y)r\,,\ \psi_1(x, y)zr$$

Se aggiungiamo in secondo luogo un sottogruppo del tipo

[V] $$\psi_0(x, y)r\,,\ \theta(x, y)zr\,,$$

dove θ è definita da un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, la θ sarà legata dalle stesse condizioni del n. 113, talchè avremo i due gruppi

[1, V]$_1$ $$\varphi(x)p + \alpha(y)\varphi' zr\,,\ \psi(x, y)r\,,\ \varphi_j(x)\sigma_j(y)zr\,,\ \bar{\varphi}(y)zr \qquad (j = 1, 2, \dots, h)$$

[1, V]$_2$ $$\varphi(x)p + \alpha(y)\varphi' zr\,,\ \psi(x, y)r\,,\ \varphi_j(x)\sigma_j(y)zr\,,\ zr\,,\ \rho_i(y)zr \qquad (j = 1, 2, \dots, h\,;\ i = 1, 2, \dots, k)$$

Analogamente si trova

[1, VI] $$\varphi(x)p + \alpha(y)\varphi' zr\,,\ \psi(x, y)r\,,\ zr\,,\ \rho_i(y)zr \qquad (i = 1, 2, \dots, h)$$

Consideriamo, in terzo luogo, come sottogruppo invariante un gruppo del tipo

$$[\mathrm{VII}] \qquad \varphi_i(x)\rho_i(x, y)r, \bar{\varphi}(x)zr \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Qui, come si è notato al n. 40, dobbiamo prendere il trasformato di [VII] per mezzo della più generale trasformazione in due variabili

$$x = \mu(x', y'), y = \nu(x', y')$$

cioè un gruppo della forma

$$\varphi_i(\mu)\rho_i(x, y\ r, \bar{\varphi}(\mu)zr,$$

dove μ è una funzione determinata di x e y. Ma tenuto conto della presenza nel gruppo della p, si conclude come al n. 68, che μ deve essere indipendente o dalla y o dalla x, talchè dovremo assumere come sottogruppo o il gruppo

$$a) \qquad \varphi_i(x)\rho_i(x, y)r, \bar{\varphi}(x)zr$$

o il gruppo

$$b) \qquad \varphi_i(y)\rho_i(x, y)r, \bar{\varphi}(y)zr.$$

Restano da determinare, nell'uno e nell'altro caso, le funzioni $\rho_i(x, y)$.

Nel caso a), in base alla

$$(\varphi(x)p + \alpha(y)z\varphi'r, \varphi_i(x)\rho_i(x, y)r) = \left\{ [\varphi\varphi'_i - \alpha\varphi'\varphi_i]\rho_i + \varphi\varphi_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right\} r,$$

dovremo avere

$$(11) \qquad [\varphi(x)\varphi'_i(x) - \alpha(y)\varphi'\varphi_i]\rho_i + \varphi\varphi_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x} = 0 \qquad [\mathrm{modd.}\ \varphi_j\rho_j],$$

e, in particolare per $\varphi = \varphi_i = 1$,

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x} = 0.$$

Poichè questo è un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti indipendenti da y, le ρ_i saranno combinazioni lineari, a coefficienti funzioni di x, di un numero finito di funzioni della

sola y; e nessuna di queste potrà essere arbitraria, giacchè in tal caso avremmo nel gruppo una trasf. inf.

$$\psi(x, y)r,$$

dove ψ è arbitraria, e ricadremmo su uno dei tipi già determinati. D'altra parte, noi possiamo, senza uscire dal gruppo, combinare linearmente le ρ_i *con coefficienti funzioni arbitrarie di* x (si ricordi la forma del nostro sottogruppo a); talchè in ultima analisi possiamo sostituire alle ρ_i un altro sistema fondamentale, costituito da funzioni della sola y. Chiamando senz'altro ρ_i anche queste nuove funzioni, le (11) danno per $\varphi = x$, $\varphi_i = 1$

$$\alpha(y)\rho_i = 0,$$

cosicchè, dovendo le ρ_i essere in numero finito, concludiamo che α deve essere indipendente da y e troviamo il gruppo

$$[1, \mathrm{VII}] \qquad \varphi(x)p, \; \varphi_i(x)\rho_i(y)r, \; \bar{\varphi}(x)zr \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

Quando assumiamo il sottogruppo invariante b), dobbiamo soddisfare alle congruenze

$$(12) \qquad \varphi(x)\varphi_i(y)\frac{\partial \rho_i}{\partial x} - \alpha(y)\varphi'(x)\varphi_i(y)\rho_i(x, y) \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \varphi_j\rho_j],$$

e in particolare per $\varphi = \varphi_i = 1$ e per $\varphi = x$, $\varphi_i = 1$,

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \equiv 0, \; x\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \equiv 0.$$

Poichè queste sono equazioni differenziali lineari a coefficienti indipendenti dalla x, troviamo che le ρ_i saranno della forma

$$(13) \qquad \sigma_0(y) + x\sigma_1(y) + \ldots + x^h\sigma_h(y),$$

dove le σ_i sono funzioni della sola y da determinarsi ulteriormente. Ma per $\varphi_i = 1$, la (12) implica

$$\varphi(x)\frac{\partial \rho_i}{\partial x} - \alpha(y)\varphi'(x)\rho_i = 0$$

ed è manifesto che tenuto conto della forma (13) delle ρ_i, queste

ultime congruenze non possono essere verificate se non è $h=0$, cioè se le ρ_i non sono indipendenti da x. In altre parole il nostro sottogruppo b) si riduce a

$$\varphi_0(y)r \; , \; \varphi_1(y)zr$$

e si ottiene il gruppo

[1, VII]$_2$ $$\varphi(x)p \, , \varphi_0(y)r \, , \varphi_1(y)zr$$

Analogamente, se il sottogruppo intransitivo massimo è del tipo

[VIII] $$\varphi_i(x)\rho_i(x, y)r \; , \; \sigma_j(x)zr \, , \quad (i=1, 2, \dots, h \, ; \, j=1, 2, \dots, k)$$

si ottengono i due gruppi

[1, VIII]$_1$ $$\varphi(x)p + az\varphi' r \, , \varphi_i(x)\rho_i(y)r \, , zr \quad (i=1, 2, \dots, h)$$

[1, VIII]$_2$ $$\varphi(x)p \, , \varphi_0(y)r \, , zr \, , \sigma_i(y)zr \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

118. — In base alla osservazione del n. 70, noi, qui e nel seguito, tralascieremo senz'altro di enumerare i *gruppi di quarta* e *quinta specie.*

[2] Gruppo accorciato: $\varphi(x)p \, , q$.

119. — Conoscendo i gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [1] si trovano agevolmente quelli, che corrispondono ai gruppi accorciati [2]-[5]. Nel caso del gruppo accorciato [2] basta aggiungere ai gruppi ottenuti nei nn. 110-117 una trasf. inf.

$$q + \beta_0(x, y, z)r \, .$$

Corrispondentemente al gruppo in una sola variabile

$$\varphi(x)p \, ,$$

si trova, come gruppo di prima specie, il medesimo gruppo in due variabili [2].

Se consideriamo il gruppo (n. 111)

$$[1]_1 \qquad \varphi(x)p + \left[z\varphi' + \frac{1}{3!}\alpha(y)z^3\varphi'''\right]r,$$

ricaviamo dalla

$$(p, q + \beta_0 r) = \frac{\partial\beta_0}{\partial x} r$$

che, non potendo il gruppo contenere alcuna trasf. inf. della forma $\alpha(x, y, z)r$, deve essere

$$\frac{\partial\beta_0}{\partial x} = 0;$$

e allora basta assumere come nuova z una soluzione (indipendente da x) della

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \beta_0 \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0$$

per ridurre $\beta_0 = 0$. Si ha così il gruppo

$$[2, I]_1 \qquad \varphi(x)p + \left[z\varphi' + \frac{1}{3!}az^3\varphi'''\right]r, q$$

Analogamente, in corrispondenza al gruppo $[\mathbf{1}]_2$ (n. 112) si trova

$$[2, I]_2 \qquad \varphi(x)p + \left[z\varphi' + \frac{1}{2}z^2\varphi''\right]r, q$$

120. — Pei *gruppi di seconda specie* la trasf. inf. da aggiungere sarà della forma

$$q + [\beta_0(x, y)z + \beta_0(x, y)]r.$$

In ogni caso abbiamo nel gruppo la p, talchè, combinandola con la trasformazione inf. $q + \ldots$, si trova che β_0 è indipendente da x. Allora, corrispondentemente al gruppo $[\mathbf{1}, \mathrm{I}]$ (n. 113) si ottiene il gruppo

$$\varphi(x)p + ay\varphi' r, q + \beta(y)zr, \psi(x, y)r,$$

il quale, ove si assuma come nuova z la

$$ze^{-\int \beta dy},$$

diventa

$$[2, \mathrm{I}] \qquad \varphi(x)p + az\varphi r\,,\, q\,,\, \psi(x, y)r$$

Così i gruppi $[1, \mathrm{II}]_1$ - $[1, \mathrm{III}]$ danno luogo ai gruppi seguenti:

$$[2, \mathrm{II}]_1 \qquad \varphi(x)p + a\varphi' r\,,\, q\,,\, \varphi_{s \cdot t}(x) y^s e^{a_t y} r\,,\, \bar{\varphi}(y) r$$
$$(t = 1, 2, \ldots, k\ ;\ s = 0, 1, \ldots, m_t)$$

$$[2, \mathrm{II}]_2 \qquad \varphi(x)p + a y^n \varphi' r\,,\, q\,,\, \bar{\varphi}(y) r\,,\, \varphi_l(x) y^l r\,,\, \varphi_{s \cdot t}(x) y^s e^{a_t y} r$$
$$(l = 0, 1, \ldots, n-1\ ;\ t = 1, 2, \ldots, k\ ;\ s = 0, 1, \ldots, m_t)$$

$$[2, \mathrm{II}]_3 \qquad \varphi(x)p + a y^n \varphi' r\,,\, q\,,\, \varphi_l(x) y^l r\,,\, \varphi_{s \cdot t}(x) y^s e^{a_t y} r\,,\, y^n r\,,\, y^i e^{b_j y} r$$
$$(l = 0, 1, \ldots, n-1\ ;\ t = 1, 2, \ldots, h\ ;\ s = 0, 1, \ldots, m_t\ ;\ j = 1, 2, \ldots, k\ ;\ i = 0, 1, \ldots, n_j)$$

$$[2, \mathrm{II}]_4 \qquad \varphi(x)p + az\varphi' r\,,\, q\,,\, \varphi_{s \cdot t}(x) y^s e^{a_t y} r$$
$$(t = 1, 2, \ldots, k\ ;\ s = 0, 1, \ldots, m_t)$$

$$[2, \mathrm{II}]_5 \qquad \varphi(x)p + \left[\frac{1}{2} a y^n \varphi'' - z\varphi'\right] r\,,\, q\,,\, \varphi_l(x) y^l r\,,\, \varphi_{s \cdot t}(x) y^s e^{a_t y} r$$
$$(l = 0, 1, \ldots, n-1\ ;\ t = 1, 2, \ldots, h\ ;\ s = 0, 1, \ldots, m_t)$$

$$[2, \mathrm{II}]_6 \qquad \varphi(x)p + \left[\frac{1}{3!} a y^n \varphi''' - 2z\varphi'\right] r\,,\, q\,,\, \varphi_l(x) y^l r\,,\, \varphi_{s \cdot t}(x) y^s e^{a_t y} r$$
$$(l = 0, 1, \ldots, n-1\ ;\ t = 1, 2, \ldots, k\ ;\ s = 0, 1, \ldots, m_t)$$

$$[2, \mathrm{II}]_7 \qquad \varphi(x)p + a\varphi' r\,,\, q\,,\, y^l r\,,\, y^s e^{a_t y} r$$
$$(l = 0, 1, \ldots, n-1\ ;\ t = 1, 2, \ldots, k\ ;\ s = 0, 1, 2, \ldots, m_t)$$

Se nei gruppi $[2, \mathrm{II}]_5$ e $[2, \mathrm{II}]_6$ mancano le trasf. inf. $\varphi_l(x) y^l r$, basta porre $n = 0$, per ottenere la corrispondente forma tipica.

121. — Pei *gruppi di terza specie* il gruppo generatore è dato da

$$\varphi(x)p + a\varphi' r\,,\; q\,,\; r\,;$$

talchè otteniamo i gruppi seguenti:

[2, IV] $$\varphi(x)p\,,\; q\,,\; \psi_0(x\,,y)r\,,\; \psi_1(x\,,y)zr$$

[2, V]₁ $$\varphi(x)p\,,\; q\,,\; \psi(x\,,y)r\,,\; \bar{\varphi}(y)zr\,,\; \varphi_{s\cdot t}(x)y^s e^{a_t y} zr$$
$$(t=1,2,\dots,h\;;\; s=0,1,\dots,m_t)$$

[2, V]₂ $$\varphi(x)p + az\varphi' r\,,\; q\,,\; \psi(x\,,y)r\,,\; \varphi_{s\cdot t}(x)y^s e^{a_t y} zr\,,\; y^l zr\,,\; y^j e^{b_i y} zr$$
$$(t=1,2,\dots,h\;;\; s=0,1,\dots,m_t\;;\; i=1,2,\dots,k\;;\; j=0,1,\dots,n_t)$$

[2, VI] $$\varphi(x)p + az\varphi' r\,,\; q\,,\; \psi(x\,,y)r\,,\; y^l zr\,,\; y^j e^{b_i y} zr$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\;;\; i=1,2,\dots,k\;;\; j=0,1,\dots,n_j)$$

[2, VII]₁ $$\varphi(x)p\,,\; q\,,\; \varphi_{s\cdot t}(x)y^s e^{a_t y} r\,,\; \bar{\varphi}(x)zr$$
$$(t=1,2,\dots,h\;;\; s=0,1,\dots,m_t$$

[2, VII]₂ $$\varphi(x)p\,,\; q\,,\; \varphi_0(y)r\,,\; \varphi_1(y)zr$$

[2, VIII]₁ $$\varphi(x)p + az\varphi' r\,,\; q\,,\; \varphi_{s\cdot t}(x)y^s e^{a_t y} r\,,\; zr$$
$$(t=1,2,\dots,k\;;\; s=0,1,\dots,m_t)$$

[2, VIII]₂ $$\varphi(x)p\,,\; q\,,\; \varphi(y)r\,,\; y^l zr\,,\; y^s e^{a_t y} zr$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\;;\; t=1,2,\dots,k\;;\; s=0,1,\dots,m_t)$$

[2, IX] $$\varphi(x)p\,,\; q\,,\; y^s e^{a_t y} r\,,\; zr$$
$$(t=1,2\,k\;;\; s=0,1,\dots,m_t)$$

[3] Gruppo accorciato: $\varphi(x)p\,,\ q\,,\ yq$.

122. — Aggiungiamo una trasf. inf.

$$yq + \beta_1(x\,,y\,,z)r$$

ai gruppi $[2]_1$-$[2\,,\mathrm{IX}]$. Otterremo così i gruppi seguenti:

$[3]_1$ $\quad \varphi(x)p\,,\ q\,,\ yq + bzr$

$[3]_2$ $\quad \varphi(x)p + z\varphi' r\,,\ q\,,\ yq + bzr$

$[3]_3$ $\quad \varphi(x)p + \left[z\varphi' + \frac{1}{2}z^2\varphi''\right]r\,,\ q\,,\ yq$

$[3]_4$ $\quad \varphi(x)p + \left[z\varphi' + \frac{1}{3!}az^3\varphi'''\right]r\,,\ q\,,\ yq$

$[3\,,\mathrm{I}]$ $\quad \varphi(x)p + az\varphi' r\,,\ q\,,\ yq + bzr\,,\ \psi(x\,,y)r$

$[3\,,\mathrm{II}]_1$ $\quad \varphi(x)p + ay^n\varphi' r\,,\ q\,,\ yq + nzr$; $\varphi_l(x)y^l r\,,\ \bar\varphi(y)r$ $\quad (l=0,1,2,\ldots,n-1)$

$[3\,,\mathrm{II}]_2$ $\quad \varphi(x)p + ay^n\varphi' r\,,\ q\,,\ yq + nzr$; $\varphi_l(x)y^l r\,,\ y^n r$ $\quad (l=0,1,2,r-1)$

$[3\,,\mathrm{II}]_3$ $\quad \varphi(x)p + az\varphi' r\,,\ q\,,\ yq + bzr$; $\varphi_l(x)y^l r$ $\quad (l=0,1,\ldots,n-1)$

$[3\,,\mathrm{II}]_4$ $\quad \varphi(x)p + \left[\frac{1}{2}ay^n\varphi'' - z\varphi'\right]r\,,\ q\,,\ yq + nzr$; $\varphi_l(x)y^l r\,,\ y^n r$ $\quad (l=0,1,2\ldots,n-1)$

$[3\,,\mathrm{II}]_5$ $\quad \varphi(x)p + \left[\frac{1}{3!}ay^n\varphi''' - 2z\varphi'\right]r\,,\ q\,,\ yq + nzr$; $\varphi_l(x)y^l r$ $\quad (l=0,1,2,\ldots,n-1)$

$[3\,,\mathrm{II}]_6$ $\quad \varphi(x)p + a\varphi' r\,,\ q\,,\ yq + bzr$; $\varphi_l(x)y^l r\,,\ \bar\varphi(y)r$ $\quad (l=0,1,\ldots,n-1)$

$[3\,,\mathrm{III}]_1$ $\quad \varphi(x)p + a\varphi' r\,,\ q\,,\ yq\,,\ y^l r$ $\quad (l=0,1,2,\ldots,n-1)$

$[3\,,\mathrm{III}]_2$ $\quad \varphi(x)p\,,\ q\,,\ yq + bzr\,,\ y^l r$ $\quad (l=0,1,2,\ldots,n-1)$

$[3\,,\mathrm{IV}]$ $\quad \varphi(x)p\,,\ q\,,\ yq\,,\ \psi_0(x\,,y)r\,,\ \psi_1(x\,,y)zr$

[3, V]$_1$	$\varphi(x)p\,,\,q\,,\,yq\,,\,\psi(x,y)r\,,\,\varphi_l(x)y^l yr\,,\,\bar\varphi(y)zr$ $(l=0,1,2,\dots,n-1)$
[3, V]$_2$	$\varphi(x)p\,,\,q\,,\,yq\,,\,\psi(x,y)r\,,\,\varphi_l(x)y^l zr\,,\,y^{n+t-1}zr$ $(l=0,1,\dots,n-1\,;\,t=1,2,\dots,n_1)$
[3, V]$_3$	$\varphi(x)p+az\varphi' r\,,\,q\,,\,yq\,,\,\psi(x,y)r\,,\,\bar\varphi(y)zr$
[3, VI]	$\varphi(x)p+az\varphi' r\,,\,q\,,\,yq\,,\,\psi(x,y)r\,,\,y^l zr$ $(l=0,1,2,\dots,n-1)$
[3, VII]$_1$	$\varphi(x)p\,,\,q\,,\,yq\,,\,\varphi_l(x)y^l r\,,\,\bar\varphi(x)zr$ $(l=0,1,2,\dots,n-1)$
[3, VII]$_2$	$\varphi(x)p\,,\,q\,,\,yq\,,\,\varphi_0(y)r\,,\,\varphi_1(y)zr$
[3, VIII]$_1$	$\varphi(x)p+az\varphi' r\,,\,q\,,\,yq\,,\,\varphi_l(x)y^l r\,,\,zr$ $(l=0,1,2,\dots,n-1)$
[3, VIII]$_2$	$\varphi(x)p\,,\,q\,,\,yq\,,\,\varphi_0(y)r\,,\,y^l zr$ $(l=0,1,2,\dots,n-1)$
[3, IX]	$\varphi(x)p\,,\,q\,,\,yq\,,\,y^l r\,,\,zr$ $l=0,1,2,\dots,n-1$

[4] Gruppo accorciato: $\varphi(x)p\,,\,q\,,\,yq\,,\,y^2q$.

123. — I gruppi corrispondenti a [4] si otterranno aggiungendo una trasf. inf.

$$y^2q+\beta_2(x,y,z)r$$

ai gruppi testè determinati, partendo dal gruppo accorciato [3].

Nei gruppi [3]$_1$, [3]$_2$ abbiamo le trasf. inf.

$$p\,,\,q\,,\,yq+bzr\,,$$

che combinate colla $y^2q+\beta_2 r$ danno

$$(p\,,\,y^2q+\beta_2 r)=\frac{\partial\beta_2}{\partial x}r\,,\,(q\,,\,y^2q+\beta_2 r)=2yq+\frac{\partial\beta_2}{\partial y}r$$

$$(yq+bzr\,,\,y^2q+\beta_2 r)=y^2q+\left[y\frac{\partial\beta_2}{\partial y}+bz\frac{\partial\beta_2}{\partial z}-b\beta_2\right]r$$

e quindi, se $b \gtrless 0$,

$$\beta_2 = 2byz + b_1 z^{\frac{b+1}{b}}.$$

Se $b_1 = 0$ otteniamo

$$[4]_1 \quad \boxed{\varphi(x)p\,,q\,,yq + bzr\,,y^2q + 2byzr} \qquad [4]_2 \quad \boxed{\varphi(x)p + z\varphi' r\,,q\,,yq + bzr\,,y^2q + byzr}$$

Se è $b_1 \gtrless 0$, nel caso di $[3]_1$ basta assumere come nuova z la

$$\frac{b_1}{b} z^{\frac{1}{b}}$$

per ottenere il gruppo

$$[4]_3 \qquad \varphi(x)p\,,q\,,yq + zr\,,y^2q + [2yz + z^2]r \quad ,$$

mentre nel caso di $[3]_2$ l'ipotesi $b_1 \gtrless 0$ risulta incompatibile con la $b \gtrless 0$.

Per $b = 0$, partendo da $[3]_1$ si ritrova il gruppo accorciato $[4]$, e partendo da $[3]_2$ si ricade su di un caso particolare di $[4]_2$. Infine, in corrispondenza dei gruppi $[3]_3$ e $[3]_4$ si ottengono i gruppi

$$[4]_4 \quad \boxed{\varphi(x)p + \left[z\varphi' + \frac{1}{2}z^2\varphi''\right]r\,,q\,,yq\,,y^2q} \quad [4]_5 \quad \boxed{\varphi(x)p + \left[z\varphi' + \frac{1}{3\,!}az^3\varphi'''\right]r\,,q\,,yq\,,y^2q}$$

124. — Per costruire i *gruppi di seconda specie* dovremo aggiungere ai gruppi $[3\,,\mathrm{I}]$ - $[3\,,\mathrm{III}]_2$ una trasf. inf.

$$y^2q + [z\beta_2(x\,,y) + \bar{\beta}_2(x\,,y)]r\,.$$

Così, corrispondentemente al gruppo $[3\,,\mathrm{I}]$, troviamo

$$[4\,,\mathrm{I}] \qquad \boxed{\varphi(x)p + az\varphi' r\,,q\,,yq + bzr\,,y^2q + 2byzr\,,\psi(x\,,y)r}$$

In ogni altro caso dalla

$$(p\,,y^2q + [z\beta_2 + \bar{\beta}_2]r) = \left[z\frac{\partial\beta_2}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\beta}_2}{\partial x}\right]r$$

ricaviamo che β_2 è indipendente da x; e allora se il gruppo contiene le

$$\varphi_l(x)y^l r \qquad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

deduciamo, in base alle

$$(y^2q + [\beta_2(y)z + \overline{\beta}_2]r, \varphi_{n-1}y^{n-1}r) = [(n-1)y - \beta_2]\varphi_{n-1}y^{n-1}r,$$

che deve essere

$$\beta_2 = (n-1)y$$

e, in base alla

$$(q, y^2q + [(n-1)yz + \overline{\beta}_2]r) = 2yq + \left[(n-1)z + \frac{\partial\overline{\beta}_2}{\partial y}\right]r,$$

che i gruppi $[3, II]_2, [3, II]_4, [3, II]_5, [3, II]_1$ vanno senz'altro esclusi, tranne il caso particolare di $[3, II]_1$ che si ha per $n = 0$.

Consideriamo il gruppo $[3, II]_3$, ponendovi, per quanto si è detto, $2b = n - 1$

$$\varphi(x)p + az\varphi' r, q, 2yq + (n-1)zr, \varphi_l(x)y^l r \qquad (l = 0, s \ldots, n-1)$$

Dalle alternate

$$(p, y^2q + [(n-1)yz + \overline{\beta}_2]r) = \frac{\partial\overline{\beta}_2}{\partial x} r,$$

$$(q, y^2q + [(n-1)yz + \overline{\beta}_2]r) = 2yq + \left[(n-1)z + \frac{\partial\beta_2}{\partial y}\right]r$$

deduciamo

$$\frac{\partial\overline{\beta}_2}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial\beta_2}{\partial y} \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \varphi_j(x)y^j]$$

e quindi

$$\overline{\beta}_2 \equiv by^n.$$

Ma la

$$(2yq + (n-1)zr, y^2q + [(n-1)yz + by^n]r) = 2y^2q + [2(n-1)yz + (n+1)by^n]r$$

ci dice che deve essere o $b = 0$ o $n = 1$.

Otteniamo così i due gruppi

$[4, II]_1$ $$\left|\begin{array}{c}\varphi(x)p + az\varphi' r, q, 2yq + (n-1)z1, y^2q + (n-1)yzr \\ \varphi_l(x)y^l r \\ (l=0,1,\dots,n-1)\end{array}\right|$$

$[4, II]_2$ $$\left|\varphi(x)p, q, yq, y^2q + byr, \varphi(x)r\right|$$

Infine, partendo dai gruppi $[3, II]_1$ per $n=0$ e dai gruppi $[3, II]_6$, $[3, III]_1$, $[3, III]_2$ si trovano i gruppi:

$[4, II]_3$ $$\left|\begin{array}{c}\varphi(x)p + a\varphi' r, q, 2yq + (n-1)zr, \\ y^2q + (n-1)yzr \\ \varphi_l(x)y^l r, \bar{\varphi}(y)r \\ (l=0,1,2,\dots,n-1)\end{array}\right|$$

$[4, II]_4$ $$\left|\begin{array}{c}\varphi(x)p, q, yq + bzr, y^2q + 2byzr \\ \bar{\varphi}(y)r\end{array}\right|$$

$[4, III]_1$ $$\left|\begin{array}{c}\varphi(x)p + a\varphi' r, q, yq, y^2q + byr \\ r\end{array}\right|$$

$[4, III]_2$ $$\left|\begin{array}{c}\varphi(x)p, q, 2yq + (n-1)zr, y^2q + (n-1)yzr \\ y^l r \\ (l=0,1,2,\dots,n-1)\end{array}\right|$$

125. — Pei *gruppi di terza specie* il gruppo generatore è il gruppo $[4, III]_1$ del n. prec., talchè otteniamo i gruppi seguenti:

$[4, IV]$ $$\left|\varphi(x)p, q, yq, y^2q, \psi_0(x,y)r, \psi_1(x,y)zr\right|$$

$[4, V]_1$ $$\left|\varphi(x)p, q, yq, y^2q, \psi(x,y)r, \varphi_0(x)zr, \varphi_1(y)zr\right|$$

$[4, V]_2$ $$\left|\varphi(x)p, q, yq, y^2q + byzr, \psi(x,y)r, \varphi_0(x)zr\right|$$

$[4, V]_3$ $$\left|\varphi(x)p + az\varphi' r, q, yq, y^2q, \psi(x,y)r, \varphi_0(y)zr\right|$$

$[4, VI]$ $$\left|\varphi(x)p + az\varphi' r, q, yq, y^2q + byzr, \psi(x,y)r, zr\right|$$

$[4, \mathrm{VII}]_1$ $$\boxed{\varphi(x)p \,,\, q \,,\, yq \,,\, y^2q + nyzr \,,\, \varphi_l(x)y^l r \,,\, \bar{\varphi}(x)zr \quad (l=0,1,\ldots,n)}$$

$[4, \mathrm{VII}]_2$ $$\boxed{\varphi(x)p \,,\, q \,,\, yq \,,\, y^2q \,,\, \varphi_0(y)r \,,\, \varphi_1(y)zr}$$

$[4, \mathrm{VIII}]_1$ $$\boxed{\varphi(x)p + az\varphi' r \,,\, q \,,\, yq \,,\, y^2q + nyzr \,,\, \varphi_l(x)y^l r \,,\, zr \quad (l=0,1,2,\ldots,n)}$$

$[4, \mathrm{VIII}]_2$ $$\boxed{\varphi(x)p \,,\, q \,,\, yq \,,\, y^2q + byzr \,,\, \varphi_0(y)r \,,\, zr}$$

$[4, \mathrm{IX}]$ $$\boxed{\varphi(x)p \,,\, q \,,\, yq \,,\, y^2q + nyzr \,,\, y^l r \,,\, zr \quad (l=0,1,2,\ldots,n)}$$

$[5]$ Gruppo accorciato: $\varphi(x)p \,,\, \varphi(y)q$.

126. — Basterà aggiungere una trasf. inf.

$$y^3q + \beta_3(x, y, z)r \tag{14}$$

ai gruppi determinati or ora; giacchè alternando e iterando le

$$q \,,\, yq + \ldots \,,\, y^2q + \ldots \,,\, y^3q + \ldots$$

potremo poi ottenere tutte le trasf. inf.

$$\bar{\varphi}(y)q + \ldots .$$

Cominciando dai *gruppi di prima specie*, aggiungiamo la (14) al gruppo $[4]_2$

$$\varphi(x)p + z\varphi' r \,,\, q \,,\, yq + bzr \,,\, y^2q + 2byzr .$$

Si trova così

$[5]_1$ $$\boxed{\varphi(x)p + z\varphi' r \,,\, \bar{\varphi}(y)q + bz\bar{\varphi}' r}$$

E ad un caso particolare di questo si giunge, partendo dal gruppo $[4]_1$.

Se si prendono le mosse da $[4]_3$

$$\varphi(x)p\,,\, q\,,\, yq + zr\,,\, y^2q + [2yz + z^2]r\,,$$

basta osservare che le

$$\bar{\varphi}(y)q + \zeta r\,,$$

per la presenza della p, debbono essere indipendenti da x e che, d'altra parte, debbono generare un gruppo di prima specie appartenente al gruppo accorciato

$$\bar{\varphi}(y)q\,,$$

per concludere, in base al n. 123, che il nostro gruppo è dato da

$[5]_2$ $$\varphi(x)p\,,\, \bar{\varphi}(y)q + \left[z\bar{\varphi}' + \frac{1}{2} z^2\bar{\varphi}'' \right]r$$

Aggiungendo infine la (14) a $[4]_4$ e $[4]_5$ si trova

$$\beta_3 = 0\,,$$

cosicchè nel secondo caso si ottiene, all'infuori dello scambio di x e y, il gruppo

$[5]_3$ $$\varphi(x)p\,,\, \bar{\varphi}(y)q + \left[z\bar{\varphi}' + \frac{1}{3!} az^3\bar{\varphi}''' \right]r$$

E corrispondentemente a $[4]_4$ si ritrova, all'infuori dello scambio di x e y, il gruppo $[5]_2$, or ora indicato.

127. — Il *gruppo massimo di seconda specie* è

$[5, I]$. $$\varphi(x)p + az\varphi'r\,,\, \bar{\varphi}(y)q + bz\bar{\varphi}'r\,,\, \psi(x, y)r$$

I gruppi $[4, II]_1$ e $[4, II]_4$ danno entrambi il gruppo

$[5, II]_1$ $$\varphi(x)p + az\varphi'r\,,\, \bar{\varphi}(y)q\,,\, \varphi_0(x)r$$

Così movendo da $[4, II]_2$ o da $[4, II]_3$ troviamo

$[5, II]_2$ $\qquad \varphi(x)p + a\varphi' r, \bar\varphi(y)q, \varphi_0(y)r$

Infine il gruppo $[4, III]_1$ conduce al tipo

$[5, III]$ $\qquad \varphi(x)p + a\varphi' r, \bar\varphi(y)q + b\bar\varphi' r, r$

del quale $[4, III]_2$ dà un caso particolare.

L'ultimo gruppo ottenuto è il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie,* i quali sono perciò riducibili ai tipi seguenti:

$[5, IV]$ $\qquad \varphi(x)p, \bar\varphi(y)q, \psi_0(x, y)r, \psi(x, y)zr$

$[5, V]_1$ $\qquad \varphi(x)p, \bar\varphi(y)q, \psi(x, y)r, \varphi_0(x)zr, \bar\varphi_0(y)zr$

$[5, V]_2$ $\qquad \varphi(x)p + az\varphi' r, \bar\varphi(y)q, \psi(x, y)r, \bar\varphi_0(y)zr$

$[5, VI]$ $\qquad \varphi(x)p + az\varphi' r, \bar\varphi(y)q + az\bar\varphi' r, \psi(x, y)r, zr$

$[5, VII]$ $\qquad \varphi(x)p, \bar\varphi(y)q, \varphi_0(x)r, \varphi_1(x)zr$ $\qquad [5, VIII]$ $\qquad \varphi(x)p + az\varphi' r, \bar\varphi(y)q, \varphi_0(x)r, zr$

$[5, IX]$ $\qquad \varphi(x)p, \bar\varphi(y)q, r, zr$

§ 2. — Gruppi intransitivi.

128. — I gruppi spaziali che restano da determinare trasformano in sè un solo sistema di piani ($x =$ cost.). Intanto in questo secondo paragrafo determineremo i gruppi corrispondenti ai gruppi accorciati $[6]$-$[10]$. Ora ciascuno di questi, come gruppo piano, trasforma in sè ogni singola retta

$$x = \text{cost.},$$

cosicchè i gruppi spaziali che qui otterremo saranno ***intransitivi***, in quanto non solo trasformano le une nelle altre le rette

$$x = \text{cost.}, y = \text{cost.},$$

ma lasciano fermo ogni singolo piano

$$x = \text{cost.}$$

Quando avremo determinati questi gruppi intransitivi, tutti gli altri si otterranno senza notevoli difficoltà.

Considerazioni *ex novo* si richiederanno pei gruppi **[31]**, **[32]**, **[33]**, i quali in qualche modo fanno parte a sè e certamente offrono uno speciale interesse.

[6] Gruppo accorciato: $\varphi(x)q$.

129. — I *gruppi di prima specie* saranno della forma

$$\varphi(x)q + \zeta(x, y, z)r \tag{15}$$

dove la ζ deve essere univocamente determinata dalla φ, talchè sarà

$$\zeta = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m(x, y, z) \frac{d^m\varphi}{dx^m} = A(\varphi).$$

Poichè i gruppi di prima specie sono caratterizzati dalla condizione di non contenere nessuna trasf. inf. della forma $\lambda(x, y, z)r$ (cioè nessuna trasf. inf. che lasci ferma ogni singola retta $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$) avremo, tenendo conto della forma delle (15), che i nostri gruppi debbono essere abeliani.

Ora considerando la (15) per $\varphi = 1$, cioè la

$$q + \alpha_0 r$$

possiamo ridurre $\alpha_0 = 0$, scegliendo come nuova z una soluzione della

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} + \alpha_0 \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0;$$

e allora dalla

$$(q, \varphi(x)q + A(\varphi)r) = \frac{\partial}{\partial y} A(\varphi)r$$

ricaviamo che $A(\varphi)$ è indipendente dalla y o, in altre parole, sono indipendenti da y le funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Ma possiamo eseguire una ulteriore riduzione: se $\alpha_1 \gtrless 0$, si assuma come nuova z la

$$\int \frac{dz}{\alpha_1}$$

e sarà ridotto $\alpha_1 = 1$: dopo di che, in base alla

$$(xq + r, \varphi q + A(\varphi)r) = \frac{\partial}{\partial z} A(\varphi)r,$$

si concluderà che i coefficienti della A sono indipendenti (oltre che da y) anche da z.

Se poi fosse $\alpha_1 = 0$ e così pure $\alpha_2 = \dots = \alpha_{s-1} = 0$ ed $\alpha_s \gtrless 0$, si potrebbe ridurre ugualmente $\alpha_s = 1$ e si concluderebbe ancora che gli altri coefficienti α_i sono indipendenti da z.

Insomma ogni gruppo di prima specie corrispondente al gruppo accorciato [6] è riducibile alla forma seguente:

$$[6] \qquad \varphi(x)q + [\varphi^{(s)} + \alpha_{s+1}(x)\varphi^{(s+1)} + \dots + \alpha_n(x)\varphi^{(n)}]r \quad s > 0$$

130. — Passiamo ai *gruppi di seconda specie.* Essi saranno della forma

$$\varphi(x)q + [z\zeta_1(x, y) + \zeta_2(x, y)]r, \theta(x, y)r,$$

dove θ è o arbitraria o dipendente linearmente da un numero infinito o finito di costanti arbitrarie e la ζ_1 è univocamente determinata dalla φ, mentre la ζ_2 dipende bensì dalla φ, ma può esserne determinata soltanto a meno di una determinazione, qualsiasi, della θ.

Avremo dunque

$$\zeta_1 = \sum \alpha_m(x, y) \frac{d^m\varphi}{dx^m} = A(\varphi),$$

dove le α_m sono funzioni determinate. Considerata la

$$q + [\alpha_0 z + \beta_0]r,$$

dove β_0 è una qualsiasi delle determinazioni possibili, possiamo ri-

durre simultaneamente $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ per mezzo di una trasformazione di z, lineare in z; e allora in base alla

$$(q\,,\varphi(x)q + [zA(\varphi) + \zeta_2]r) = \left[z D_y A(\varphi) + \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \right] r$$

si conclude che i coefficienti di A sono indipendenti da y (oltre che da z). Così, se θ è arbitraria, otteniamo il massimo gruppo di seconda specie sotto la forma

$$[6\,,1] \qquad \varphi(x)q + z[\alpha_1(x)\varphi' + \alpha_2(x)\varphi'' + \dots + \alpha_n(x)\varphi^{(n)}]r\,,\ \psi(x\,,y)r$$

131. — Resta ora il caso in cui θ sia definita da un sistema di equazioni differenziali. Poichè nel gruppo abbiamo le trasf. inf.

$$(16) \qquad q\,,\ xq + [z\alpha_1 + \beta_1]r\,,$$

(dove β_1 è ancora da determinare) l'insieme delle θ sarà trasformato in sè stesso dalle

$$\theta_y\,,\ x\theta_y - \alpha_1\theta\,;$$

più in generale esso sarà trasformato in sè stesso dalla operazione

$$(17) \qquad \varphi(x)\theta_y - A(\varphi)\theta\,.$$

Ora vedemmo al n. 105 come dal fatto che l'insieme delle θ è trasformato in sè dalle (16) risulta che le θ sono della forma

$$(18) \qquad \theta = \sum_{i=0}^{n} \mu_i(x) y^i + \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=0}^{n_j} \mu_{s,j}(x) y^s e^{\gamma_j(x) y}\,,$$

dove ciascuna delle $\mu_i\,,\mu_{s.j}$ è suscettibile di un certo insieme lineare di determinazioni; e questi insiemi possono essere legati gli uni agli altri da corrispondenze, espresse da equazioni differenziali lineari.

Ma nel caso presente, in base alla (17) si dimostra che *le funzioni $\mu_i\,,\mu_{s.j}$ sono tutte arbitrarie e indipendenti.*

Supponiamo in primo luogo che la A non sia identicamente nulla. Allora, applicando alla (18) la (17), otteniamo

$$(19) \quad \sum_{i=0}^{n} [(i+1)\mu_{i+1}\varphi - \mu_i A(\varphi)] y^i + \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=0}^{n_j} [\varphi(\gamma_j \mu_{s.j} + [s+1]\mu_{s+1.j}) - A(\varphi)\mu_{s.j}] y^s e^{\gamma_j y}\,.$$

Risulta di qui intanto che i coefficienti degli esponenziali

$$y^{n_j} e^{\gamma_j y},$$

corrispondenti ciascuno al massimo esponente di y, ammettono rispettivamente i moltiplicatori

$$\gamma_j \varphi - A(\varphi) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{20}$$

i quali, per una determinazione generica di φ, sono differenti, talchè concludiamo che i coefficienti

$$\mu_{n_j \cdot j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

sono fra loro *indipendenti.* È poi manifesto dalla forma del moltiplicatore (20) che ciascuno di codesti coefficienti è suscettibile di ogni possibile determinazione, cioè è *arbitrario.*

In base a quanto precede noi potremo trovare certamente nell'insieme delle θ una determinazione, in cui siano nulli tutti i coefficienti

$$\mu_{n_j \cdot j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

tranne uno, p. es. il primo che supporremo diverso dallo zero, cioè una funzione θ_1 della forma

$$\theta_1 = \mu_{n_1 \cdot 1} y^{n_1} e^{\gamma_1 y} + \mu_{n_1 - 1 \cdot 1} y^{n_1 - 1} e^{\gamma_1 y} + \ldots, \tag{18'}$$

dove i termini non scritti o sono razionali in y, o, se contengono un esponenziale

$$e^{\gamma_j y},$$

avranno per y un esponente u tale che per $j > 1$ sia $u < n_j$ e per $j = 1$, $u < n_1 - 1$. Applicando allora alla θ_1 la (17) troviamo che fra le θ deve trovarsi, per ogni qualsiasi φ, anche la

$$\left[\gamma_1 \varphi - A(\varphi)\right] \mu_{n_1 \cdot 1} y^{n_1} e^{\gamma_1 y} + \left[\mu_{n_1 - 1 \cdot 1}(\gamma_1 \varphi - A(\varphi)) + n_1 \varphi \mu_{n_1 \cdot 1}\right] y^{n_1 - 1} e^{\gamma_1 y} + \ldots,$$

dove i termini non scritti soddisfano ancora alle condizioni indicate

sopra; e se noi poniamo al posto di φ una soluzione ρ, non identicamente nulla, della equazione differenziale lineare (*)

$$\gamma_1\rho - A(\rho) = 0,$$

otterremo fra le θ una funzione

$$n_1\rho\mu_{n_1.1}y^{n_1-1}e^{\gamma_1 y} + \dots, \tag{21}$$

la quale è della forma (18) ma non contiene alcuno dei termini di massimo grado in y

$$y^{n_j}e^{\gamma_j y} \qquad (j=1,2,\dots,k),$$

mentre ne contiene almeno uno di quelli di grado immediatamente inferiore

$$y^{n_j-1}e^{\gamma_j y} \qquad (j=1,2,\dots,k).$$

Ora, come dianzi abbiamo ragionato sulla (18), possiamo adesso ragionare sulla (21) e sulle altre funzioni analoghe, contenenti gli altri esponenziali, e in tal guisa concludiamo che anche le

$$\mu_{n_j-1,j} \qquad (j=1,2,\dots,k)$$

sono arbitrarie e indipendenti fra loro e dalle

$$\mu_{n_j.j}.$$

È manifesto come per questa via si giunga da ultimo a stabilire che tutte le funzioni $\mu_{s.j}$ sono arbitrarie e fra loro indipendenti. Restano a considerare nella (18) le funzioni μ_i: ma considerazioni analoghe alle precedenti permettono di concludere che anch' esse sono arbitrarie e indipendenti fra loro e dalle $\mu_{s.j}$; cosicchè abbiamo che *le determinazioni delle* θ *sono della forma*

$$\underset{(l=0,1,\dots,n)}{\varphi_l(x)y^l} \qquad \underset{(j=1,2,\dots;\ s=0,1,\dots,n_j)}{\varphi_{s,j}(x)y^s e^{\gamma_j(x)y}}$$

Dianzi abbiamo escluso che la forma A possa essere identicamente nulla; ma anche questo caso si esaurisce facilmente.

(*) Codesta equazione ammette certamente soluzioni diverse da zero se non è identicamante nulla la A. Infatti la A è, come vedemmo, priva di termine di ordine zero, cosicchè la equazione suindicata non può ridursi ad una identità.

Anzitutto notiamo che sotto l'ipotesi posta l'insieme delle θ deve essere trasformato in sè dall'operazione

$$\varphi(x)\theta_y: \tag{17'}$$

in base a questa si trova come pocanzi che sono arbitrarie e indipendenti le

$$\mu_{n_j . j} \qquad (j = 1, 2, \dots, k);$$

e considerata ancora la funzione (18), avremo fra le determinazioni della θ, in base alla (17'), la

$$\varphi\gamma_1\mu_{n_1 . 1} y^{n_1} e^{\gamma_1 y} + \varphi\left[\gamma_1\mu_{n_1 - 1 . 1} + n_1\mu_{n_1 . 1}\right] y^{n_1 - 1} e^{\gamma_1 y} + \dots,$$

qualunque sia φ. Se allora da quest'ultima determinazione di θ, considerata per $\varphi = \gamma_1^{-1}$, sottragghiamo la (18'), otteniamo la

$$n_1\gamma_1^{-1}\mu_{n_1 . 1} y^{n_1 - 1} e^{\gamma_1 y} + \dots,$$

la quale non contiene nessun termine di massimo grado in y, ma ne ha almeno uno (il primo) di grado immediatamente inferiore al massimo, compatibile col relativo esponenziale. Possiamo quindi ripetere qui le considerazioni precedenti, e così dimostrare da ultimo che le $\mu_{s . j}$ sono tutte arbitrarie e fra loro indipendenti.

Restano da considerare i coefficienti $\mu_i(x)$ delle y^i. — Che le $\mu_{s . j}$ siano indipendenti dalle μ_i, risulta dal fatto che applicando successivamente n volte la (17) si trova una θ in cui tutte le μ_i sono nulle, mentre, per quanto si è detto prima, le $\mu_{s . j}$ non cessano di essere arbitrarie e indipendenti.

Ma con ciò non resta escluso a priori che le μ_i siano in qualche modo legate fra loro. Per constatare che questo caso effettivamente non è possibile, si prenda una determinazione di θ di massimo grado in y

$$\theta = \sum_{i=0}^{n} \mu_i(x) y^i$$

e si applichi ad essa successivamente $n - 1$ volte la (17'). Riprocedendo a ritroso, concluderemo successivamente che sono arbitrarie e indipendenti fra loro le

$$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1},$$

mentre per la μ_n avremo bensì che essa è indipendente dalle altre μ_i e dalle $\mu_{s,j}$, ma nulla potremo dir di più in generale. Trattandosi di una funzione di una sola variabile, la μ_n sarà o arbitraria o suscettibile di un numero finito di soluzioni linearmente indipendenti.

Insomma se la forma A è identicamente nulla le θ o hanno la forma trovata nel caso generale, oppure hanno la forma

$$\underset{(l=0,1,\dots,n-1}{\varphi_l(x)y^l} \quad , \; ; \quad \underset{i=1,2,\dots,h}{\rho_i(x)y^n} \quad , \; ; \quad \underset{j=1,2,\dots,k\ ;\ s=0,1,\dots,n_j)}{\varphi_{s\,.\,j}(x)y^s e^{\gamma_j(x)y}},$$

dove le ρ_i sono funzioni determinate.

132. — Ciò premesso, torniamo al nostro gruppo e supponiamo anzitutto che *la A non sia identicamente nulla*. Avremo un gruppo della forma

$$\varphi(x)q + [zA(\varphi) + \zeta_2(x\,,y)]r\,,\varphi_l(x)y^l r\,,\varphi_{s\,.\,j}(x)y^s e^{\gamma_j(x)y} r\,,$$

dove ζ_2 è determinata dalla φ a meno di una combinazione lineare delle

$$\varphi_l y^l\,,\varphi_{s\,.\,j}y^s e^{\gamma_j y}.$$

Ora dalla

$$(q\,,\varphi(x)q + [zA(\varphi) + \zeta_2]r) = \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} r$$

risulta

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \equiv 0 \qquad \left[\text{modd. } \varphi_l y^l\,,\varphi_{sj} y^s e^{\gamma_j y}\right]$$

e quindi

$$\zeta_2 \equiv \zeta(x)y^{n+1}\,,$$

dove ζ sarà determinata univocamente dalla φ, perchè altrimenti avremmo nel gruppo, contro l'ipotesi, almeno una trasf. inf. della forma

$$\alpha(x)y^{n+1}.$$

Sarà quindi

$$\zeta = B(\varphi)\,,$$

dove B rappresenta una forma differenziale lineare a coefficienti

indipendenti da y e z. Poichè fa parte del gruppo la trasf. inf. q, sarà $B(1) = 0$ e avremo

$$B(\varphi) = \sum_{m=1}^{p} \beta_m(x) \frac{d^m \varphi}{dx^m} .$$

Ma allora dalla

$$\varphi q + [zA(\varphi) + y^{n+1}B(\varphi)]r \, , \varphi_1 q + [zA(\varphi_1) + y^{n+1}B(\varphi_1)]r \equiv y^{n+1}[B(\varphi)A(\varphi_1) - B(\varphi_1)A(\varphi)]r$$

concludiamo che deve essere, per qualsiasi coppia di funzioni φ e φ_1,

$$B(\varphi)A(\varphi_1) - B(\varphi_1)A(\varphi) = 0 ;$$

il che, ove si tenga conto del fatto che la A non è identicamente nulla, richiede che sia identicamente

$$B = \mu A ,$$

dove μ è una funzione indipendente da y e z.

Scelta allora come nuova z la $z + \mu y^{n+1}$ riduciamo $\mu = 0$ e otteniamo il gruppo:

$$[6, \mathrm{II}]_1 \qquad \varphi(x)q + z\sum_{m=1}^{q} \alpha_m(x)\varphi^{(m)} r \, , \ \varphi_l(x)y^l r \, , \ \varphi_{s \cdot j}(x) y^s e^{\gamma_j(x) y} r$$
$$(l = 0, 1, \ldots, n \ ; \ j = 1, 2, \ldots, k \ ; \ s = 0, 1, \ldots, n_j)$$

Se, ferma restando l'ipotesi che la A non sia identicamente nulla, supponiamo che fra le determinazioni della θ manchino le $\varphi_l(x)y^l r$, si ottiene ancora il gruppo precedente, ove si sopprimano codeste trasf. inf.

133. — Esaminiamo in secondo luogo il caso in cui sia identicamente nulla la A: avremo un gruppo della forma

$$\varphi(x)q + \zeta_2(x, y)r \, , \varphi_l(x)y^l r \, , \rho_i(x)y^n r \, , \varphi_{s \cdot j}(x)y^s e^{\gamma_j(x)y} r$$
$$(l = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \ ; \ i = 1, 2, \ldots, h \ ; \ j = 1, 2, \ldots, k \ ; \ s = 0, 1, \ldots, n_j) .$$

Dalla

$$(q, \varphi(x)q + \zeta_2 r) = \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} r$$

risulta

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \equiv 0 \qquad \left[\text{modd. } \varphi_l y^l, \rho_i y^n, \varphi_{sj} y^s e^{\gamma_j y}\right]$$

e quindi

$$\zeta_2 \equiv \zeta(x) y^n + \rho y^{n+1}, \tag{22}$$

dove ζ dovrà dipendere da φ ed esserne determinata a meno di una combinazione lineare delle $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$. Perciò, se B è una forma differenziale lineare d'ordine h, avente per soluzioni le ρ_i [ed è notorio che β è determinata a meno di una funzione moltiplicatrice arbitraria, che qui intendiamo fissata ad arbitrio] la funzione $B(\zeta)$ sarà univocamente determinata dalla φ, talchè avremo

$$B(\zeta) = A(\varphi) \tag{23}$$

dove A è un'altra forma differenziale lineare determinata (che può in particolare ammettere come soluzione anche qualcuna delle ρ_i).

Abbiamo dunque che, per una data φ, la corrispondente ζ si determina integrando un'equazione differenziale lineare non omogenea (23), in ordine alla quale conosciamo un sistema fondamentale di soluzioni $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$ della relativa equazione omogenea. Basterà quindi considerare per ζ, corrispondentemente ad ogni data φ, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, p. es. la sua *soluzione principale* (*Hauptintegral*) e simbolicamente potremo rappresentare la ζ sotto la forma

$$\zeta = B^{-1} A(\varphi),$$

dove la operazione B^{-1}, *inversa* della B, è appunto multiforme e ammette come modulo di molteplicità l'insieme lineare delle ρ_i.

Resta a considerare, nella espressione (22) della ζ_2, la funzione ρ, la quale deve essere *univocamente* determinata dalla φ, e, al tempo stesso, appartenere all'insieme lineare delle ρ_i. Ora le operazioni funzionali distributive univoche (o corrispondenze analitiche lineari) che trasformano un insieme lineare di funzioni ad infinite dimensioni in un insieme ad un numero finito di dimensioni, furono studiate dal PINCHERLE (*). Esse hanno, in senso operatorio, carattere

(*) PINCHERLE-AMALDI: *Le operazioni distributive ecc.*, pagg. 140 e segg.

trascendente e non sono rappresentabili per mezzo di equazioni differenziali (d' ordine finito). Poichè qui consideriamo gruppi *continui* nel senso del LIE (cioè definiti da equazioni differenziali) avremo senz' altro $\rho = 0$ e otterremo il gruppo

$$[6, \text{II}]_2 \qquad \begin{gathered} \varphi(x)q + y^n B^{-1} A(\varphi) r \,,\; \varphi_l(x) y^l r \,,\; \rho_i(x) y^n r \,,\; \varphi_{s\,.\,j}(x) y^s e^{\gamma_j(x) y} r \\ {\scriptstyle l=0,1,\dots,n-1 \;;\; i=1,2,\dots,h \;;\; j=1,2,\dots,k \;;\; s=0,1,\dots,n_j} \\ \left(A(\varphi) = \sum_{m=1}^{p} \alpha_m(x) \varphi^{(m)} \;;\; B(\varphi) = \sum_{m=0}^{h} \beta_m(x) \varphi^{(m)} \;;\; B(\rho_i) = 0 \,. \right) \end{gathered}$$

In particolare se mancano le ρ_i avremo

$$[6, \text{II}]_3 \qquad \varphi(x)q + y^n A(\varphi) r \,,\; \varphi_l(x) y^l r \,,\; \varphi_{s\,.\,j}(x) y^s e^{\gamma_j(x) y} r \quad {\scriptstyle (c\,.\,s\,.)} \;;$$

e, se mancano le $\varphi_l(x) y^l$

$$[6, \text{II}]_4 \qquad \varphi(x)q + B^{-1} A(\varphi) r \,,\; \rho_i(x) r \,,\; \varphi_{s\,.\,j}(x) y^s e^{\gamma_j(x) y} r \quad {\scriptstyle (c\,.\,s)}$$

Infine, se mancano tanto le $\varphi_l y^l r$, quanto le $\rho_i y^n r$, avremo il gruppo

$$[6, \text{II}]_5 \qquad \varphi(x)q + A(\varphi) r \,,\; \varphi_{s\,.\,j}(x) y^s e^{\gamma_j(x) y} r \quad {\scriptstyle (c\,.\,s)}$$

134. — Se il sottogruppo intransitivo massimo è del tipo

$$\rho_i(x, y) r \qquad (i = 1, 2, \dots, h)$$

risulta da quanto dicemmo al n. 132 che le ρ_i sono indipendenti da y; e allora, in base a considerazioni implicite come casi particolari nei due numeri precedenti, troviamo il tipo

$$[6, \text{III}] \qquad \begin{gathered} \varphi(x)q + B^{-1} A(\varphi) r \,,\; \rho_i(x) r \\ {\scriptstyle i=1,2,\dots,h} \\ \left(A(\varphi) = \sum_{m=1}^{p} \alpha_m(x) \varphi^{(m)} \;;\; B(\varphi) = \sum_{m=0}^{p} \beta_m(x) \varphi^{(m)} \;;\; B(\rho_i) = 0 \right) \end{gathered}$$

135. — Pei *gruppi di terza specie* il gruppo generatore appartiene come caso particolare all'ultimo tipo ottenuto ed è perciò della forma

$$\varphi(x)q + D_x^{-1} A(\varphi)r \,,\, r$$

$$\left(A(\varphi) = \sum_{m=1}^{p} \alpha_m(x)\varphi^{(m)} \right).$$

Il gruppo massimo sarà semplicemente

[6, IV] $$\varphi(x)q \,,\, \psi_0(x, y)r \,,\, \psi_1(x, y)zr$$

Quando poi assumiamo come sottogruppo intransitivo massimo un gruppo del tipo [V] o [VI], cioè della forma

$$\psi(x, y)r \,,\, \theta(x, y)r \,,$$

dove la θ è definita da un sistema di equazioni differenziali, l'insieme delle θ dovrà essere trasformato in sè dalla operazione

$$\varphi(x)\theta_y \,,$$

talchè, in base alle stesse considerazioni del n. 131, troveremo i tre tipi seguenti:

[6, V]₁ $$\varphi(x)q \,,\, \psi(x, y)r \,,\, \varphi_l(x)y^l zr \,,\, \rho_i(x)y^n zr \,,\, \varphi_{s \cdot j}(x)y^s e^{\gamma_j(x)y} zr$$
$$(l=0, 1, \ldots, n-1 \,;\; i=1, 2, \ldots, h \,;\; j=1, 2, \ldots, k \,;\; s=0, 1, \ldots, n_j)$$

[6, V]₂ $$\varphi(x)q + zD_x^{-1} A(\varphi)r \,,\, \psi(x, y)r \,,\, zr \,,\, \rho_i(x)zr \,,\, \varphi_{s \cdot j}(x)y^s e^{\gamma_j(x)y} zr$$
$$\left(\begin{array}{c} i=1, 2, \ldots, h \,;\; j=1, 2, \ldots, k \,;\; s=0, 1, \ldots, n_j \\ A(\varphi) = \sum_{m=1}^{p} \alpha_m(x)\varphi^{(m)} \end{array} \right)$$

[6, VI] $$\varphi(x)q + zD_x^{-1} A(\varphi)r \,,\, \psi(x, y)r \,,\, zr \,,\, \rho_i(x)zr$$
$$(c \cdot s)$$

Se il sottogruppo intransitivo massimo è del tipo [VII], cioè della forma

$$\varphi_i(\mu)\sigma_i(x, y)r \,,\, \bar{\varphi}(\mu)zr$$

dove μ è una funzione determinata di x e y, basta tener conto della presenza nel gruppo della q per concludere, in base alle considerazioni del n. 117, che deve essere o $\mu = x$ o $\mu = y$.

Il secondo caso si esclude senz'altro, notando la forma delle alternate

$$\left(\varphi(x) q + z D_x^{-1} A(\varphi) r \,, \varphi_i(y) \sigma_i(x\,, y) r \right).$$

Quando poi il sottogruppo è della forma

$$\varphi_i(x) \sigma_i(x\,, y) r \,, \bar{\varphi}(x) z r \,,$$

abbiamo anzitutto

$$\varphi(x) q + z D_x^{-1} A(\varphi) r \equiv \varphi(x) q \,,$$

talchè, in base alla

$$(\varphi(x) q \,, \varphi_i(x) \sigma_i(x\,, y) r) = \varphi \varphi_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial y} r \qquad [\text{modd. } \varphi_j \sigma_j],$$

troviamo che dev'essere

$$\varphi \varphi_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial y} \equiv 0$$

e, in particolare, per $\varphi = \varphi_i = 1$,

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial y} \equiv 0 \,.$$

In queste equazioni differenziali i coefficienti sono indipendenti da y, e perciò se ne conclude che esiste per le σ_i un sistema fondamentale della forma

$$y^s e^{\gamma_t(x) y} \qquad (t = 1\,, 2\,, \ldots h \;;\; s = 0\,, 1\,, \ldots\,, n_t)\,.$$

Otteniamo cioè il gruppo

$$[6\,, \text{VII}] \qquad \varphi(x) q \,, \varphi_{s \cdot t}(x) y^s e^{\gamma_t(x) y} r \,, \bar{\varphi}(x) z r \qquad (t = 1, 2, \ldots, k \;;\; s = 0, 1, \ldots, n_t)$$

Analogamente nel caso di un sottogruppo del tipo [VIII] o [IX] si trovano i due tipi:

$$[6\,, \text{VIII}] \qquad \varphi(x) q + z D_x^{-1} A(\varphi) r \,, \varphi_{s \cdot t}(x) y^s e^{\gamma_t(x) y} r \,, \rho_i(x) z r \,, z r \qquad (t = 1, 2, \ldots, k \;;\; s = 0, 1, \ldots, n_t \;;\; i = 1, 2, \ldots, h)$$

[6, IX] $$\varphi(x)q\,,\ \sigma_i(x)r\,,\ zr \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

136. — Fra i *gruppi di quarta specie* avremo anzitutto il solito gruppo massimo

[6, X] $$\varphi(x)q\,,\ \psi_0(x\,,y)r\,,\ \psi_1(x\,,y)zr\,,\ \psi_2(x\,,y)z^2r$$

Quando poi si assume un sottogruppo del tipo [XI], cioè della forma

$$\varphi_0(\mu)r\,,\ \varphi\ (\mu)zr\,,\ \varphi_2(\mu)z^2r\,,$$

dove μ è una funzione determinata di x e y, si conclude come al n. 117 che deve essere o $\mu=y$ o $\mu=x$; e il primo caso si esclude in base all'alternata

$$(\varphi(x)q\,,\ \varphi_0(y)r) = \varphi(x)\varphi'_0(y)r\,;$$

onde si ha soltanto il gruppo

[6, XI] $$\varphi(x)q\,,\ \varphi_0(x)r\,,\ \varphi_1(x)zr\,,\ \varphi_2(x)z^2r$$

Da ultimo si ha il gruppo

[6, XII] $$\varphi(x)q\,,\ r\,,\ zr\,,\ z^2r\ \ ;$$

e analogamente si trovano pei *gruppi di quinta specie* i tre tipi:

[6, XIII] $\varphi(x)q\,,\ \chi(x\,,y\,,z)r$ [6, XIV] $\varphi(x)q\,,\ \psi(x\,,z)r$ [6, XV] $\varphi(x)q\,,\ \bar{\varphi}(z)r$

Notiamo che tutti i gruppi accorciati [7]-[30] contengono come sottogruppo il gruppo [6], cosicchè per avere i corrispondenti gruppi di quarta e quinta specie basterà in ogni singolo caso aggiungere ai gruppi [6, X]-[6, XV] le trasf. inf. che il gruppo accorciato contiene oltre la $\varphi(x)q$. — Perciò nel seguito, occupandoci dei gruppi accorciati [7]-[30], lascieremo senz'altro da parte i gruppi di quarta e quinta specie.

[7] Gruppo accorciato: $\varphi(x)q \, , \alpha_i(x)yq \qquad (i = 1 \, , 2 \, , \ldots , t)$.

137. — Consideriamo anzitutto il caso in cui le α_i si riducono ad una sola e questa è costante. Si trova allora, prendendo le mosse dal gruppo **[6]**, che i gruppi di prima specie corrispondenti sono riducibili o a gruppi in due sole variabili o ai gruppi

$$[7]_1 \qquad \varphi(x)q + [\varphi^{(s)} + \gamma_{s+1}(x)\varphi^{(s+1)} + \ldots + \gamma_n(x)\varphi^{(n)}]r \, , yq + zr$$

Ciò premesso, passiamo al caso in cui le α_i non si riducono alla sola *costante* cioè consideriamo un gruppo della forma

$$\varphi(x)q + A(\varphi)r \, , \alpha_i(x)yq + \beta_i(x \, , y \, , z)r \qquad (i = 1 \, , 2 \, , \ldots , t)$$

dove

$$A(\varphi) = \frac{1}{s\,!} \varphi^{(s)} + \frac{1}{(s+1)\,!} \gamma_{s+1}\varphi^{(s+1)} + \ldots + \frac{1}{n\,!} \gamma_n\varphi^{(n)} \, .$$

In base alle

$$(q \, , \alpha_i yq + \beta_i r) = \alpha_i q + \frac{\partial \beta_i}{\partial y} r \, , (x^l q \, , \alpha_i yq + \beta_i r) = x^l \alpha_i q + x^l \frac{\partial \beta_i}{\partial y} r \qquad (l = 1 \, , 2 \, , \ldots , s-1)$$

si trova

$$(24) \qquad \frac{\partial \beta_i}{\partial y} = A(\alpha_i) \; , \; x^l \frac{\partial \beta_i}{\partial y} = A(x^l \alpha_i) \quad (i = 1 \, , 2 \, , \ldots t \; ; \; l = 1 \, , 2 \, , \ldots , s-1) \, .$$

ossia, sviluppando secondo la formola del D'ALEMBERT,

$$(25) \qquad A'(\alpha_i) = A''(\alpha_i) = \ldots = A^{(s-1)}(\alpha_i) = 0 \, .$$

D' altra parte la

$$(x^s q + r \, , \alpha_i yq + \beta_i r) = x^s \alpha_i q + \left[x^s \frac{\partial \beta_i}{\partial y} + \frac{\partial \beta_i}{\partial z} \right] r$$

implica

$$x^s \frac{\partial \beta_i}{\partial y} + \frac{\partial \beta_i}{\partial z} = A(x^s \alpha_i)$$

ossia sviluppando e tenendo conto delle (24) (25)

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial z} = A^{(s)}(\alpha_i) \qquad (i = 1 \, , 2 \, , \ldots , t) \, .$$

Di qui e dalle (24) risulta

$$\beta_i = yA(\alpha_i) + zA^{(s)}(\alpha_i) + \beta_i(x)\,;$$

e allora l' alternata

$$(\varphi(x)q + A(\varphi)r\,, \alpha_i yq + [yA(\alpha_i) + zA^{(s)}(\alpha_i) + \bar{\beta}_i]r) =$$
$$= \alpha_i\varphi q + [\varphi A(\alpha_i) + A^{(s)}(\alpha_i)A(\varphi)]r$$

dà l' equazione

$$\varphi A(\alpha_i) + A^{(s)}(\alpha_i)A(\varphi) = A(\alpha_i\varphi)\,, \tag{26}$$

la quale, sviluppata, si spezza nelle

$$\begin{cases} \gamma_{s+1}A^{(s)}(\alpha_i) = A^{(s+1)}(\alpha_i) \\ \gamma_{s+2}A^{(s)}(\alpha_i) = A^{(s+2)}(\alpha_i) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \gamma_n A^{(s)}(\alpha_i) = A^{(n)}(\alpha_i) \end{cases}$$

L' ultima equazione, che si può scrivere

$$\gamma_n[A^{(s)}(\alpha_i) - \alpha_i] = 0$$

implica $\gamma_n = 0$, giacchè in caso contrario dovrebbe essere

$$A^{(s)}(\alpha_i) = \alpha_i$$

e allora la penultima equazione darebbe

$$\gamma_n\alpha'_i = 0$$

e si ricadrebbe sul caso escluso in cui le α_i si riducono ad una sola e costante. Avremo quindi successivamente

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} = \dots = \gamma_{s+1} = 0:$$

e ancora applicando la (26) risulta $s = 1$; talchè sarà

$$A(\varphi) = \varphi'\ \ ,\ \beta_i = y\alpha'_i + z\alpha_i + \beta_i(x)\,.$$

Ma dalla

$$\left(\alpha_i yq + \left[y\alpha'_i + z\alpha_i + \bar{\beta}_i\right]r\,, \alpha_j yq + \left[y\alpha'_j + z\alpha_j + \bar{\beta}_j\right]r\right) = \left[\alpha_j\bar{\beta}_i - \alpha_i\bar{\beta}_j\right]r$$

concludiamo

$$\alpha_j\bar{\beta}_i - \alpha_i\bar{\beta}_j = 0$$

ossia

$$\beta_i = \mu(x)\alpha_i$$

e basta assumere come nuova z la $z + \mu$ per ottenere il gruppo

$$[7]_2 \qquad \varphi(x)q + \varphi' r \ , \ \alpha_i(x)yq + \left[y\alpha'_i + z\alpha_i \right] r \qquad (i = 1, 2, \dots, t)$$

Dopo quanto precede, resta soltanto da considerare il caso in cui la forma A sia identicamente nulla, cioè il caso di un gruppo della forma

$$\varphi(x)q \ , \ \alpha_i yq + \beta_i(x, y, z)r \, .$$

Anzitutto è chiaro che le β_i saranno indipendenti da y, mentre d'altro canto esse non saranno tutte nulle, giacchè in tal caso avremmo un gruppo in due variabili. Supposto

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_{s-1} = 0 \, , \beta_s \lesseqgtr 0$$

riduciamo $\beta_s = 1$ ponendo

$$z' = \int \frac{dz}{\beta_s} :$$

dopo di che dalla

$$(\alpha_s yq + r \, , \alpha_j yq + \beta_j r) = \frac{\partial \beta_j}{\partial z} r$$

concludiamo che le β_j sono indipendenti da z e otteniamo il gruppo

$$[7]_3 \quad \varphi(x)q \, , \alpha_1(x)yq \, , \dots , \alpha_{s-1}(x)yq \, , \alpha_s(x)yq + r \, , \alpha_{s+1}(x)yq + \beta_{s+1}(x)r \, , \dots , \alpha_t(x)yq + \beta_t(x)r$$

138. — I *gruppi di seconda specie* si otterranno aggiungendo ai gruppi $[6, \mathrm{I}]$-$[6, \mathrm{III}]$ t trasf. inf. della forma

$$\alpha_i(x)yq + [z\beta_i(x, y) + \beta_i(x, y)]r \qquad (i = 1, 2, \dots, t) \, .$$

Se prendiamo le mosse da un gruppo della forma

$$\varphi(x)q + zA(\varphi)r \, , \theta(x, y)r$$

dove

$$A(\varphi)=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\gamma_m(x)\varphi^{(m)}$$

avremo, in base alle

$$(\varphi q+zA(\varphi)r\,,\,\alpha_i yq+[z\beta_i+\bar{\beta}_i]r)=\alpha_i\varphi q+\left[z\varphi\frac{\partial\beta_i}{\partial y}+\varphi\frac{\partial\bar{\beta}_i}{\partial y}-\beta_i A(\varphi)\right]$$

le equazioni

$$\varphi\frac{\partial\beta_i}{\partial y}=A(\varphi\alpha_i)$$

dalle quali sviluppando si ricava

$$A'(\alpha_i)=A''(\alpha_i)=\ldots=A^{(n)}(\alpha_i)=0$$
$$A(\alpha_i)=\frac{\partial\beta_i}{\partial y}\,.$$

Ora le equazioni della prima linea ci dicono che la forma differenziale lineare d'ordine $n-1$ A' deve ammettere le n radici

$$\alpha_i\,,\,x\alpha_i\,,\,\ldots\,,\,x^{n-1}\alpha_i$$

le quali sono linearmente indipendenti; cosicchè si conclude che la A' deve essere identicamente nulla, e, poichè la A manca del termine di ordine zero, è tale altresì la A medesima.

Avremo quindi ancora

$$\frac{\partial\beta_i}{\partial y}=0$$

e quando la θ sia arbitraria avremo il gruppo

[7, I] $$\left|\begin{matrix}\varphi(x)q\,,\,\alpha_i(x)yq+z\beta_i(x)r\,,\,\psi(x\,,\,y)r\\ {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,r)}\end{matrix}\right|$$

Se prendiamo le mosse da uno qualsiasi dei gruppi [6, II], la

$$\left(\alpha_i yq+[z\beta_i+\bar{\beta}_i]r\,,\,\varphi_{s\cdot j}(x)y^s e^{\gamma_j(x)y}r\right)=[s\alpha_i-\cdot\beta_i+\gamma_i\alpha_i y]\varphi_{s\cdot j}y^s e^{\gamma_j y}$$

ci dice che tutte le γ_j sono nulle.

Ciò posto se partiamo dal gruppo $[6\,,\mathrm{II}]_1$, cioè se consideriamo un gruppo della forma

$$\varphi(x)q\,,\ \alpha_i(x)yq + [\beta_i(x\,,y)z + \bar{\beta}_i(x\,,y)]r\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$
$$(i=1,2,\dots,t\ ;\ l=0,1,\dots,n-1)$$

si ritrova subito

$$\frac{\partial\beta_i}{\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial\bar{\beta}_i}{\partial y} \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \varphi_l y^l]$$

e quindi

$$\bar{\beta}_i \equiv \gamma_i(x)y^n\,.$$

Resta infine da tener conto della

$$(\alpha_i yq + [z\beta_i(x) + \gamma_i(x)y^n]r\,,\ \alpha_j yq + [z\beta_j(x) + \gamma_j(x)y^n]r) =$$
$$= \{[n\alpha_i - \beta_i]\gamma_j - [n\alpha_j - \beta_j]\gamma_i\}\, y^n r$$

la quale implica

$$[n\alpha_i - \beta_i]\gamma_j - [n\alpha_j - \beta_j]\gamma_i = 0\,.$$

Avremo dunque i seguenti tre casi

$$\beta_i = n\alpha_i\,,\ \gamma_j = 0\,,\ \gamma_j = \mu(x)[n\alpha_j - \beta_j]$$

dove μ è una funzione determinata. Ma il terzo caso si riduce al secondo ove si scelga come nuova z la

$$z - \mu y^n\,,$$

talchè otteniamo i due gruppi seguenti:

$$[7\,,\mathrm{II}]_1 \qquad \left|\ \begin{gathered}\varphi(x)q\,,\ \alpha_i(x)yq + [n\alpha_i z + \gamma_i(x)y^n]r\,,\ \varphi_l(x)y^l r \\ (i=1,2,\dots,t\ ;\ l=0,1,\dots,n-1)\end{gathered}\ \right|\,.$$

$$[7\,,\mathrm{II}]_2 \qquad \left|\ \begin{gathered}\varphi(x)q\,,\ \alpha_i(x)yq + \beta_i(x)zr\,,\ \varphi_l(x)y^l r \\ (i=1,2,\dots,t\ ;\ l=0,1,\dots,n-1)\end{gathered}\ \right|$$

139. — Corrispondentemente al gruppo $[6\,,\mathrm{II}]_2$ avremo da considerare un gruppo della forma

$$\varphi(x)q + y^n B^{-1}A(\varphi)r\,,\ \alpha_i(x)yq + [z\beta_i + \bar{\beta}_i]r\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ \rho_j(x)y^n r$$
$$(i=1,2,\dots,t\ ;\ l=0,1,\dots,n-1\ ;\ j=1,2,h),$$

dove B è una forma differenziale lineare d'ordine h, avente per radici $\rho_1, \dots, \rho_h$ ed A è un'altra forma differenziale lineare nella quale manca il termine di ordine zero.

Anche qui le β_i sono indipendenti da y; e in base alla

$$(\alpha_i yq + [z\beta_i + \bar{\beta}_i]r, \rho_j y^n r) = [n\alpha_i - \beta_i]\rho_j y^n r$$

si conclude

$$\beta_i = n\alpha_i + c_i \tag{27}$$

dove le c_i sono costanti date.

D'altra parte la

$$(q, \alpha_i yq + [\beta_i z + \bar{\beta}_i]r) = \alpha_i q + \frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial y} r$$

dà

$$\frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial y} \equiv y^n B^{-1} A(\alpha_i)$$

e quindi

$$\bar{\beta}_i \equiv \gamma_i(x) y^{n+1} + \lambda_i(x) y^n$$

dove si è posto

$$\gamma_i(x) = \frac{1}{n+1} B^{-1} A(\alpha_i). \tag{28}$$

E allora, alternando le $\alpha_i yq + \dots$, $\alpha_j yq + \dots$, troviamo che deve essere

$$\gamma_j[(n+1)\alpha_i - \beta_i] - \gamma_i[(n+1)\alpha_j - \beta_j] = 0 \tag{29}$$

e quindi si verificherà uno dei tre casi (cfr. n. prec.)

a) $\beta_i = (n+1)\alpha_i$

b) $\gamma_i = 0$

c) $\gamma_i = \mu(x)[(n+1)\alpha_i - \beta_i]$.

Esaminiamo dapprima i casi *a*) e *b*) che conducono ad uno stesso resultato.

Nel caso *a*), tenuto conto delle (27), avremo senz'altro

$$\alpha_i = c_i$$

e le α_i si ridurranno ad una sola che potremo supporre uguale ad 1.

Nel caso *b*), in base alle (28), dovremo avere

$$A(\alpha_i) = 0\,,$$

il che implica ancora, se A non è identicamente nulla, che tutte le α_i siano costanti. Infatti dalla

$$(\varphi q + y^n B^{-1} A(\varphi) r\,,\, \alpha_i y q + \{ [n \alpha_i + c_i] z + \lambda_i(x) y^n \} r) \equiv$$

$$\equiv \alpha_i \varphi q + c_i y^n B^{-1} A(\varphi) r$$

risulta

$$B^{-1} A(\alpha_i \varphi) \equiv c_i B^{-1} A(\varphi) \qquad [\text{modd. } \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_h]$$

ossia

$$A(\alpha_i \varphi) = c_i A(\varphi)$$

e quindi

$$\alpha_i = c_i\,.$$

Ciò premesso, supponiamo di avere un'unica trasf. inf. della forma

$$yq + [(n+1)z + \bar\beta(x, y)] r$$

la quale, combinata con la $\varphi q + \ldots$ dà

$$\varphi \frac{\partial \bar\beta}{\partial y} \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \varphi_l y^l, \rho_i y^n]\,.$$

e quindi

$$\bar\beta \equiv \lambda(x) y^n\,.$$

Abbiamo così il gruppo

$$[7, \text{II}]_3 \qquad \boxed{\begin{array}{c} \varphi(x) q + y^n B^{-1} A(\varphi) r\,,\, yq + [(n+1)z + \lambda(x) y^n] \\ \varphi_l(x) y^l r\,,\, \rho_i(x) y^n r \\ {\scriptstyle (l = 0, 1, n-1\,;\; i = 1, 2, \ldots, h)} \end{array}}$$

Se poi si verifica il caso *c*) basta porre

$$z' = z - \mu(x) y^{n+1}$$

per ridurre $\mu = 0$. Ma con siffatto cambiamento di variabile la $\varphi q + \ldots$ diventa

$$\varphi(x)q + y^n[B^{-1}A(\varphi) - (n+1)\mu(x)\varphi]r, \tag{30}$$

e questa trasf. inf., combinata con la

$$\alpha_i yq + [(n\alpha_i + c_i)z + \lambda_i(x)y^n]r$$

implica

$$c_i[B^{-1}A(\varphi) - (n+1)\mu(x)\varphi] \equiv B^{-1}A(\alpha_i\varphi) - (n+1)\mu(x)\alpha_i\varphi \quad [\text{modd. } \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_h]$$

ossia, eseguendo sui due membri la B

$$A([c_i - \alpha_i]\varphi) = (n+1)B\Big((c_i - \alpha_i)\mu(x)\varphi\Big).$$

Questa equazione deve sussistere *qualunque sia la* φ, cosicchè o dovremo avere $\alpha_i = c_i$, e allora ricadiamo sul caso già considerato dianzi; oppure sarà identicamente

$$A(\varphi) = (n+1)B(\mu\varphi)$$

e sotto quest' ultima ipotesi sarà identicamente

$$B^{-1}A(\varphi) = (n+1)\mu(x)\varphi,$$

talchè la (30) si ridurrà a $\varphi(x)q$.

Otteniamo così i due gruppi

$[7, \text{II}]_4$

$$\varphi(x)q, \alpha_i(x)yq + (n\alpha_i + c_i)zr, \varphi_l(x)y^l r, \rho_j(x)y^n r$$
$$(i = 1, 2, \ldots, t; \; l = 0, 1, \ldots, n-1; \; j = 1, 2, \ldots, h)$$

$[7, \text{II}]_5$

$$\varphi(x)q, \alpha_i(x)yq + [n\alpha_i z + \lambda_i(x)y^n]r, \varphi_l(x)y^l r, \rho_j(x)y^n r$$
$$(i = 1, 2, t; \; l = 0, 1, \ldots, n-1; \; j = 1, 2, \ldots, h)$$

140. — Considerando, in corrispondenza di $[6, \text{II}]_3$, un gruppo della forma

$$\varphi(x)q + y^n A(\varphi)r, \alpha_i(x)yq + [\beta_i z + \bar{\beta}_i]r, \varphi_l y^l r \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

si trova agevolmente

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial y} = 0, \; \bar{\beta}_i \equiv \frac{1}{n+1} y^{n+1} A(\alpha_i) + \lambda_i(x) y^n$$

e allora dalla

$$\left(\varphi q + y^n A(\varphi) r \, , \alpha_i y q + \left[\beta_i(x) z + \bar{\beta}_i \right] r \right) = \alpha_i \varphi q + \left[(\beta_i - n\alpha_i) y^n A(\varphi) + \varphi \frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial y} \right] r$$

risulta

$$A(\varphi\alpha_i) = \varphi A(\alpha_i) + (\beta_i - n\alpha_i) A(\varphi) \, .$$

Questa equazione, ove si ponga

$$A = \varphi' + \frac{1}{2\,!} \gamma_2 \varphi'' + \dots + \frac{1}{n\,!} \gamma_n \varphi^{(n)}$$

si spezza nelle

$$\begin{aligned} A'(\alpha_i) &= \beta_i - n\alpha_i \\ A''(\alpha_i) &= \gamma_2(\beta_i - n\alpha_i) \\ &\dots\dots\dots \\ A^{(n)}(\alpha_i) &= \gamma_n(\beta_i - n\alpha_i) \, , \end{aligned}$$

dalle quali risulta

$$\beta_i = (n+1)\alpha_i$$

e inoltre

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} = \dots = \gamma_2 = 0$$

oppure

$$\alpha'_i = 0 \, .$$

D' altra parte l' alternata

$$\left(\alpha_i y q + \left[\beta_i(x) z + \frac{1}{n+1} y^{n+1} A(\alpha_i) + \lambda_i(x) y^n \right] r \, , \right.$$

$$\left. \alpha_j y q + \left[\beta_j(x) z + \frac{1}{n+1} y^{n+1} A(\alpha_i) + \lambda_j(x) y^n \right] r \right) = [\alpha_j \lambda_i - \alpha_i \lambda_j] y^n r$$

ci dice che deve essere

$$\alpha_j \lambda_i - \alpha_i \lambda_j = 0 \, ,$$

talchè si può senz' altro supporre $\lambda_i = 0$; e nel primo caso otteniamo il gruppo

$$[7\, , \mathrm{II}]_6 \qquad \left| \; \underset{(l=0,1,\dots,n-1)}{\varphi(x) q + y^n \varphi' r \, , \alpha_i y q + \left[(n+1)\alpha_i z + \frac{1}{n+1} y^{n+1} \alpha' \right] r \, , \varphi_l(x) y^l r} \; \right|$$

Quando invece tutte le α_i si riducono alla sola costante, troviamo

[7, II]$_7$
$$\varphi(x)q + y^n \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m!} \alpha_m(x)\varphi^{(m)} r\,,\; yq + (n+1)zr\,,\; \varphi_l(x)y^l r \quad (l=0,1,\dots,n-1)$$

I gruppi [6, II]$_4$, [6, II]$_5$ conducono qui manifestamente a gruppi corrispondenti ad un sottogruppo intransitivo del tipo [III].

Prendendo le mosse dal gruppo [6, III], si trovano, con una discussione analoga a quella del n. prec. i tipi seguenti:

[7, III]$_1$
$$\varphi(x)q + B^{-1}A(\varphi)r\,,\; yq + zr\,,\; \rho_j(x)r \quad (i=1,2,\dots,h)$$
$$\left(A = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m(x)\varphi^{(m)}\,,\; B = \sum_{m=0}^{h} \beta_m(x)\varphi^{(m)}\,,\; B(\rho_j)=0\right)$$

[7, III]$_2$
$$\varphi(x)q\,,\; \alpha_i(x)yq + \sigma_i zr\,,\; \rho_j(x)r \quad (i=1,2,\dots,t\,;\; j=1,2,\dots,h)$$

[7, III]$_3$
$$\varphi(x)q\,,\; \alpha_i(x)yq + \lambda_i(x)r\,,\; \rho_j(x)r \quad (i=1,2,\dots,t\,;\; j=1,2,\dots,h)$$

141. — Il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie* è il gruppo [7, III]$_3$, cosicchè otteniamo i gruppi seguenti:

[7, IV]
$$\varphi(x)q\,,\; \alpha_i(x)yq\,,\; \psi_0(x,y)r\,,\; \psi_1(x,y)zr \quad (i=1,2,\dots,t)$$

[7, V]$_1$
$$\varphi(x)q\,,\; \alpha_i(x)yq\,,\; \psi(x,y)r\,,\; \varphi_l(x)y^l zr \quad (i=1,2,\dots,h\,;\; l=0,1,\dots,n-1)$$

[7, V]$_2$
$$\varphi(x)q\,,\; yq\,,\; \psi(x,y)r\,,\; \varphi_l(x)y^l zr\,,\; \rho_j(x)y^n zr \quad (l=0,1,\dots,n-1\,;\; j=1,2,\dots,h)$$

[7, VI]
$$\varphi(x)q\,,\; \alpha_i(x)yq + \beta_i(x)zr\,,\; \psi(x,y)r\,,\; zr\,,\; \rho_j(x)zr \quad (i=1,2,t\,;\; j=1,2,\dots,h)$$

[7, VII] $$\varphi(x)q, \alpha_i(x)yq, \varphi_l(x)y^l r, \bar{\varphi}(x)zr \quad (i=1,2,\dots,t;\ l=0,1,\dots,n-1)$$

[7, VIII] $$\varphi(x)q, \alpha_i(x)yq + \beta_i(x)zr, \varphi_l(x)y^l r, zr, \rho_j(x)zr \quad (i=1,2,\dots,t;\ l=0,1,\dots,n-1)$$

[7, IX] $$\varphi(x)q, \alpha_i(x)yq, \sigma_j(x)r, zr \quad (i=1,2,\dots,t;\ j=1,2,\dots,h)$$

[8] **Gruppo accorciato**: $\varphi_0(x)q, \varphi_1(x)yq$.

142. — Converrà manifestamente prender le mosse dai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [6]: $\varphi_0(x)q$. Cominciando dai *gruppi di prima specie*, consideriamo il gruppo [6] e anzitutto occupiamoci del caso in cui sia $s=1$; cioè partiamo dal gruppo

$$\varphi_0(x)q + A(\varphi_0)r$$

dove

$$A(\varphi_0) = \varphi'_0 + \frac{1}{2!}\alpha_2(x)\varphi'' + \dots + \frac{1}{n!}\alpha_n(x)\varphi^{(n)},$$

e aggiungiamo ad essa una schiera di trasf. inf. della forma

$$\varphi_1(x)yq + B(\varphi_1)r,$$

dove B rappresenta una forma differenziale lineare.

Dalle alternate

$$(q, \varphi_1(x)yq + B(\varphi_1)r) = \varphi_1 q + D_y B(\varphi_1)r$$
$$(xq + r, \varphi_1 yq + B(\varphi_1)r) = x\varphi_1 q + [xD_y B(\varphi_1) + D_z B(\varphi_1)]r$$

discende

$$D_y B(\varphi_1) = A(\varphi_1), \quad D_z B(\varphi_1) = A(x\varphi_1) - xA(\varphi_1).$$

Ma è noto (*) che

$$A(x\varphi_1) - xA(\varphi_1) = A'(\varphi_1),$$

(*) PINCHERLE-AMALDI, *Op. cit.*, pag., 110.

dove A' è la derivata funzionale della forma A; talchè avremo

$$B(\varphi_1) = yA(\varphi_1) + zA'(\varphi_1) + \bar{B}(\varphi_1)$$

dove $\bar{B}$ rappresenta una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y e da z.

Ciò posto, abbiamo

$$\left(\varphi_1 yq + \left[yA(\varphi_1) + zA'(\varphi_1) + \bar{B}(\varphi_1)\right]r, \varphi_2 yq + \left[yA(\varphi_2) + zA'(\varphi_2) + B(\varphi_2)\right]r\right) =$$

$$= \left\{ y\left[A(\varphi_2)(\varphi_1 - A'(\varphi_1)) - A(\varphi_1)(\varphi_2 - A'(\varphi_2))\right] + A'(\varphi_2)B(\varphi_1) - A'(\varphi_1)B(\varphi_2) \right\} r;$$

e di qui risultano le due equazioni simboliche

$$a) \qquad A(\varphi_2)(\varphi_1 - A'(\varphi_1)) - A(\varphi_1)(\varphi_2 - A'(\varphi_2)) = 0$$

$$b) \qquad A'(\varphi_2)B(\varphi_1) - A'(\varphi_1)B(\varphi_2) = 0$$

Ora supposto che la A non sia identicamente nulla, la a) implica o l'identità funzionale

$$\varphi_1 - A'(\varphi_1) = 0$$

oppure la

$$\varphi_1 - A'(\varphi_1) = \mu(x)A(\varphi_1),$$

dove $\mu(x)$ è una funzione determinata di x. Ma si conclude agevolmente, identificando i coefficienti, che nell'uno e nell'altro caso la A è del primo ordine. Avremo precisamente

$$A = D_x \text{ , ossia } A(\varphi) = \varphi' ;$$

cosicchè la b) diventa

$$\varphi_2 B(\varphi_1) - \varphi_1 B(\varphi_2) = 0 ;$$

e di qui discende

$$\text{o} \quad B = 0 \quad \text{oppure} \quad B(\varphi_1) = \nu(x)\varphi_1$$

dove ν è una funzione determinata di x. Ma basta assumere $z + \nu$ come nuova z per ridurre $\nu = 0$ e otteniamo il gruppo

$$[8]_1 \qquad \left| \varphi_0(x)q + \varphi'_0 r, \varphi_1(x)yq + [y\varphi'_1 + z\varphi_1]r \right|$$

Consideriamo in secondo luogo il gruppo [6] per s maggiore di 1; cioè supponiamo che la forma A sia del tipo

$$A(\varphi) = \varphi^{(s)} + \frac{1}{(s+1)!}\alpha_{s+1}(x)\varphi^{(s+1)} + \dots + \frac{1}{n!}\alpha_n(x)\varphi^{(n)} \quad , \; s > 1 .$$

Allora avremo ancora

$$D_y B(\varphi_1) = A(\varphi_1) ;$$

ma dalla

$$(xq \, , \varphi_1 yq + B(\varphi_1)r) = x\varphi_1 q + xD_y B(\varphi_1)r$$

risulta

$$xA(\varphi_1) = A(x\varphi_1)$$

ossia

$$A'(\varphi_1) = 0 .$$

Ma questa identità funzionale è assurda, perchè l'annullarsi (identico) della derivata funzionale caratterizza le forme differenziali lineari di ordine zero, mentre la A dovrebbe essere per ipotesi almeno di ordine $s > 1$.

Dopo ciò non resta più che esaminare il caso in cui la forma A è identicamente nulla, cioè il caso di un gruppo

$$\varphi_0(x)q \, , \varphi_1(x)yq + B(\varphi_1)r ,$$

dove B sarà una forma differenziale lineare, i cui coefficienti saranno indipendenti da y. Sia

$$B(\varphi_1) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}\beta_m(x \, , z)\varphi^{(m)} .$$

Se è $\beta_0 \gtrless 0$, riduciamola ad 1, assumendo come nuova z la

$$\int \frac{dz}{\beta_0} ;$$

dopo di che dalla

$$(yq + r \, , \varphi_1 yq + B(\varphi_1)r) = D_z B(\varphi_1)r$$

concludiamo che i coefficienti β_m di B sono indipendenti anche da z.

Se poi è $\beta_0 = 0$ e più in generale $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{s-1} = 0$ e $\beta_s \gtrless 0$, si ridurrà $\beta_s = 1$ e otterremo il gruppo

$$[8]_2 \qquad \varphi_0(x)q \,,\, \varphi_1(x)yq + \left[\frac{1}{s!}\varphi^{(s)} + \frac{1}{(s+1)!}\beta_{s+1}(x)\varphi^{(s+1)} + \ldots + \frac{1}{n!}\beta_n(x)\varphi^{(n)}\right]r$$

143. — Passiamo ai *gruppi di seconda specie* e cominciamo dal gruppo [6, I] (n. 130)

$$\varphi_0(x)q + z\left[\alpha_1(x)\varphi'_0 + \frac{1}{2!}\alpha_2(x)\varphi''_0 + \ldots + \frac{1}{n!}\alpha_n(x)\varphi^{(n)}\right]r \,,\, \psi(x\,,y)r$$

o, come noi scriveremo,

$$\varphi_0(x)q + zA(\varphi_0)r \,,\, \psi(x\,,y)r \,,$$

e aggiungiamo ad esso una trasf. inf.

$$\varphi_1(x)yq + zB(\varphi_1)r \,,$$

dove B è una forma differenziale lineare, i cui coefficienti sono indipendenti da z.

Allora in base alla

$$(\varphi_0 q + zA(\varphi_0)r \,,\, \varphi_1 yq + zB(\varphi_1)r) = \varphi_0\varphi_1 q + z\varphi_0 D_y B(\varphi_1)r$$

risulta

$$\varphi_0 D_y B(\varphi_1) = A(\varphi_0\varphi_1) \,,$$

ossia, sviluppando il secondo membro,

$$\varphi_0 D_y B(\varphi_1) = \varphi_0 A(\varphi_1) + \varphi'_0 A'(\varphi_1) + \ldots + \frac{1}{n!}\varphi_0^{(n)} A^{(n)}(\varphi_1) \,;$$

onde, identificando rispetto a φ_0, si trova

$$A' = 0 \,.$$

Ma la A manca del termine d'ordine zero, talchè avremo identicamente

$$A = 0 \;,\; D_y B = 0 \,;$$

cioè la B sarà a coefficienti indipendenti da y e avremo il gruppo

$$[8, I] \quad \left| \begin{array}{c} \varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq + \left[\frac{1}{s!}\alpha_s(x)\varphi^{(s)} + \frac{1}{(s+1)!}\alpha_{s+1}(x)\varphi^{(s+1)} + \dots + \frac{1}{n!}\alpha_n(x)\varphi^{(n)}\right]zr \\ \psi(x, y)r \end{array} \right|$$

144. — Corrispondentemente al gruppo $[6, II]_1$ (n. 132) avremo un gruppo della forma (si tenga conto del n. prec.)

$$\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq + [zA_1(\varphi_1) + \zeta_1]r\,,\,\bar{\varphi}_l(x)y^l r \qquad (l = 0, 1, \dots, n-1),$$

dove A_1 è una forma differenziale lineare e ζ_1 è una funzione dipendente da φ_1, e determinata da essa a meno di una combinazione lineare delle $\bar{\varphi}_l(x)y^l$.

Dalla

$$(\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq + [zA_1(\varphi_1) + \zeta_1]r) = \varphi_0\varphi_1 q + \left[z\varphi_0 D_y A_1(\varphi_1) + \varphi_0 \frac{\partial\zeta_1}{\partial y}\right]r$$

risulta

$$D_y A_1(\varphi_1) = 0\ ,\ \frac{\partial\zeta_1}{\partial y} \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \bar{\varphi}_l y^l];$$

e ciò implica che la forma differenziale lineare A_1 sia a coefficienti indipendenti da y; e che sia

$$\zeta_1 \equiv y^n B_1(\varphi_1)$$

dove B_1 è anch'essa una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti, oltre che dalla z, anche da y. Ma l'alternata

$$(\varphi_1 yq + [zA_1(\varphi_1) + y^n B_1(\varphi_1)]r\,,\,\varphi_2 yq + [zA_1(\varphi_2) + y^n B_1(\varphi_2)]r) =$$
$$= \{[n\varphi_2 - A_1(\varphi_2)]B_1(\varphi_1) - [n\varphi_1 - A_1(\varphi_1)]B_1(\varphi_2)\}\, r$$

richiede che sia, per ogni coppia possibile di funzioni φ_1, φ_2,

$$[n\varphi_2 - A_1(\varphi_2)]B_1(\varphi_1) - [n\varphi_1 - A_1(\varphi_1)]B_1(\varphi_2) = 0.$$

Si verificherà quindi necessariamente uno dei seguenti tre casi:

$a)$ $\qquad A_1(\varphi_1) = n\varphi_1$

$b)$ $\qquad B_1(\varphi_1) = 0$

$c)$ $\qquad B_1(\varphi_1) = \mu(x)[n\varphi_1 - A_1(\varphi_1)]$.

Ma nel caso *c*) basta assumere $z - \mu y^n$ come nuova z per ridurre $\mu = 0$. Avremo dunque i due gruppi

$$[8, II]_1 \quad \left| \varphi_0(x)q, \varphi_1(x)yq + \left[nz\varphi_1 + y^n \left(\beta_0(x)\varphi_1 + \dots + \frac{1}{q!}\beta_q(x)\varphi_1^{(q)} \right) \right] r, \bar{\varphi}_l(x)y^l r \right| \quad (l = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$[8, II]_2 \quad \left| \varphi_0(x)q, \varphi_1(x)yq + z\left[\alpha_0(x)\varphi_1 + \alpha_1(x)\varphi'_1 + \dots + \frac{1}{p!}\alpha_p(x)\varphi^{(p)} \right] r, \bar{\varphi}_l(x)y^l r \right| \quad (l = 0, 1, \dots, n-1)$$

145. — Corrispondentemente al gruppo $[6, II]_2$ (n. 133) avremo un gruppo

$$\varphi_0(x)q + y^n B^{-1}A(\varphi_0)r, \varphi_1 yq + [zA_1(\varphi_1) + \zeta_1]r, \bar{\varphi}_l(x)y^l r, \rho_j(x)y^n r. \quad (l = 0, 1, \dots, n-1; \; j = 1, 2, \dots, h)$$

Allora dalla

$$(\varphi_1 yq + [zA_1(\varphi_1) + \zeta_1]r, \rho_j y^n r) = [n\varphi_1 - A_1(\varphi_1)]\rho_j y^n r$$

risulta identicamente

$$A_1(\varphi_1) = n\varphi_1,$$

mentre d'altra parte la

$$(\varphi_0(x)q + y^n B^{-1}A(\varphi_0)r, \varphi_1 yq + [n\varphi_1 z + \zeta_1]r) = \varphi_0\varphi_1 q + \varphi_0 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} r$$

dà

$$\varphi_0 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} \equiv y^n B^{-1}A(\varphi_0\varphi_1) \qquad |\text{modd. } \rho_1, \dots, \rho_h|$$

e in particolare

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} \equiv y^n B^{-1}A(\varphi_1);$$

cosicchè risulta manifestamente

$$\varphi_0 B^{-1}A(\varphi_1) \equiv B^{-1}A(\varphi_0\varphi_1)$$

e di qui, poichè è $A(1) = 0$, concludiamo, per $\varphi_1 = 1$,

$$A(\varphi_0) = 0.$$

Si trova allora, con le stesse considerazioni svolte al n. prec., il gruppo

[8, II]$_3$

$$\begin{gathered}\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq+[nz\varphi_1+y^nB^{-1}A(\varphi_1)]r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^lr\,,\ \rho_j(x)y^nr\\ {\scriptstyle l=0,1,\dots,n-1\ ;\ j=1,2,\dots,h}\\ \left(A(\varphi)=\sum_{m=0}^{p}\frac{1}{m!}\,\alpha_m(x)\varphi^{(m)}\ ;\ B(\varphi)=\sum_{m=0}^{h}\frac{1}{m!}\,\beta_m(x)\varphi^{(m)}\ ;\ B(\rho_j)=0\right)\end{gathered}$$

Infine i gruppi [6, II]$_3$-[6, II]$_5$ nulla danno di nuovo.

146. — Se partiamo dal gruppo [6, III] (n. 134)

$$\varphi(x)q+B^{-1}A(\varphi)r\,,\ \rho_j(x)r \qquad (j=1,2,\dots,h\ ;\ B(\rho_j)=0)$$

e ad essa aggiungiamo la

$$\varphi_1(x)yq+[zA_1(\varphi_1)+\zeta_1]r$$

troviamo (cfr. n. prec.)

$$A=0\ ,\ D_yA_1=0\ ,\ \varphi\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}\equiv 0$$

e quindi, data l'arbitrarietà della φ,

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}=0\,.$$

D'altra parte la

$$(\varphi\, yq+(zA_1+\zeta_1)r\,,\ \rho_i r)=-\rho_iA_1(\varphi_1)r$$

implica necessariamente

$$A_1=0\,,$$

cosicchè in ultima analisi si ottiene il gruppo:

[8, III]

$$\begin{gathered}\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq+B^{-1}A(\varphi_1)r\,,\ \rho_j(x)r\\ {\scriptstyle j=1,2,\dots,h\ ;}\\ \left(A=\sum_{m=0}^{p}\frac{1}{m!}\,\alpha_m(x)\varphi^{(m)}\ ;\ B(\varphi_1)=\sum_{m=0}^{h}\frac{1}{m!}\,\beta_m(x)\varphi_1^{(m)}\ ;\ B(\rho_j)=0\right)\end{gathered}$$

147. — I *gruppi di terza specie* si costruiscono immediatamente, partendo dal gruppo generatore (caso particolare del tipo [8, III]):

$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + D_x^{-1}A(\varphi)r\,,\ r\,.$$

Otteniamo così i tipi seguenti:

[8, IV]
$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \psi_0(x\,,y)r\,,\ \psi_1(x\,,y)zr$$

[8, V]
$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[8, VI]
$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + zD_x^{-1}A(\varphi)r\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ zr\,,\ \rho_i(x)zr \qquad i=1,2,\dots,h$$
$$\left(A(\varphi)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\,\alpha_m(x)\varphi^{(m)}\right)$$

[8, VII]
$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r\,,\ \bar\varphi(x)zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[8, VIII]
$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + zD_x^{-1}A(\varphi_1)r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r\,,\ zr\,,\ \rho_j(x)zr \qquad l=0,1,\dots,n-1\ ;\ j=1,2,\dots,h$$
$$\left(A(\varphi_1)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\,\alpha_m(x)\varphi^{(m)}\right)$$

[8, IX]
$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \sigma_j(x)r\,,\ zr \qquad (j=1,2,\dots,h)$$

[9] **Gruppo accorciato**: $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi^2(x)y^2q\,.$

148. — Aggiungeremo una schiera di trasf. inf.

$$\varphi_2(x)y^2q + \zeta_2(x\,,y\,,z)r$$

ai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [8] (nn. 142-147)

Cominciando dai *gruppi di prima specie*, consideriamo il gruppo $[8]_1$ (n. 142)

$$\varphi_0(x)q + \varphi'_0 r\,,\ \varphi_1(x)yq + [y\varphi'_1 + z\varphi_1]r$$

e aggiungiamo ad esso una trasf. inf.

$$\varphi_2(x)y^2q + C(\varphi_2)r$$

dove C rappresenta una forma differenziale lineare

$$C(\varphi_2) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}\,\gamma_m(x\,,y\,,z)\,\varphi_2^{(m)}\,.$$

Dalla

$$(\varphi_0 q + \varphi'_0 r\,,\ \varphi_2 y^2 q + C(\varphi_2)r) = 2\varphi_0\varphi_2 yq + [\varphi_0 D_y C(\varphi_2) + \varphi'_0 D_z C(\varphi_2)]r$$

risulta l'identità funzionale

$$\varphi_0 D_y C(\varphi_2) + \varphi'_0 D_z C(\varphi_2) = 2\,[\,y(\varphi_0\varphi'_2 + \varphi'_0\varphi_2) + z\varphi_0\varphi_2\,]$$

e in particolare per $\varphi_0 = 1\,,\ x$

$$D_y C(\varphi_2) = 2\,[y\varphi'_2 + z\varphi_2]\,,\ D_z C(\varphi_2) = 2y\varphi_2\,,$$

cosicchè si avrà

$$C(\varphi_2) = y^2\varphi'_2 + 2yz\varphi_2 + \bar{C}(\varphi_2)\,,$$

dove $\bar{C}$ rappresenta una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y e z. Ma l'alternata

$$(\varphi_1 yq + [y\varphi'_1 + z\varphi_1]r\,,\ \varphi_2 y^2 q + [2yz\varphi_2 + y^2\varphi'_2 + \bar{C}(\varphi_2)]r) =$$
$$= \varphi_1\varphi_2 y^2 q + [2yz\varphi_1\varphi_2 + y^2(\varphi_1\varphi'_2 + \varphi'_1\varphi_2) - \varphi_1\bar{C}(\varphi_2)]r$$

implica

$$\bar{C}(\varphi_1\varphi_2) = -\varphi_1\bar{C}(\varphi_2) \quad \text{e quindi} \quad \bar{C} = 0\,;$$

e otteniamo il gruppo:

$$[9]_1 \qquad \varphi_0(x)q + \varphi'_0 r\,,\ \varphi_1(x)yq + [z\varphi_1 + y\varphi'_1]r\,,\ \varphi_2(x)y^2q + [2yz\varphi_2 + y^2\varphi'_2]r$$

Considerando in secondo luogo il gruppo $[8]_2$ (n. 142) (dopo avere assunto come nuova z la e^z):

$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + zA(\varphi_1)r\,,$$

dove

$$A(\varphi_1) = \frac{1}{s!}\varphi_1^{(s)} + \frac{1}{(s+1)!}\alpha_{s+1}(x)\varphi_1^{(s+1)} + \dots + \frac{1}{n!}\alpha_n(x)\varphi^{(n)},$$

ricaviamo dalla alternata

$$(\varphi_0 q\, , \varphi_2 y^2 q + C(\varphi_2) r) = 2\varphi_0\varphi_2 y q + \varphi_0 D_y C(\varphi_2) r$$

l'identità funzionale

$$\varphi_0 D_y C(\varphi_2) = 2zA(\varphi_0\varphi_2) \tag{31}$$

e in particolare

$$D_y C(\varphi_2) = 2zA(\varphi_2)$$

e quindi

$$C(\varphi_2) = 2yzA(\varphi_2) + \bar{C}(\varphi_2),$$

dove $\bar{C}$ rappresenta una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y.

Allora la (31) diventa

$$\varphi_0 A(\varphi_2) = A(\varphi_0\varphi_2)$$

e questa identità funzionale implica senz'altro la

$$A(\varphi_2) = \varphi_2,$$

talchè avremo un gruppo della forma

$$\varphi_0(x)q\, , \varphi_1(x)[yq + zr]\, , \varphi_2(x)y^2 q + [2yz\varphi_2 + \bar{C}(\varphi_2)]r.$$

Resta da tener conto della

$$(\varphi_1[yq + zr]\, , \varphi_2 y^2 q + [2yz\varphi_2 + \bar{C}(\varphi_2)]r) = \varphi_1 \{ \varphi_2 y^2 q + [2yz\varphi_2 + zD_z\bar{C}(\varphi_2) - \bar{C}(\varphi_2)]r \}$$

che per $\varphi_1 = 1$ dà

$$zD_z\bar{C}(\varphi_2) = 2\bar{C}(\varphi_2) \tag{32}$$

e della

$$(\varphi_2 y^2 q + [2yz\varphi_2 + \bar{C}(\varphi_2)]r\, , \bar{\varphi}_2 y^2 q + [2yz\bar{\varphi}_2 + \bar{C}(\bar{\varphi}_2)]r) = 2y[\bar{\varphi}_2\bar{C}(\varphi_2) - \varphi_2\bar{C}(\bar{\varphi}_2)]r$$

cioè

$$\bar{\varphi}_2 \bar{C}(\varphi_2) - \varphi_2 \bar{C}(\bar{\varphi}_2) = 0. \tag{33}$$

Quest' ultima identità funzionale implica o

$$C = 0$$

oppure

$$C(\varphi) = \mu(x, z)\varphi,$$

dove μ è una funzione determinata.

Nel primo caso otteniamo il gruppo

$$[9]_2 \qquad \left| \varphi_0(x)q, \varphi_1(x)[yq + zr], \varphi_2(x)[y^2q + 2yzr] \right|$$

Nel secondo caso risulta dalla (32)

$$\mu_z = 2\mu, \quad \mu = \nu(x)z^2,$$

e basta assumere come nuova z la νz per ridurre $\nu = 1$ e ottenere il gruppo

$$[9]_3 \qquad \left| \varphi_0(x)q, \varphi_1(x)[yq + zr], \varphi_2(x)[y^2q + (2y + z)zr] \right|$$

149. — Occupiamoci dei *gruppi di seconda specie.* — Quando si prenda come sottogruppo un gruppo del tipo [8, I] (n. 143) si trova, per mezzo di considerazioni perfettamente analoghe a quelle del n. prec., il gruppo

$$[9, I] \qquad \left| \begin{matrix} \varphi_0(x)q, \varphi_1(x)[yq + \varepsilon zr], \varphi_2(x)[y^2q + 2\varepsilon yzr] \\ \varepsilon(\varepsilon - 1) = 0 \end{matrix} \right|$$

In secondo luogo dobbiamo aggiungere una trasf. inf.

$$\varphi_2(x)y^2q + [zA_2(\varphi) + \zeta_2(x, y)]r$$

ai gruppi [8, II] dei nn. 144, 145.

In tutti codesti gruppi abbiamo delle trasf. inf. della forma

$$\lambda_l(x)y^l r \qquad (l = 0, 1, \ldots, n)$$

dove le λ_l sono in alcuni tutte arbitrarie, in altri alcune arbitrarie e le altre suscettibili ciascuna di un numero finito di determinazioni linearmente indipendenti. In ogni caso dalla alternata

$$(\varphi_2 y^2 q + [zA(\varphi_2) + \zeta_2]r, \lambda_n y^n r) = [ny\varphi_2 - A_2(\varphi_2)]\lambda_n y^n r$$

risulta che deve essere identicamente

$$A(\varphi_2) = ny\varphi_2 .$$

Dovremo quindi avere nel gruppo una trasf. inf. della forma

$$(q\,,\varphi_2 y^2 q + [nyz\varphi_2 + \zeta_2]r) = 2\varphi_2 yq + \left[nz\varphi_2 + \frac{\partial\zeta_2}{\partial y}\right]r\,;$$

talchè i gruppi $[8\,,\mathrm{II}]_1$ e $[8\,,\mathrm{II}]_3$ si possono senz'altro mettere da parte, per considerare soltanto il gruppo $[8\,,\mathrm{II}]_2$ (n. **144**), ponendovi

$$\alpha_0 = \frac{n}{2}\,,\ \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0\,.$$

Dobbiamo cioè considerare un gruppo della forma

$$\varphi_0(x)q\,,\varphi_1(x)\left[yq + \frac{n}{2}\,zr\right],\varphi_2(x)y^2q\,,+[nyz\varphi_2 + \zeta_2]r\,,\varphi_l y^l r$$
$$(l=0,1,\dots,n)$$

Quanto alla ζ_2, la quale, come ben sappiamo, deve dipendere da φ_2 ed essere determinata a meno di una combinazione lineare delle $\varphi_l y^l$, troviamo combinando le $q\,,\varphi_2 y^2 q + \dots$

$$\frac{\partial\zeta_2}{\partial y} = 0 \qquad [\text{modd. } \varphi_l y^l]$$

e quindi

$$\zeta_2 \equiv y^{n+1}B_2(\varphi_2)$$

dove B_2 è una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y e z.

Ora dalla alternata

$$\left(\varphi_1\left[yq + \frac{n}{2}\,zr\right],\varphi_2 y^2 q + [nyz\varphi_2 + y^{n+1}B_2(\varphi_2)]r\right) =$$
$$= \varphi_1 \left\{ \varphi_2 y^2 q + \left[nyz\varphi_2 + \frac{n+2}{2}\,y^{n+1}B_2(\varphi_2)\right]r \right\}$$

ricaviamo l'identità funzionale

$$B_2(\varphi_1\varphi_2) = \frac{n+2}{2}\,\varphi_1 B_2(\varphi_2)\,,$$

la quale, come risulta sviluppando il primo membro secondo la formola del D'ALEMBERT, implica o

$$B_2 = 0$$

oppure

$$n = 0 \ , \ B'_2 = 0 \ , \ B_2 = \beta(x)\varphi_2 .$$

Avremo quindi in primo luogo il gruppo

$$[9, \text{II}]_1 \qquad \varphi_0(x)q \, , \varphi_1(x)\left[yq + \frac{n}{2} zr \right] , \varphi_2(x)\left[y^2q + nyzr\right] , \bar{\varphi}_l(x)y^l r \qquad (l = 0, 1, \ldots, n)$$

In secondo luogo, assumendo come nuova z la $\frac{2z}{\beta}$, otterremo

$$[9, \text{II}]_2 \qquad \varphi_0(x)q \, , \varphi_1(x)yq \, , \varphi_2(x)\left[y^2q + 2yr\right] , \varphi(x)r$$

150. — Per completare la enumerazione dei gruppi di seconda specie, dobbiamo ancora considerare il gruppo [8, III] (n. 146), cioè

$$\varphi_0(x)q \, , \varphi_1(x)yq + B^{-1}A(\varphi_1)r \, , \rho_j(x)r \qquad (j = 1, 2, \ldots, h),$$

dove A e B sono due forme differenziali lineari a coefficienti indipendenti da y e z e di più la B è d'ordine h e tale che

$$B(\rho_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

Combinando la $\rho_i r$ colla

$$\varphi_2(x)y^2q + \left[zA_2(\varphi_2) + \zeta_2(x, y)\right]r$$

si conclude che deve essere identicamente

$$A_2 = 0 .$$

Allora dalla alternata

$$(\varphi_0 q \, , \varphi_2 y^2 q + \zeta_2 r) = 2\varphi_0\varphi_2 yq + \varphi_0 \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} r$$

ricaviamo

$$\varphi_0 \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \equiv 2B^{-1}A(\varphi_0\varphi_2) \qquad [\text{modd. } \rho_1, \ldots, \rho_h]$$

e in particolare

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \equiv 2B^{-1}A(\varphi_2)\,.$$

Di qui risulta che, almeno per una qualche determinazione di B^{-1}, deve essere identicamente

$$\varphi_0 B^{-1}A(\varphi_2) \equiv B^{-1}A(\varphi_0\varphi_2)\,;$$

e allora posto $\varphi_0\varphi_2 = \alpha$, dove α sia una radice di A, dovremo avere identicamente

$$\frac{\alpha}{\varphi_2}\, B^{-1}A(\varphi_2) \equiv 0$$

il che implica

$$A = 0\,.$$

Resta dunque un gruppo della forma

$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q + \zeta_2 r\,,\ \rho_j(x)r$$

dove ζ_2 non può dipendere che da x. Ma dalla

$$(\varphi_1 yq\,,\ \varphi_2 y^2 q + \zeta_2 r) \equiv \varphi_1\varphi_2 y^2 q$$

si conclude $\zeta_2 = 0$ e otteniamo il gruppo

$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q\,,\ \rho_j(x)r \tag{34}$$

Il ragionamento precedente cade in difetto soltanto quando la operazione $B^{-1}A$ non si annulli per nessuna funzione α (tranne che per $\alpha = 0$). Ciò può accadere soltanto quanto la $B^{-1}A$ sia una forma differenziale lineare di ordine 0, o, in altre parole, si abbia identicamente

$$B^{-1}A(\varphi) \equiv \beta(x)\varphi\,.$$

Sotto tale ipotesi avremo

$$\zeta_2 \equiv 2\beta(x)y^2$$

e, assumendo come nuova z la $B^{-} z$, otteniamo il gruppo seguente, che scriviamo in modo da includere come caso particolare il gruppo (34)

[9, III]

$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + \varepsilon\varphi_1 r\,,\ \varphi_2(x)y^2q + 2\varepsilon y\varphi_2 r\,,\ \rho_j(x)r$$
$$(j = 1, 2, \ldots, h\ ;\ \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0)$$

151. — Pei *gruppi di terza specie* il gruppo generatore è dato (n. prec.) da

$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + a\varphi_1 r\,,\ \varphi_2(x)y^2q + 2ay\varphi_2 r\,,\ r$$

cosicchè otteniamo i tipi:

[9, IV] $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q\,,\ \psi_0(x\,,y)r\,,\ \psi_1(x\,,y)zr$$

[9, V] $$\varphi_0(y)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ \varphi(x)zr$$

[9, VI] $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + \varepsilon z\varphi_1 r\,,\ \varphi_2(x)y^2q + 2\varepsilon yz\varphi_2 r\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ zr\,,\ \rho_j(x)zr$$
$$(1\,,2\,,\dots\,,h\ ;\ \varepsilon[\varepsilon-1]=0)$$

[9, VII] $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q + nyz\varphi_2\,,\ \bar\varphi_l(x)y^lr\,,\ \bar\varphi(x)zr$$
$$(l=0\,,1\,,\dots\,,n)$$

[9, VIII] $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + \frac{n}{2}z\varphi_1 r\,,\ \varphi_2(x)y^2q + nyz\varphi_2 r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^lr\,,\ zr\,,\ \rho_j(x)zr$$
$$(l=0\,,1\,,\dots\,,n\ ;\ j=1\,,2\,,\dots\,,h)$$

[9, IX] $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q\,,\ \sigma_j(x)r\,,\ zr$$
$$(j=1\,,2\,,\dots\,,h)$$

[10] Gruppo accorciato: $\psi(x\,,y)q$.

152. — Per costruire i gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [10] basterà aggiungere ai gruppi determinati nei precedenti nn. 148-151, partendo dal gruppo accorciato [9], una trasf. inf.

$$\varphi_3(x)y^3q + \zeta_3(x\,,y\,,z)r$$

giacchè poi, alternando iteratamente codesta trasf. inf. con le

$$\varphi_0(x)q + \dots\,,\ \varphi_1(x)yq + \dots\,,\ \varphi_2(x)y^2q + \dots$$

si otterranno tutte le altre trasf. inf. del gruppo

$$\varphi_i(x)y^iq + \dots \qquad (i=4\,,5\,,6\,,\dots).$$

Cominciamo dal gruppo di prima specie $[9]_1$ (n. 148)

$$\varphi_0 q + \varphi'_0 r\,,\ \varphi_1 yq + [z\varphi_1 + y\varphi'_1]\,,\ \varphi_2 y^2 q + [2yz\varphi_2 + y^2\varphi'_2]r$$

e aggiungiamo ad essa la

$$\varphi_3(x) y^3 q + A_3(\varphi_3) r$$

dove A_3 è una forma differenziale lineare.

Dalle alternate

$$(\varphi_0 q + \varphi'_0 r\,,\ \varphi_3 y^3 q + A_3(\varphi_3) r) = 3\varphi_0\varphi_3 y^2 q + [\varphi_0 D_y A_3(\varphi_3) + \varphi'_0 D_z A_3(\varphi_3)]r$$

$$(\varphi_1 yq + [z\varphi_1 + y\varphi'_1]r\,,\ \varphi_3 y^3 q + A_3(\varphi_3) r) =$$

$$= 2\varphi_1\varphi_3 y^3 q + [\varphi_1 y D_y A_3(\varphi_3) + (z\varphi_1 + y\varphi'_1) D_z A_3(\varphi_3) - \varphi'_1\varphi_3 y^3 - \varphi_1 A_3(\varphi_3)]r$$

ricaviamo

$$\varphi_0 D_y A_3(\varphi_3) + \varphi'_0 D_z A_3(\varphi_3) = 3[2yz\varphi_0\varphi_3 + y^2(\varphi_0\varphi'_3 + \varphi'_0\varphi_3)] \tag{35}$$

$$\varphi_1 y D_y A_3(\varphi_2) + (z\varphi_1 + y\varphi'_1) D_z A_3(\varphi_3) - y^3\varphi'_1\varphi_3 - \varphi_1 A_3(\varphi_3) = 2A_3(\varphi_1\varphi_3)\,. \tag{36}$$

Ora dalla (35) per $\varphi_0 = 1\,, x$ discende

$$D_y A_3(\varphi_3) = 3[2yz\varphi_3 + y^2\varphi'_3]\ ,\ \ D_z A_3(\varphi_3) = 3y^2\varphi_3$$

e quindi

$$A_3(\varphi_3) = 3y^2 z\varphi_3 + y^3\varphi'_3 + A_3(\varphi_3)\,,$$

dove A_3 è una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y e z. Ma sostituendo nella (36) si ottiene l' identità funzionale

$$\varphi_1 A_3(\varphi_3) + 2A_3(\varphi_1\varphi_3) = 0\,,$$

la quale, come risulta sviluppando il secondo termine, implica

$$A_3 = 0\,.$$

Otteniamo così la trasf. inf.

$$\varphi_3(x) y^3 q + [3y^2 z\varphi_3 + y^3\varphi'_3]r\,,$$

che alternata iteratamente con le trasf. inf. di $[9]_1$ dà

$$\varphi_i(x) y^i q + [iy^{i-1} z\varphi_i + y^i\varphi'_i]r$$

cosicchè risulta il gruppo

$$[10]_1 \qquad \left|\ \psi(x\,, y) q + \left[z\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \right] r \right.$$

Analogamente consideriamo il gruppo $[9]_2$ (n. 148)

$$\varphi_0(x)q\,,\varphi_1(x)[\,yq+zr\,]\,,\varphi_2(x)[\,y^2q+2yzr\,]\,.$$

Qui, in base alle

$$(\varphi_0 q\,,\varphi_3 y^3 q + A_3(\varphi_3)r\,) = 3\varphi_0\varphi_3 y^2 q + \varphi_0 D_y A_3(\varphi_3)r\,,$$

$$(\varphi_1(x)[\,yq+zr\,]\,,\varphi_3 y^3 q + A_3(\varphi_3)r\,) = \varphi_1 \Big\{ 2\varphi_3 y^3 q + [\,y D_y A_3(\varphi_3) + z D_z A_3(\varphi_3) - A_3(\varphi_3)\,]r$$

dovremo avere

$$\varphi_0 D_y A_3(\varphi_3) = 6yz\varphi_0\varphi_3 \tag{37}$$

$$y\varphi_1 D_y A_3(\varphi_3) + z\varphi_1 D_z A_3(\varphi_3) - \varphi_1 A_3(\varphi_3) = 2A_3(\varphi_1\varphi_3)\,. \tag{38}$$

Dalla (37) risulta

$$A_3(\varphi_0) = 3y^2z\varphi_3 + \ddot{A}_3(\varphi_3)\,,$$

dove $\ddot{A}_3$ rappresenta una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y.

Sostituendo nella (38) si ottiene l'identità funzionale

$$2\ddot{A}_3(\varphi_1\varphi_3) + \varphi_1\ddot{A}_3(\varphi_3) = z\varphi_1 D_z\ddot{A}_3(\varphi_3)\,,$$

la quale sviluppata dà

$$3\varphi_1\ddot{A}_3(\varphi_3) + 2\varphi_1'\ddot{A}'_3(\varphi_3) + \varphi_1''\ddot{A}''_3(\varphi_3) + \dots = z\varphi_1 D_z\ddot{A}_3(\varphi_3)$$

e perciò si spezza nelle due equazioni

$$3\ddot{A}_3(\varphi_3) = zD_z\ddot{A}_3(\varphi_3)\ ,\ \ddot{A}'_3 = 0$$

le quali danno senz'altro

$$\ddot{A}(\varphi_3) = \alpha(x)z^3\varphi_3\,;$$

talchè si ha nel gruppo la trasf. inf.

$$\varphi_3(x)y^3q + [\,3y^2z\varphi_3 + \alpha(x)z^3\varphi_3\,]r\,;$$

e quindi, come risulta alternando iteratamente, le trasf. inf.

$$\varphi_i(x)\left[\,y^iq + \left(iy^{i-1}z + \binom{i}{3}\alpha(x)y^{i-3}z^3\right)r\,\right].$$

Se $\alpha \gtrless 0$ si assuma come nuova z la

$$z\alpha^{\frac{1}{3}}$$

e si ridurrà $\alpha = 1$; cosicchè risulta il gruppo seguente, in cui includiamo il caso $\alpha = 0$:

$$[10]_2 \qquad \psi(x, y)q + \left[z \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{3!} z^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right] r$$

$$\varepsilon [\varepsilon - 1] = 0$$

Assumiamo infine come sottogruppo il gruppo $[9]_3$ (n. 148)

$$\varphi_0(x)q, \varphi_1(x)[yq + zr], \varphi_2(x)[y^2 q + (2y + z)zr].$$

Allora l'alternata

$$(\varphi_0(x)q, \varphi_3(x)y^3 q + A_3(\varphi_3)r) = 3\varphi_0\varphi_3 y^2 q + \varphi_0 D_y A_3(\varphi_3)r$$

darà

$$\varphi_0 D_y A_3(\varphi_3) = 3[2yz + z^2]\varphi_0\varphi_3$$

talchè sarà

$$A_3(\varphi_3) = 3[y^2 z + yz^2]\varphi_3 + \bar{A}_3(\varphi_3),$$

dove al solito $\bar{A}_3$ rappresenta una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y.

D'altra parte la $\bar{A}_3$ deve soddisfare anche qui alla (38), talchè risulta ancora

$$\bar{A}_3(\varphi_3) = \alpha(x) z^3 \varphi_3$$

e abbiamo nel gruppo la trasf. inf.

$$\varphi_3(x) \{ y^3 q + [3y^2 z + 3yz^2 + \alpha z^3] r \}.$$

Questa trasf. inf. alternata con le $[9]_3$ dà per ogni intero i

$$\varphi_i(x) \left\{ y^i q + \left(i y^{i-1} z + \binom{i}{2} y^{i-2} z^2 + \alpha \left[\binom{i}{3} y^{i-3} z^3 + \ldots + z^i \right] \right) r \right\};$$

ed è manifesto che queste trasf. inf. non possono essere definite da equazioni differenziali se non quando sia $\alpha = 0$: cosicchè in ultima analisi otteniamo il gruppo:

$$[10]_3 \qquad \psi(x, y)q + \left[z \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] r$$

153. — Considerazioni analoghe alle precedenti permettono di determinare i *gruppi di seconda specie*. In corrispondenza dei gruppi $[9, I]$, $[9, II]_2$ (n. 149) e $[9, III]$ (n. 150) si trovano rispettivamente i tre gruppi

$[10, I]$ $$\psi(x, y)q + \varepsilon z \frac{\partial \psi}{\partial y} r, \psi_0(x, y)r \quad \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$$

$[10, II]$ $$\psi(x, y)q + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial y} r, \varphi(x)r \quad \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$$

$[10, III]$ $$\psi(x, y)q + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial y} r, \rho_j(x)r \quad (j = 1, 2, \dots, h; \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0)$$

Il gruppo $[9, II]_1$ non ammette qui altro corrispondente che il gruppo $[10, II]$ per $\varepsilon = 0$.

Infine il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie è*

$$\psi(x, y)q + a \frac{\partial \psi}{\partial y} r, r,$$

talchè si ottengono i tipi seguenti:

$[10, IV]$ $$\psi(x, y)q, \psi_0(x, y)r, \psi_1(x, y)zr$$

$[10, V]$ $$\psi(x, y)q + az \frac{\partial \psi}{\partial y} r, \psi_0(x, y)r, \varphi(x)zr$$

$[10, VI]$ $$\psi(x, y)q + az \frac{\partial \psi}{\partial y} r, \psi_0(x, y)r, zr, \rho_j(x)zr \quad (j = 1, 2, \dots, h)$$

$[10, VII]$ $$\psi(x, y)q, \varphi_0(x)r, \varphi_1(x)zr$$

$[10, VIII]$ $$\psi(x, y)q, \rho_j(x)r, zr \quad (j = 1, 2, \dots, h)$$

§ 3. — Gruppi che nel fascio invariante di piani subordinano un gruppo ∞^1.

154. — I gruppi siffatti si ottengono in corrispondenza ai gruppi accorciati **[11]**-**[15]**, o, in altre parole, aggiungendo una trasf. inf.

$$p + \zeta_0(x, y, z)r$$

ai singoli gruppi intransitivi ottenuti nel paragrafo precedente (numeri 129-153).

[11] Gruppo accorciato: $\varphi(x)q, p$.

155. — Il gruppo intransitivo **[6]** (n. 129)

$$\varphi(x)q + A(\varphi)r,$$

dove

$$A(\varphi) = \frac{1}{s!}\varphi^{(s)} + \frac{1}{(s+1)!}\alpha_{s+1}(x)\varphi^{(s+1)} + \dots + \frac{1}{n!}\alpha_n(x)\varphi^{(n)},$$

richiede, in base alle

$$(p + \zeta_0 r, q) = -\frac{\partial\zeta_0}{\partial y}r, \quad (p + \zeta_0 r, x^s q + r) = s x^{s-1} q + \frac{\partial\zeta_0}{\partial z}r,$$

che sia

$$\frac{\partial\zeta_0}{\partial y} = \frac{\partial\zeta_0}{\partial z} = 0;$$

cosicchè la ζ_0 risulterà funzione della sola x e, mediante una trasformazione

$$z' = z - \int \zeta_0 dx,$$

si potrà ridurre a zero.

Allora dalla

$$(p, \varphi q + A(\varphi)r) = \varphi' q + D_x A(\varphi)r$$

ricaviamo

$$D_x A(\varphi) = A(\varphi'),$$

talchè la A, dovendo essere commutabile con la D_x, dovrà essere a coefficienti indipendenti (oltre che da y e z) anche da x e quindi costanti.

Otteniamo così il gruppo

$$[11] \qquad p\,,\varphi(x)q + \left[\frac{1}{s!}\varphi^{(s)} + \frac{1}{(s+1)!}a_{s+1}\varphi^{(s+1)} + \dots + \frac{1}{n!}a_n\varphi^{(n)}\right]r\,.$$

156. — Nel caso dei *gruppi di seconda specie* la trasf. inf. da aggiungere è della forma

$$p + [z\zeta_0(x\,,y) + \overline{\zeta}_0(x\,,y)]r\,.$$

Poichè in ogni caso il gruppo di seconda specie corrispondente al gruppo accorciato $\varphi(x)q$ contiene la trasf. inf. q, la ζ_0 sarà indipendente da y e basterà assumere come nuova z la

$$ze^{-\int\zeta_0 dx}$$

per ridurre $\zeta_0 = 0$.

Abbiamo allora anzitutto, in corrispondenza del gruppo $[6\,,\mathrm{I}]$ (n. 130)

$$[11\,,\mathrm{I}] \qquad p\,,\varphi(x)q + z\left[a_1\varphi' + \frac{1}{2!}a_2\varphi'' + \dots + \frac{1}{n!}a_n\varphi^{(n)}\right]r\,,\psi(x\,,y)r$$

Se assumiamo il sottogruppo $[6\,,\mathrm{II}]_1$ (n. 132)

$$\varphi(x)q + zA(\varphi)r\,,\varphi_l(x)y^l r\,,\varphi_{s\cdot t}(x)y^s e^{\gamma_t(x)y}r$$
$$(l=0,1,\dots,n\,;\ t=1,2,\dots,k\,;\ s=0,1,\dots,n_t)$$

dove A rappresenta una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y e z, si avrà anzitutto in base alla

$$\left(p + \overline{\zeta}_0 r\,,y^{n_t}e^{\gamma_t(x)y}r\right) = \gamma'_t y^{n_t+1}e^{\gamma_t y}r$$

che deve essere

$$\gamma_t = \text{cost.} = c_t\,.$$

D' altra parte la

$$(q\,,p + \overline{\zeta}_0 r) = \frac{\partial\overline{\zeta}_0}{\partial y}r$$

implica

$$\frac{\partial\overline{\zeta}_0}{\partial y} \equiv 0 \qquad \left[\text{modd. } \varphi_l y^l\,,\varphi_{s\cdot t}y^s e^{c_t y}\right]$$

ossia

$$\overline{\zeta}_0 \equiv \lambda(x) y^{n+1} ;$$

e allora, in base alla

$$(p + \lambda y^{n+1} r , \varphi q + z A(\varphi) r) \equiv \varphi' q + [z D_x A(\varphi) + \lambda y^{n+1} A(\varphi)] r$$

si conclude

$$\lambda = 0 \ , \ D_x A = A D_x$$

talchè otteniamo il gruppo

$$[11, \mathrm{II}]_1 \quad \boxed{\begin{gathered} p , \varphi(x) q + z \left[a_1 \varphi' + \frac{1}{2!} a_2 \varphi'' + \dots + \frac{1}{n!} a_n \varphi^{(n)} \right] r , \varphi_l(x) y^l r , \varphi_{s \cdot t}(x) y^s e^{c_t y} r \\ (l = 0, 1, \dots, n \ ; \ t = 1, 2, \dots, k \ ; \ s = 0, 1, \dots, n_t) \end{gathered}}$$

Se in secondo luogo assumiamo come sottogruppo $[6, \mathrm{II}]_2$ (n. 133)

$$\begin{gathered} \varphi(x) q + y^n B^{-1} A(\varphi) r , \varphi_l(x) y^l r , \rho_j(x) y^n r , \varphi_{s \cdot t}(x) y^s e^{\gamma_t(x) y} r \\ (l = 0, 1, \dots, n \ ; \ j = 1, 2, \dots, h \ ; \ t = 1, 2, \dots, k \ ; \ s = 0, 1, \dots, n_t) \end{gathered}$$

dove A è una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y e z e mancante del termine d'ordine zero, mentre B è una forma differenziale lineare di ordine h, che ammette le radici $\rho_1, \dots, \rho_h$, potremo come pocanzi concludere che le γ_t sono costanti. Inoltre dalla

$$(q , p + \zeta_0 r) = \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} r$$

risulta

$$\overline{\zeta}_0 \equiv \lambda(x) y^n + \rho y^{n+1}$$

dove ρ rappresenta una certa determinata combinazione lineare (a coefficienti costanti) delle ρ_i; e basta porre

$$z' = z - y^n \int \lambda dx$$

per ridurre $\lambda = 0$ senza alterare le altre trasf. inf. del gruppo.

Di più le

$$(p + \rho y^{n+1} r , \rho_i r) = \rho'_i r$$

implicano

$$\rho'_i \equiv 0 \qquad (\text{modd. } \rho_1, \dots, \rho_h)$$

talchè le ρ_i avranno la forma

$$x^i e^{h_j x} \qquad (j = 1, 2, \dots, k \ ; \ i = 0, 1, \dots, m_j)$$

e la B che, a meno di una funzione di x moltiplicatrice, è determinata dall'avere le radici ρ_i, sarà della forma

$$B(\varphi) = \beta(x) \sum_{m=0}^{h} \frac{1}{m!} b_m \varphi^{(m)} = \beta(x) \bar{B}(\varphi) \qquad (h = m_1 + \dots + m_k +).$$

Allora la trasf. inf.

$$\varphi(x) q + y^n B^{-1} A(\varphi) r$$

ove si ponga

$$\beta^{-1} A(\varphi) = \bar{A}(\varphi)$$

si potrà scrivere

$$\varphi(x) q + y^n \bar{B}^{-1} \bar{A}(\varphi) r,$$

dove, come sappiamo, la $\bar{B}$ è una forma a coefficienti costanti.

Ciò premesso, la

$$(p + \rho y^{n+1} r, \varphi q + y^n B^{-1} A(\varphi) r) = \varphi' q + y^n [D_x \bar{B}^{-1} A(\varphi) - (n+1) \rho\varphi] r$$

implica la congruenza funzionale

$$D_x B^{-1} \bar{A}(\varphi) - (n+1) \rho\varphi \equiv \bar{B}^{-1} \bar{A}(\varphi') \qquad [\text{modd. } x^i e^{h_j x}],$$

la quale, ove si tenga conto della commutabilità di $\bar{B}$ e D_x, e si eseguisca sui due membri la $\bar{B}$, dà luogo alla identità

$$D_x \bar{A}(\varphi) - A D_x(\varphi) = (n+1) \bar{B}(\rho\varphi).$$

Di qui ove si ponga al solito

$$A(\varphi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \alpha_m(x) \varphi^{(m)}$$

e si sviluppi il secondo membro secondo la formola del D'Alembert si conclude che deve essere:

$$\begin{cases} \alpha'_i(x) = B^{(i)}(\rho) & (i = 1, 2, \dots, h) \\ \alpha'_{h+j}(x) = 0 & (j = 1, 2, \dots, n-h) \end{cases}$$

e quindi

$$\bar{A} = \sum_{m=1}^{h} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)} \int_0^x \bar{B}^{(m)}(\rho) dx + \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)} ;$$

talchè otteniamo il gruppo

[11, II]₂

$$\left| \begin{array}{c} p + \rho y^{n+1} r , \varphi(x) q + y^n B^{-1} \left\{ \sum_{m=1}^{h} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)} \int_0^x B^{(m)}(\rho) dx + \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)} \right\} r \\ \varphi_l(x) y^l r , x^i e^{h_j x} y^n r , \varphi_{s.t}(x) y^s e^{c_t y} r \\ {\scriptstyle l=0,1,\dots,n-1 ; j=1,2,\dots,r ; i=0,1,\dots,m_j ; t=1,2,\dots,k ; s=0,1,\dots,n_t} \\ \left\{ B(\varphi) = \sum_{m=0}^{h} \frac{1}{m!} b_m \varphi^{(m)} ; B\left(x^i e^{h_j x} \right) = 0 ; \rho = \sum_{i,j} a_{i.j} x^i e^{h_j x} \right\} \\ {\scriptstyle h = m_1 + \dots + m_r + r} \end{array} \right|$$

In modo analogo, corrispondentemente ai gruppi [6, II]₃-[6, III] (nn. 133-134) si trovano i gruppi:

[11, II]₃

$$\left| \begin{array}{c} p , \varphi(x) q + y^n \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)} r , \varphi_l(x) y^l r , \varphi_{s.t}(x) y^s e^{c_t y} r \\ {\scriptstyle (l=0,1,\dots,n-1 ; t=1,2,\dots,k ; s=0,1,\dots,n_t)} \end{array} \right|$$

[11, II]₄

$$\left| \begin{array}{c} p + \rho y r , \varphi(x) q + B^{-1} \left\{ \sum_{m=1}^{h} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)} \int_0^x B^{(m)}(\rho) dx + \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)} \right\} r \\ x^i e^{h_j x} r , \varphi_{s.t}(x) y^s e^{c_t y} r \\ {\scriptstyle j=1,2,\dots,r ; i=0,1,\dots,m_j ; t=1,2,\dots,k ; s=0,1,\dots,n_t} \\ \left\{ B(\varphi) = \sum_{m=1}^{h} \frac{1}{m!} b_m \varphi^{(m)} ; B\left(x^i e^{h_j x} \right) = 0 , \rho = \sum_{i,j} a_{i.j} x^i e^{h_j x} \right\} \\ {\scriptstyle h = m_1 + m_2 + \dots + m_r + r} \end{array} \right| .$$

[11, II]₅

$$\left| \begin{array}{c} p , \varphi(x) q + \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)} r , \varphi_{s.t}(x) y^s e^{c_t y} r \\ {\scriptstyle (t=1,2,\dots,k ; s=0,1,\dots,n_t)} \end{array} \right|$$

[11, III]

$$p + \rho y r \,,\, \varphi(x)q + B^{-1} \left\{ \sum_{m=1}^{h} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)} \int_0^x B^{(m)}(\rho) dx + \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)} \right\} r$$

$$x^i e^{h_j x} r$$
$$j = 1, 2, \ldots, r \;;\; i = 0, 1, \ldots, m_j$$

$$\left\{ B(\varphi) = \sum_{m=1}^{h} \frac{1}{m!} b_m \varphi^{(m)} \;;\; B\left(x^i e^{h_j x}\right) = 0 \,,\, \rho = \sum_{ij} a_{ij} x^i e^{h_j x} \right\}$$
$$h = m_1 + \cdots + m_r + r$$

157. — Il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie* è (come risulta dal tipo [**11**, III]) della forma

$$p + ayr \,,\, \varphi(x)q + D_x^{-1} \left\{ ax\varphi' + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)} \right\} r \,,\, r$$

cosicchè otteniamo i tipi seguenti:

[**11**, IV]

$$p \,,\, \varphi(x)q \,,\, \psi_0(x, y)r \,,\, \psi_1(x, y)zr$$

[**11**, V]$_1$

$$p \,,\, \varphi(x)q \,,\, \psi(x, y)r \,,\, \varphi_l(x)y^l zr \,,\, x^i e^{h_j x} y^n zr \,,\, \varphi_{st}(x) y^s e^{c_t y} zr$$
$$(l = 0, 1, \ldots, n-1 \;;\; j = 1, 2, \ldots, h \;;\; i = 0, 1, m_j \;;\; t = 1, 2, h \;;\; s = 0, 1, \ldots, n_t)$$

[**11**, V]$_2$

$$p + ayzr \,,\, \varphi(x)q \,,\, \psi(x, y)r \,,\, \bar{\varphi}(x)zr \,,\, x^i e^{h_j x} yzr \,,\, \varphi_{s \cdot t}(x) y^s e^{c_t y} zr$$
(c. s.)

[**11**, V]$_3$

$$p + ayzr \,,\, \varphi(x)q + zD_x^{-1} \left\{ ax\varphi' + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)} \right\} r \,,\, \psi(x, y)r$$
$$zr \,,\, x^i e^{h_j x} zr, \varphi_{s \cdot t}(x) y^s e^{c_t y} zr$$
(c. s.)

[**11**, VI]

$$p + ayzr \,,\, \varphi(x)q + zD_x^{-1} \left\{ ax\varphi' + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)} \right\} r \,,\, \psi(x, y)r$$
$$zr \,,\, x^i e^{h_j x} zr$$
(c. s.)

[**11**, VII] $$p\,,\ \varphi(x)q\,,\ \varphi_{s.t}(x)y^s e^{c_t y} r\,,\ \bar\varphi(x) zr \qquad (t=1,2,\dots,k\ ;\ s=0,1,\dots,n_t)$$

[**11**, VIII] $$p\,,\ \varphi(x)q + z\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}a_m\varphi^{(m)}r\,,\ \varphi_{s.t}(x)y^s e^{c_t y}r\,,\ zr\,,\ x^i e^{h_j x} zr \qquad (t=1,2,\dots,h\ ;\ s=0,1,\dots,n_t\ ;\ j=1,2,\dots,k\ ;\ i=0,1,\dots,m_j)$$

[**11**, IX] $$p\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i e^{h_j x} r\,,\ zr \qquad (j=1,2,\dots,k\ ;\ i=0,1,\dots,m_j)$$

[12] Gruppo accorciato: $p\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i e^{a_j x} yq$

$(j=1,2,\dots,k\ ;\ i=0,1,\dots,m_j)$

158. — Prenderemo le mosse dai gruppi, che ammettono il gruppo accorciato **[7]**: $\varphi(x)q\,,\ \alpha_i(x)yq$ (nn. 137-141).

Corrispondentemente ai gruppi $[\mathbf{7}]_1, [\mathbf{7}]_2$ (n. 137) si trovano ugualmente i gruppi:

$[\mathbf{12}]_1$ $$p\,,\ \varphi(x)q + \left[\frac{1}{s!}a_s\varphi^{(s)} + \frac{1}{(s+1)!}a_{s+1}\varphi^{(s+1)} + \dots + \frac{1}{n!}a_n\varphi^{(n)}\right]r\,,\ yq+zr$$

$[\mathbf{12}]_2$ $$p\,,\ \varphi(x)q + \varphi' r\,,\ x^i e^{a_j x}[yq+zr] + \frac{d}{dx}\left(x^i e^{a_j x}\right)yr \qquad (j=1,2,\dots,k\ ;\ i=0,1,\dots,m_j)$$

Dopo ciò, ad esaurire i gruppi di prima specie, resta soltanto il caso (corrispondente al gruppo $[\mathbf{7}]_3$ del n. 137) in cui si abbia un gruppo della forma

$$p\,,\ \varphi(x)q\,,\ x e^{i a_i x} yq + \alpha_{i.j}(x,y,z)r\,.$$

La presenza della q implica intanto che le $\alpha_{i.j}$ siano indipendenti da y: inoltre la

$$(p\,,\ x^i e^{a_j x} yq + \alpha_{ij} r) = [ix^{i-1} + a_j x^i]e^{a_j x} yq + \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x} r$$

dà

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x} = a_j \alpha_{ij} + i \alpha_{i-1 \cdot j} ,$$

e quindi

$$\alpha_{ij} = e^{a_j x} \pi_{i \cdot j} ,$$

dove le

$$\pi_{0j} , \pi_{1j} , \ldots , \pi_{m_j \cdot j}$$

costituiscono una serie di polinomi dell'APPELL in x, a coefficienti indipendenti da x , y.

Consideriamo in particolare le

$$\pi_{0 \cdot 1} , \pi_{1 \cdot 1} , \ldots , \pi_{m_1 \cdot 1} ;$$

la prima di esse che è diversa da zero è necessariamente una funzione indipendente da x e y; supposto che essa sia la $\pi_{s . 1}$, basta porre

$$z' = \int \frac{dz}{\pi_{s \cdot 1}}$$

per ridurre $\mu_{s . 1} = 1$; e allora la

$$\left(e^{a_1 x} [x^s yq + r] , e^{a_j x} [x^i yq + \pi_{ij} r] \right) = e^{(a_i + a_j) x} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial z} r$$

implica che tutte le μ_{ij} siano indipendenti da z; cioè le μ_{ij} saranno polinomi dell'APPELL a coefficienti costanti e avremo il gruppo

$$[12]_3 \quad p , \varphi(x) q , e^{a_j x} \left\{ x^i yq + \left[c_{j0} x^i + \binom{i}{1} c_{j1} x^{i-1} + \ldots + \binom{i}{i-1} c_{j \cdot i-1} x + c_{ji} \right] r \right\}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k \; ; \; i = 0, 1, \ldots, m_j)$$

159. — Occupiamoci dei ***gruppi di seconda specie.***

I gruppi **[7 , I]** , **[7 , II]$_1$** , **[7 , II]$_2$** (n. 138) danno agevolmente i seguenti tipi:

$$[12 , I] \quad p , \varphi(x) q , e^{a_j x} \left\{ x^i yq + \left[c_{j0} x^i + \binom{i}{1} c_{j1} x^{i-1} + \ldots + \binom{i}{i-1} c_{j \cdot i-1} x + c_{ji} \right] zr \right\}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k \; ; \; i = 0, 1, \ldots, m_j)$$

[**12**, II]$_1$

$$p\,,\varphi(x)q\,,e^{a_jx}\left\{x^iyq+\left[nx^iz+y^n\left(c_{j0}x^i+\binom{i}{1}c_{j1}x^{i-1}+\dots+c_{ji}\right)\right]r\right\},\varphi_l(x)y^lr$$
$$(j=1,2,\dots,k\;;\;i=0,1,\dots,m_j\;;\;l=0,1,\dots,n-1)$$

[**12**, II]$_2$

$$p\,,\varphi(x)q\,,e^{a_jx}\left\{x^iyq+z\left[c_{j0}x^i+\binom{i}{1}c_{j1}x^{i-1}+\dots+c_{ji}\right]r\right\},\varphi_l(x)y^lr$$
$$(j=1,2,\dots,k\;;\;i=0,1,\dots,m_j\;;\;l=0,1,\dots,n-1)$$

Corrispondentemente al gruppo [7, II]$_3$ (n. 139) si trova ragionando come al n. 156 il tipo:

[**12**, II]$_3$

$$p+\rho y^{n+1}r\,,\varphi(x)q+y^nB^{-1}\left\{\sum_{s=1}^{h}\frac{1}{s!}\varphi^{(s)}\int B^{(s)}(\rho)dx+\sum_{s=1}^{p}\frac{1}{s!}a_s\varphi^{(s)}\right\}r$$

$$yq+[(n+1)z+ax^my^nr]r\,,\varphi_l(x)y^lr\,,x^ty^nr\,,x^ie^{h_jx}y^nr$$
$$l=0,1,\dots,r-1\;;\;t=0,1,\dots,m-1\;;\;j=1,2,\dots,k\;;\;i=0,1,\dots,m_j$$

$$\left\{B(\varphi)=\sum_{s=0}^{h}\frac{1}{s!}b_s\varphi^{(s)}\;;\;B(x^t)=0\,,B(x^ie^{h_jx})=0\;;\;\rho=\sum c_tx^t+\sum c_{ij}x^ie^{h_jx}\right\}$$
$$h=m_1+m_2+\dots+m_k+m+k$$

Analogamente i gruppi [7, II]$_4$-[7, III]$_3$ (nn. 139, 140) danno i tipi:

[**12**, II]$_4$

$$p\,,\varphi(x)q\,,x^ie^{a_jx}yq+\left[nx^ie^{a_jx}z+y^n\left(c_{j\cdot0}x^i+\binom{i}{1}c_{j0}x^{i-1}+\dots+c_{ji}\right)\right]r\,,$$
$$\varphi_l(x)y^lr\,,x^se^{h_tx}y^nr$$
$$(j=1,2,\dots k\;;\;i=0,1,\dots,m_j\;;\;l=0,1,\dots,n-1\;;\;t=1,2,\dots,h\;;\;s=0,1,n_t)$$

[**12**, II]$_5$

$$p\,,\varphi(x)q+y^n\varphi'r\,,$$
$$e^{a_jx}\left[x^iyq+\left\{(n+1)x^iz+\frac{1}{n+1}y^{n+1}(a_jx^i+ix^{i-1})\right\}r\right],\varphi_l(x)y^lr$$
$$(j=1,2,\dots,k\;;\;i=0,1,\dots,m_j\;;\;l=0,1,\dots,n-1)$$

[**12**, II]$_6$

$$p\,,\varphi(x)q+y^n\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m!}a_m\varphi^{(m)}r\,,yq+(n+1)zr\,,\varphi_l(x)y^lr$$
$$(l=0,1,\dots,n-1)$$

[12, III]₁
$$p + \rho y r\,,\ \rho(x) q + B^{-1} \left\{ \sum_{s=1}^{h} \frac{1}{s!} \varphi^{(s)} \int B^{(s)}(\rho)\, dx + \sum_{s=1}^{p} \frac{1}{s!}\, a_s \varphi^{(s)} \right\} r\,,$$
$$yq + [z + a x^m] r\,,\ x^t r\,,\ x^i e^{h_j x} r$$
$$(t = 0, 1, \dots, m-1\ ;\ j = 1, 2, k\ ;\ i = 0, 1, \dots, m_j)$$

[12, III]₂
$$p\,,\ \varphi(x) q\,,\ e^{a_j x} \left[x^i y q + \left\{ c_{j0} x^i + \binom{i}{1} c_{j1} x^{i-1} + \dots + c_{ji} \right\} r \right],\ x^s e^{h_t x} r$$
$$(j = 1, 2, \dots, k\ ;\ i = 0, 1, \dots, m_j\ ;\ t = 1, 2, \dots, h\ ;\ s = 0, 1, \dots, n_t)$$

160. — Il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie* si ha come caso particolare del gruppo [12, III]₂; onde risultano i tipi seguenti:

[12, IV]
$$p\,,\ \varphi(x) q\,,\ x^i e^{a_j x} y q\,,\ \psi_0(x, y) r\,,\ \psi_1(x, y) z r$$
$$(j = 1, 2, \dots, k\ ;\ i = 0, 1, \dots, m_j)$$

[12, V]
$$p\,,\ \varphi(x) q\,,\ x^i e^{a_j x} y q\,,\ \psi(x, y) r\,,\ \varphi_l(x) y^l z r$$
$$(j = 1, 2, \dots, k\ ;\ i = 0, 1, \dots, m_j\ ;\ l = 0, 1, \dots, n-1)$$

[12, VI]
$$p\,,\ \varphi(x) q\,,\ e^{a_j x} \left[x^i y q + z \left\{ c_{j0} x^i + \binom{i}{1} c_{j1} x^{i-1} + \dots + c_{ji} \right\} r \right],$$
$$\psi(x, y) r\,,\ z r\,,\ x^l e^{h_s x} z r$$
$$(j = 1, 2, \dots, k\ ;\ i = 0, 1, \dots, m_j\ ;\ s = 1, 2, \dots, h\ ;\ l = 0, 1, \dots, n_s)$$

[12, VII]
$$p\,,\ \varphi(x) q\,,\ x^i e^{a_j x} y q\,,\ \varphi_l(x) y^l r\,,\ \bar{\varphi}(x) z r$$
$$(j = 1, 2, \dots, k\ ;\ i = 0, 1, \dots, m_j\ ;\ l = 0, 1, \dots, n-1)$$

[12, VIII]
$$p\,,\ \varphi(x) q\,,\ e^{a_j x} \left[x^i y q + \left\{ c_{j0} x^i + \binom{i}{1} c_{j1} x^{i-1} + \dots + c_{ji} \right\} z r \right],$$
$$\varphi_l(x) y^l r\,,\ z r\,,\ x^t e^{h_s x} z r$$
$$(j = 1, 2, \dots, k\ ;\ i = 0, 1, \dots, m_j\ ;\ l = 0, 1, \dots, n-1\ ;\ s = 1, 2, h\ ;\ t = 0, 1, \dots, n_s)$$

[12, IX]
$$p\,,\ \varphi(x) q\,,\ x^i e^{a_j x} y q\,,\ x^l e^{h_s x} r\,,\ z r$$
$$(j = 1, 2, \dots, k\ ;\ i = 0, 1, \dots, m_j\ ;\ s = 1, 2, \dots, h\ ;\ l = 0, 1, \dots, n_s)$$

[13] Gruppo accorciato: $p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq$.

161. — Partendo dai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [8] (nn. 142-147) si trovano senza difficoltà i tipi seguenti:

[13]₁
$$p\,,\ \varphi_0(x)q+\varphi'_0 r\,,\ \varphi_1(x)yq+[y\varphi'_1+z\varphi_1]r$$

[13]₂
$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq+\left[\frac{1}{s!}\varphi_1^{(s)}+\frac{1}{(s+1)!}a_{s+1}\varphi_1^{(s+1)}+\dots+\frac{1}{n!}a_n\varphi^{(n)}\right]r$$

[13, I]
$$p,\ \varphi_0(x)q,\ \varphi_1(x)yq+z\left[\frac{1}{s!}\varphi^{(s)}+\frac{1}{(s+1)!}a_{s+1}\varphi^{s+1)}+\dots+\frac{1}{n!}a_n\varphi^{(n)}\right]r,\ \psi(x,y)r$$

[13, II]₁
$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq+\left[nz\varphi_1+y^n\left\{b_0\varphi_1+b_1\varphi'_1+\dots+\frac{1}{q!}b_q\varphi_1^{(q)}\right\}\right]r\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1)$$

[13, II]₂
$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq+z\left[a_0\varphi_1+a_1\varphi'_1+\dots+\frac{1}{q!}a_q\varphi^{(q)}\right]r\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1)$$

[13, II]₃
$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq+\left|nz\varphi_1+y^nB^{-1}A(\varphi_1)\right|r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r\,,\ x^t e^{h_s x}y^n r$$
$$l=0,1,\dots,n-1\ ;\ s=1,2,\dots,k\ ;\ t=0,1,\dots,n_s$$
$$\left\{A(\varphi)=\sum_{m=0}^{p}\frac{1}{m!}a_m\varphi^{(m)}\ ;\ B(\varphi)=\sum_{m=0}^{h}\frac{1}{m!}b_m\varphi^{(m)}\ ;\ B\left(x^t e^{h_s x}\right)=0\right\}$$
$$h=n_1+n_2+\dots n_h+k$$

[13, III]
$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq+B^{-1}A_1(\varphi)r\,,\ x^t e^{h_s x}r$$
$$s=1,2,\dots,k\ ;\ t=0,1,\dots,n_s$$
$$\left\{A(\varphi)=\sum_{m=0}^{p}\frac{1}{m!}a_m\varphi^{(m)}\ ;\ B(\varphi)=\sum_{m=0}^{h}\frac{1}{m!}b_m\varphi^{(m)}\ ;\ B\left(x^t e^{h_s x}\right)=0\right\}$$
$$h=n_1+n_2+\dots+n_h+k$$

[13, IV] $$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \psi_0(x\,,y)r\,,\ \psi_1(x\,,y)zr$$

[13, V] $$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l zr \quad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[13, VI] $$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + zD_x^{-1}A(\varphi)r\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ zr\,,\ x^s e^{h_t x} zr$$
$$\left\{ t=1\,,2\,,\dots,k\ ;\ s=0\,,1\,,\dots,n_t\ ;\ A(\varphi)=\sum_{m=0}^{p} a_m\varphi^{(m)} \right\}$$

[13, VII] $$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r\,,\ \bar\varphi(x)zr \quad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[13, VIII] $$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + zD_x^{-1}A(\varphi)r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r\,,\ zr\,,\ x^s e^{h_t x} zr$$
$$\left\{ \begin{matrix} l=0,1,\dots,n-1\ ;\ t=1,2,\dots,k\ ;\ s=0,1,\dots,n_t \\ A(\varphi)=\sum_{m=0}^{p}\frac{1}{m!}a_m\varphi^{(m)} \end{matrix} \right\}$$

[13, IX] $$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ x^s e^{h_t x} r\,,\ zr \quad (t=1,2,\dots,k\ ;\ s=0,1,\dots,n_t)$$

[14] Gruppo accorciato: $p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q$.

162. — Anche qui possiamo limitarci alla enumerazione dei tipi (cfr. nn. 148-151):

$[14]_1$ $$p\,,\ \varphi_0(x)q + \varphi'_0 r\,,\ \varphi_1(x)yq + [z\varphi_1 + y\varphi'_1]r\,,\ \varphi_2(x)y^2q + [2yz\varphi_2 + y^2\varphi'_2]r$$

$[14]_2$ $$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + zr]\,,\ \varphi_2(x)[y^2q + 2yzr]$$

$[14]_3$ $$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + zr]\,,\ \varphi_2(x)[y^2q + (2y + z)zr]$$

[14, I]

$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)\left[yq+\varepsilon zr\right],\ \varphi_2(x)\left[y^2q+2\varepsilon yzr\right]$$
$$\varepsilon[\varepsilon-1]=0$$

[14, II]₁

$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)\left[yq+\frac{n}{2}zr\right],\ \varphi_2(x)\left[y^2q+nyzr\right],\ \bar\varphi_l(x)y^lr$$
$$(l=0,1,\ldots,n)$$

[14, II]₂

$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)\left[y^2q+2yr\right],\ \varphi(x)r$$

[14, III]

$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq+\varepsilon\varphi_1 r\,,\ \varphi_2(x)y^2q+2\varepsilon y\varphi_2 r\,,\ x^s e^{a_t x}r$$
$$(t=1,2,\ldots,k\ ;\ s=0,1,\ldots,n_t\ ;\ \varepsilon[\varepsilon-1]=0)$$

[14, IV]

$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q\,,\ \psi_0(x,y)r\,,\ \psi_1(x,y)zr$$

[14, V]

$$r\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q+ayz\varphi_2 r\,,\ \psi(x,y)r\,,\ \bar\varphi(x)zr$$

[14, VI]

$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq+az\varphi_1 r\,,\ \varphi_2(x)y^2q+2ayz\varphi_2 r\,,\ \psi(x,y)r$$
$$zr\,,\ x^i e^{h_j x}zr$$
$$(j=1,2,\ldots,k\ ;\ i=0,1,\ldots,n_j$$

[14, VII]

$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q+nyz\varphi_2 r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^lr\,,\ \bar\varphi(x)zr$$
$$(l=0,1,\ldots,n)$$

[14, VIII]

$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq+\frac{n}{2}z\varphi_1 r\,,\ \varphi_2(x)y^2q+nyz\varphi_2 r$$
$$\bar\varphi_l(x)y^lr\,,\ zr\,,\ x^i e^{h_j x}zr$$
$$(l=0,1,\ldots,n\ ;\ j=1,2,\ldots,k\ ;\ i=0,1,\ldots,n_j)$$

[14, IX]

$$p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q\,,\ x^i e^{h_j x}r\,,\ zr$$
$$(j=1,2,\ldots,h\ ;\ i=0,1,\ldots,n_j)$$

[15] Gruppo accorciato: $p, \psi(x, y)q$.

163. — Prendendo le mosse dai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [10] (nn. 152, 153) otteniamo i gruppi seguenti:

[15]₁ $$p, \psi(x, y)q + \left[z \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right]r$$

[15]₂ $$p, \psi(x, y)q + \left[z \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{3!} z^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right]r \qquad \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$$

[15]₃ $$p, \psi(x, y)q + \left[z \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]r$$

[15, I] $$p, \psi(x, y)q + \varepsilon z \frac{\partial\psi}{\partial y} r, \psi_0(x, y)r \qquad \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$$

[15, II] $$p, \psi(x, y)q + \varepsilon \frac{\partial\psi}{\partial y} r, \varphi(x)r \qquad \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$$

[15, III] $$p, \psi(x, y)q + \varepsilon \frac{\partial\psi}{\partial y} r, x^l e^{a_i x} r$$
$$(\varepsilon[\varepsilon - 1] = 0 \;;\; i = 1, 2, \ldots, k \;;\; l = 0, 1, \ldots, n_i)$$

[15, IV] $$p, \psi(x, y)q, \psi_0(x, y)r, \psi_1(x, y)zr$$

[15, V] $$p, \psi(x, y) + \varepsilon z \frac{\partial\psi}{\partial y} r, \psi_0(x, y)r, \varphi(x)zr \qquad \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$$

[15, VI] $$p, \psi(x, y)q + \varepsilon z \frac{\partial\psi}{\partial y} r, \psi_0(x, y)r, zr, x^i e^{a_j x} zr$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k \;;\; i = 0, 1, \ldots, n_j \;;\; \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0)$$

[15, VII]	$p, \psi(x, y)q, \varphi_0(x)r, \varphi_1(x)zr$	[15, VIII]	$p, \psi(x, y)q, \varphi(x)r, zr, x^i e^{a_j x} zr$ $(j = 1, 2, \ldots, k;\ i = 0, 1, \ldots, n_j)$

[15, IX]	$p, \psi(x, y)q, x^i e^{a_j x} r, zr$ $(j = 1, 2, \ldots, h;\ i = 0, 1, \ldots, n_j)$

§ 4. — Gruppi che nel fascio invariante di piani subordinano un gruppo ∞^2.

164. — I gruppi di questa categoria si ottengono assumendo come gruppi accorciati i gruppi **[16]**-**[20]** o, più semplicemente, aggiungendo una trasf. inf. della forma

(39) $$xp + cyq + \zeta_1(x, y, z)r$$

ai gruppi determinati nel paragrafo precedente (nn. 155-163).

[16] Gruppo accorciato: $p, xp + cyq, \varphi(x)q$.

165. — Cominciando al solito dai *gruppi di prima specie*, consideriamo il gruppo **[11]** del n. 155

$$p, \varphi(x)q + \left[\frac{1}{s!}\varphi^{(s)} + \frac{1}{(s+1)!}a_{s+1}\varphi^{(s+1)} + \ldots + \frac{1}{n!}a_n\varphi^{(n)}\right]r \qquad (s > 0).$$

La presenza delle p, q implica che nella (39) la ζ_1 sia indipendente da x e y. Allora, posto

(40) $$A(\varphi) = \frac{1}{s!}\varphi^{(s)} + \frac{1}{(s+1)!}a_{s+1}\varphi^{(s+1)} + \ldots + \frac{1}{n!}a_n\varphi^{(n)},$$

e tenuto conto della

$$(xp + cyq + \zeta_1 r, \varphi q + A(\varphi)r) = [x\varphi' - c\varphi]q + \left[xD_x A(\varphi) - \frac{\partial \zeta_1}{\partial z}A(\varphi)\right]r$$

dovremo avere

$$A(x\varphi') - cA(\varphi) = xD_x A(\varphi) - \frac{\partial \zeta_1}{\partial z}A(\varphi),$$

ossia, sviluppando $A(x\varphi')$ e ricordando che la A, avendo coefficienti costanti, è commutabile con D_x,

$$A'D_x(\varphi) - cA(\varphi) + \frac{\partial\zeta_1}{\partial z} A(\varphi) = 0 . \tag{41}$$

In particolare per $\varphi = x^s$, siccome è

$$A'D_x(\varphi) = \frac{1}{(s-1)!}\varphi^{(s)} + \frac{1}{s!} a_{s+1}\varphi^{(s+1)} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} a_n\varphi^{(n)} , \tag{42}$$

avremo

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial z} = c - s , \zeta_1 = (c-s)z + a ,$$

dove a è una costante determinata.

Se $c \gtrless s$, basta scegliere come nuova z la $z + \frac{a}{c-s}$ per ridurre $a = 0$; in ogni caso la (41) diventa

$$A'D_x(\varphi) = sA(\varphi)$$

e questa identità funzionale implica

$$a_{s+1} = a_{s+2} = \dots = a_n = 0$$

e quindi

$$A(\varphi) = \frac{1}{s!}\varphi^{(s)} ;$$

talchè, secondo che è $c \gtrless s$ o $c = s$, troviamo i due gruppi:

$$[16]_1 \qquad \left| \; p , xp + cyq + [c-s]zr , \varphi(x)q + \frac{1}{s!}\varphi^{(s)}r \; \right|$$

$$[16]_2 \qquad \left| \; p , xp + syq + ar , \varphi(x)q + \frac{1}{s!}\varphi^{(s)}r \; \right|$$

Infine se è $A = 0$, otteniamo

$$[16]_3 \qquad \left| \; p , xp + cyq + zr , \varphi(x)q \; \right|$$

166. — Per costruire i *gruppi di seconda specie,* cominciamo dall'assumere come sottogruppo il gruppo **[11, I]** (n. 156)

$$p\,,\varphi(x)q + zA(\varphi)r\,,\psi(x\,,y)r\,,$$

dove A è una forma differenziale lineare a coefficienti costanti, mancante del termine di ordine zero.

La trasf. inf. da aggiungere è qui della forma

$$xp + cyq + [\beta_1 z + \overline{\beta}_1]r$$

e si trova tosto, in base alla presenza di p e q, che β_1 è costante. Allora l'alternata

$$(xp + cyq + bzr\,,\varphi q + zA(\varphi)r) = [x\varphi' - c\varphi]q + zxA(\varphi')r$$

ci dice che dev'essere

$$A(x\varphi') - cA(\varphi) = xA(\varphi')$$

ossia

$$A'D_x = cA\,.$$

Ora da questa identità funzionale discende che se c non è un intero positivo, la forma A è identicamente nulla; mentre se c è un intero positivo s si ha

$$A(\varphi) = \frac{1}{s!}\,a\varphi^{(s)}\,.$$

Otteniamo così i due gruppi:

$$[16\,,\mathrm{I}]_1 \qquad p\,,xp + cyq + bzr\,,\varphi(x)q\,,\psi(x\,,y)r$$

$$[16\,,\mathrm{I}]_2 \qquad p\,,xp + syq + bzr\,,\varphi(x)q + \frac{a}{s!}\,z\varphi^{(s)}r\,,\psi(x\,,y)r$$

Analogamente il gruppo **$[11\,,\mathrm{II}]_1$** (n. 156) dà luogo anzitutto ai due gruppi:

$$[16\,,\mathrm{II}]_1 \qquad p\,,xp + cyq + [bz + b_1y^{n+1}]r\,,\varphi(x)q\,,\varphi_l(x)y^l r \quad (l=0,1,\ldots,n)$$

$$[\mathbf{16}, \mathrm{II}]_2 \qquad \boxed{\begin{array}{c} p\,,\, xp + syq + bzr\,,\, \varphi(x)q + \frac{a}{s!}\, z\varphi^{(s)}r\,,\, \varphi_l(x)y^l r \\ (l=0,1,\dots,n) \end{array}}$$

E se $c=0$.

$$[\mathbf{16}, \mathrm{II}]_3 \qquad \boxed{\begin{array}{c} p\,,\, xp + |\,bz + b_1 y^{n+1}|\,r\,,\, \varphi(x)q\,,\, \varphi_l(x)y^l r\,,\, \varphi_{s.t}(x)y^s e^{c_t y} r \\ (l=0,1,\dots,n\ ;\ t=1,2,\dots,k\ ;\ s=0,1,\dots,m_t) \end{array}}$$

Assumiamo in terzo luogo un sottogruppo del tipo $[\mathbf{11}, \mathrm{II}]_2$ (n. 156).

Anzitutto combinando le

$$xp + cyq + |\,bz + \overline{\beta}_1|\,r\,,\, x^i e^{h_j x} y^n r$$

si conclude che le h_j sono tutte nulle, talchè le trasf. inf. or ora ricordate si ridurranno alle

$$x^i y^n r \qquad\qquad (i=0,1,\dots,h-1)$$

e la forma differenziale B, che è a coefficienti costanti ed è caratterizzata dall' ammettere il sistema fondamentale di radici

$$1\,,\, x\,,\, x^2\,,\, \dots\,,\, x^{h-1}\,,$$

si ridurrà a

$$B = D_x^h\,;$$

di più la funzione ρ che appare nella

$$p + \rho y^{n+1} r$$

sarà della forma

$$\rho = \sum_{i=0}^{h-1} c_i x^i\,.$$

D' altra parte la

$$(q\,,\, xp + cyq + |\,bz + \overline{\beta}_1|\,r) = cq + \frac{\partial \overline{\beta}_1}{\partial y}\, r$$

implica

$$\frac{\partial \overline{\beta}_1}{\partial y} \equiv 0 \qquad\qquad \left[\text{modd. } \varphi_l y^l\,,\, x^i y^n\,,\, \varphi_{s.t} y^s e^{c_t y}\right]$$

ossia

$$\bar{\beta}_1 \equiv \lambda(x) y^n + \rho_1(x) y^{n+1},$$

dove

$$\rho_1 = \sum_{i=0}^{h-1} k_i x^i .$$

Ciò posto si consideri la trasf. inf.

$$\varphi(x) q + y^n B^{-1} A(\varphi) r$$

dove si ha (n. 156)

$$B = D_x^h, \ A(\varphi) = \sum_{m=1}^{h} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)} \int_0^x B^{(m)}(\rho) dx + \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)}$$

ossia

$$A(\varphi) = \sum_{m=1}^{h} \binom{h}{m} \rho^{(h-m+1)} \varphi^{(m)} + \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)} ; \tag{43}$$

e si combini con la

$$xp + cyq + [by + \lambda y^n + \rho_1 y^{n+1}] r .$$

Risulta di qui l'equazione funzionale

$$B^{-1} A(c\varphi - x\varphi') \equiv [b - cn] B^{-1} A(\varphi) - x D_x B^{-1} A(\varphi) + (n+1) \rho_1 \varphi$$
$$(\text{modd. } 1, x, \dots, x^{h-1})$$

la quale, ove si eseguisca su ambo i membri la $B = D_x^h$ e si tenga conto della identità (n. 156)

$$D_x A(\varphi) - A D_x(\varphi) = (n+1) B(\rho\varphi) ,$$

diventa

$$[b - c(n+1) - h] A(\varphi) + A'(\varphi') - (n+1) x D_x^h(\rho\varphi) + (n+1) D_x^h(\rho_1 \varphi) = 0 . \tag{44}$$

Di qui, tenendo conto della (43) e identificando i coefficienti di $\varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(h)}$ si trova il sistema di equazioni

$$\begin{gathered} [b - c(n+1) - h + m] \rho^{(h-m+1)} + \\ + \frac{b - c(n+1) - h + m}{h(h-1) \dots (h-m+1)} a_m - (n+1) x \rho^{(h-m)} + (n+1) \rho_1^{(h-m)} = 0 \\ (m = 1, 2, \dots, h) . \end{gathered} \tag{44'}$$

Di qui per $m=1$ si ritrova, tenendo conto delle espressioni di ρ e ρ_1

$$\frac{b-c(n+1)-h+1}{h}a_1-(n+1)(h-1)!c_{h-1}x+(n+1)(h-1)!k_{h-1}=0$$

e quindi

$$c_{h-1}=0.$$

Similmente per $m=2$ la (44′) dà

$$c_{h-2}=(h-1)k_{h-1}$$

mentre la medesima (44) per $m=3$ dà

$$c_{h-2}=\frac{h-1}{2}.$$

Di qui si conclude che se non è $h=1$, devono essere necessariamente nulli, oltre c_{h-1} anche c_{h-2} e k_{h-1}.

Supponiamo allora che sia addirittura

$$c_{h-1}=c_{h-2}=\dots=c_{s+1}=c_s=0 \quad \text{e} \quad k_{h-1}=k_{h-2}=\dots=k_{s+1}=0.$$

Allora ponendo successivamente nella (44′)

$$m=h-s,\, h-s+1,\, h-s+2$$

si trova per c_{s-1} la duplice espressione

$$c_{s-1}=sk_s,\quad c_{s-1}=\frac{s}{2}k_s,$$

talchè, se non è $s=0$, si ha senz'altro che sono necessariamente nulli c_{s-1} e k_s.

Così continuando, si conclude infine che sarà

$$\rho=0 \quad \text{e} \quad \rho_1=k_0;$$

e la A, come risulta dalla (43) si ridurrà a coefficienti costanti; cioè ad

$$A(\varphi)=\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m!}a_m\varphi^{(m)}. \tag{45}$$

Ciò posto, dalla

$$(p\,, xp + cyq + [bz + \lambda y^n + k_0 y^{n+1}]r) = p + \lambda' y^n$$

risulta

$$\lambda' \equiv 0 \qquad (\text{modd. } 1\,, x\,, \dots, x^{h-1})\,,$$

cosicchè avremo

$$\lambda \equiv l_0 x^h\,;$$

e, nel caso in cui sia $b \gtrless h + cn$, si potrà ridurre $l_0 = 0$ ponendo

$$z' = z + \frac{l_0}{b - h - cn}\,.$$

Inoltre le (44) (45), ove si tenga conto del fatto che ρ è nulla e ρ_1 è uguale a k_0, danno

$$\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m!}[h + c(n+1) - m - b]a_m\varphi^{(m)} + [a_h(c[n+1] - b) - k_0(n+1)]\varphi^{(h)} = 0\,,$$

dove nella sommatoria manca il termine corrispondente all'indice $m = h$. Di qui risulta che le a_m per $m \gtrless h$ sono tutte nulle, tranne una al più, e se è $a_s \gtrless 0$, deve essere

$$b = h - s + c(n+1)\,;$$

e di più si deve avere

$$k_0 = \frac{a_h[c(n+1) - b]}{n+1}\,.$$

Infine osserviamo che, se $c \gtrless 0$, la $xp + cyq + \dots$ combinata con la $\varphi_{s.t}(x)y^s e^{c_t y}r$ implica l'annullarsi di tutte le c_t; cosicchè otteniamo anzitutto i due gruppi seguenti, dove, per eliminare le integrazioni, abbiamo scritto

$$\frac{1}{h!}\varphi^{(h)}$$

al posto di φ:

$$p\,, \frac{1}{h!}\varphi^{(h)}(x)q + y^n\left[\frac{1}{s!}a\varphi^{(s)} + \frac{1}{h!}b\varphi^{(h)}\right]r\,,$$

[**16**, II]$_4$
$$xp + cyq + \left[(m - s + c[n+1])z + \frac{b(s-h)}{n+1}y^{n+1}\right]r$$

$$\varphi_l(x)y^l r\,.\, x^i y^n r$$

$$(l = 0, 1, \dots, n-1\,;\; i = 0, 1, \dots, h-1)$$

[16, II]$_5$

$$p\,,\ \varphi(x)[q + y^n r]\,,\ xp + cyq + \left[bz + \frac{c[n+1]-b}{n+1}\,y^{n+1}\right]r\,,$$
$$\varphi_l(x)y^l r\,,\ x^i y^n r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\ ;\ i=0,1,\dots,h-1)$$

Se è $c = 0$, otteniamo analogamente:

[16, II]$_6$

$$p\,,\ \frac{1}{h!}\varphi^{(h)}(x)q + y^n\left[\frac{1}{s!}\,a\varphi^{(s)} + \frac{1}{h!}\,b\varphi^{(h)}\right]r\,,\ xp + (h-s)\left[z - \frac{b}{n+1}\,y^{n+1}\right]r$$
$$\varphi_l(x)y^l r\,,\ x^i y^n r\,.\ \varphi_{u\,.\,t}(x)y^u e^{c_t y} r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\ ;\ i=0,1,\dots,h-1\ ;\ t=1,2,\dots,k\ ;\ u=0,1,\dots,n_t)$$

[16, II]$_7$

$$p\,,\ \varphi(x)[q + y^n r]\,,\ xp + b\left[z - \frac{1}{n+1}\,y^{n+1}\right]r\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ x^i y^n r\,,\ \varphi_{u\,.\,t}(x)y^u e^{c_t y} r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\ ;\ i=0,1,\dots,h-1\ ;\ t=1,2,\dots,k\ ;\ u=0,1,\dots,n_t)$$

Se poi è $b = h + cn$ troviamo i tipi seguenti

[16, II]$_8$

$$p\,,\ \varphi(x)[q + ay^n]r\,,\ xp + cyq + \left[(h+cn)z + bx^h y^n + \frac{c-h}{n+1}\,ay^{n+1}\right]r$$
$$\varphi_l(x)y^l r\,,\ x^i y^n r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\ ;\ i=0,1,\dots,h-1)$$

[16, II]$_9$

$$p\,,\ \frac{1}{h!}\varphi^{(h)}(x)q + y^n\left[\frac{1}{s!}\,a\varphi^{(s)} + \frac{1}{h!}\,b\varphi^{(h)}\right]r\,,$$
$$xp + syq + \left[(h+sn)z + cx^h y^n + \frac{s-h}{n+1}\,by^{n+1}\right]r$$
$$\varphi_l(x)y^l r\,,\ x^i y^n r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\ ;\ i=0,1,\dots,h-1)$$

[16, II]$_{10}$

$$p\,,\ \varphi(x)[q + y^n r]\,,\ xp + cyq + \left[(h+cn)z + ax^h y^n + \frac{c-h}{n+1}\,y^{n+1}\right]r\,,$$
$$\varphi_l(x)y^l r\,,\ x^i y^n r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\ ;\ i=0,1,\dots,h-1)$$

Infine se è $b = h\,,\ c = 0$:

[16, II]$_{11}$

$$p\,,\ \frac{1}{h!}\varphi^{(h)}(x)q + y^n\left[a\varphi + \frac{1}{h!}\,b\varphi^{(h)}\right]r\,,\ xp + \left[hz + cx^h y^n - \frac{h}{n+1}\,by^{n+1}\right]r\,,$$
$$\varphi_l(x)y^l r\,,\ x^i y^n r\,,\ \varphi_{s\,.\,t}(x)y^s e^{c_t y} r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\ ;\ i=0,1,\dots,h-1\ ;\ t=1,2,\dots,k\ ;\ s=0,1,\dots,n_t)$$

[16 , II]$_{12}$

$$p\,,\ \varphi(x)[q+y^n r]\,,\ xp+\left[hz+ax^h y^n-\frac{h}{n+1}y^{n+1}\right]r$$
$$\varphi_l(x)y^l r\,,\ x^i y^n r\,,\ \varphi_{s\cdot t}(x)y^s e^{c_t y}r$$
$$(l=0,1,n-1\ ;\ j=0,1,\dots,h-1\ ;\ t=1,2,\dots,k\ ;\ s=0,1,\dots,n_t)$$

Calcoli perfettamente analoghi a quelli svolti dianzi danno, in corrispondenza del gruppo **[11 , II]$_3$** (n. 157) i tipi seguenti:

[16 , II]$_{13}$

$$p\,,\ \varphi(x)q+\frac{1}{s!}y^n\varphi^{(s)}r\,,\ xp+cyq+[c(n+1)-s]zr\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1)$$

[16 , II]$_{14}$

$$p\,,\ \varphi(x)q+\frac{1}{s!}y^n\varphi^{(s)}r\,,\ xp+syq+[snz+by^n]r\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1)$$

[16 , II]$_{15}$

$$p\,,\ \varphi(x)q+\frac{1}{s!}y^n\varphi^{(s)}r\,,\ xp-szr\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ \varphi_{u\cdot t}(x)y^u e^{c_t y}r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\ ;\ t=1,2,\dots,k\ ;\ n=0,1,\dots,n_t)$$

[16 , II]$_{16}$

$$p\,,\ \varphi(x)[q+y^n r]\,,\ xp+by^n r\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ \varphi_{u\cdot t}(x)y^u e^{c_t y}r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\ ;\ t=1,2,\dots,k\ ;\ n=0,1,\dots,n_t)$$

I gruppi **[11 , II]$_4$** e **[11 , II]$_5$** nulla danno di nuovo.

167. — Se prendiamo le mosse dal gruppo **[11 , III]** (n. 156), troviamo, come al n. prec., $\rho=0$, $B=D_x^h$; talchè risultano i due tipi

[16 , III]$_1$

$$p\,,\ \frac{1}{h!}\varphi^{(h)}(x)q+\frac{1}{s!}a\varphi^{(s)}r\,,\ xp+cyq+[h+c-s]zr\,,\ x^i r$$
$$(i=0,1,\dots,h-1)$$

[16 , III]$_2$

$$p\,,\ \frac{1}{h!}\varphi^{(h)}(x)q+\frac{1}{s!}a\varphi^{(s)}r\,,\ xp+syq+[hz+bx^h]r\,,\ x^i r$$
$$(i=0,1,\dots,h-1)$$

Infine se $A=0$, otteniamo:

[16, III]$_3$

$$p\,,\varphi(x)q\,,xp+cyq+bzr\,,x^ir \qquad (i=0,1,\dots,h-1)$$

[16, III]$_4$

$$p\,,\varphi(x)q\,,xp+cyq+[hz+bx^h]r\,,x^ir \qquad (i=0,1,\dots,h-1)$$

168. — Il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie* è riducibile all'uno o all'altro dei due tipi seguenti:

$$p\,,\varphi(x)q\,,xp+cyq\,,r\;;\;p\,,\varphi(x)q+\frac{1}{s!}\varphi^{(s)}r\,,xp+syq\,,r\,,$$

cosicchè risultano i gruppi:

[16, IV]

$$p\,,xp+cyq\,,\varphi(x)q\,,\psi_0(x\,,y)r\,,\psi_1(x\,,y)zr$$

[16, V]$_1$

$$p\,,xp+cyq\,,\varphi(x)q\,,\psi(x\,,y)r\,,\varphi_l(x)y^lzr\,,x^iy^nzr \qquad (l=0,1,\dots,n-1\,;\;i=0,1,\dots,h-1)$$

[16, V]$_2$

$$p\,,xp\,,\varphi(x)q\,,\psi(x\,,y)r\,,\varphi_l(x)y^lzr\,,x^iy^nzr\,,\varphi_{s\cdot t}(x)y^se^{c_ty}zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1\,;\;i=0,1,\dots,h-1\,;\;t=1,2,\dots,k\,;\;s=0,1,\dots,n_t)$$

[16, V]$_3$

$$p\,,xp\,,\varphi(x)[q+zr]\,,\psi(x\,,y)r\,,x^lzr\,,\varphi_{s\cdot t}(x)y^se^{c_ty}zr$$

[16, VI]$_1$

$$p\,,xp+cyq\,,\varphi(x)q\,,\psi(x\,,y)r\,,x^lzr \qquad (l=0,1,\dots,\dots,h-1)$$

[16, VI]$_2$

$$p\,,xp+syq\,,\varphi(x)q+\frac{1}{s!}z\varphi^{(s)}r\,,\psi(x\,,y)r\,,x^lzr \qquad (l=0,1,\dots,h-1)$$

[16, VII]$_1$

$$p\,,xp+cyq\,,\varphi(x)q\,,\varphi_l(x)y^lr\,,\bar{\varphi}(x)zr \qquad (l=0,1,\dots,h-1)$$

[16, VII]₂
$$p\,,\; xp\,,\; \varphi(x)q\,,\; \varphi_{s\cdot t}(x)y^s e^{c_t y} r\,,\; \bar{\varphi}(x)zr$$
$$(t=1,2,\ldots,k\;;\; s=0,1,\ldots,n_t)$$

[16, VIII]₁
$$p\,,\; xp + cyq\,,\; \varphi(x)q\,,\; \varphi_l(x)y^l r\,,\; x^i zr$$
$$(l=0,1,\ldots,n-1\;;\; i=0,1,\ldots,h-1)$$

[16, VIII]₂
$$p\,,\; xp + syq\,,\; \varphi(x)q + \frac{1}{s!}\,z\varphi^{(s)} r\,,\; \varphi_l(x)y^l r\,,\; x^i zr$$
$$(l=0,1,\ldots,n-1\;;\; i=0,1,\ldots,h-1)$$

[16, VIII]₃
$$p\,,\; xp\,,\; \varphi(x)q\,,\; \varphi_{st}(x)y^s e^{c_t y} r\,,\; x^i zr$$
$$(t=1,2,\ldots,k\;;\; s=0,1,\ldots,n_t\;;\; i=0,1,\ldots,h-1)$$

[16, VIII]₄
$$p\,,\; xp\,,\; \varphi(x)\; q + zr|\,,\; \varphi_{s\cdot t}(x)y^s e^{c_t y} r\,,\; x^i zr$$
$$(t=1,2,\ldots,k\;;\; s=0,1,\ldots,n_t\;;\; i=0,1,\ldots,h-1)$$

[16, IX]
$$p\,,\; xp + cyq\,,\; \varphi(x)q\,,\; x^i r\,,\; zr$$
$$(i=0,1,\ldots,h-1)$$

[17] **Gruppo accorciato:** $p\,,\; xp\,,\; \varphi(x)q\,,\; yq\,,\; xyq\,,\; \ldots\,,\; x^m yq$.

169. — Prenderemo le mosse dai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [12] (nn. 158-160) e, postovi $a_j = 0$, aggiungeremo a ciascuno di essi una trasf. inf.

$$xp + \beta_1(x, y, z)r\,.$$

I gruppi $[12]_1$, $[12]_2$ danno senz'altro

[17]₁
$$p\,,\; xp - szr\,,\; yq + zr\,,\; \varphi(x)q + \frac{1}{s!}\,a\varphi^{(s)} r$$

[17]₂
$$p\,,\; xp - zr\,,\; \varphi(x)q + \varphi' r\,,\; x^i yq + |\,ix^{i-1}y + zx^i|\,r$$
$$(i=0,1,\ldots,m)$$

Aggiungendo la

$$xp + [bz + b_1]r$$

al gruppo $[\mathbf{12}]_3$, posto $a_j = 0$,

$$p\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i yq + \left[c_0 x^i + \binom{i}{1} c_1 x^{i-1} + \ldots + c_i\right] r$$

ricaviamo dalla

$$(xp + [bz + b_1]r\,,\ yq + c_0 r) = -\,bc_0 r$$

che deve essere o $c_0 = 0$ o $b = 0$. Se è $b = 0$, in base alle

$$\left(xp + b_1 r\,,\ x^i yq + \left[c_0 x^i + \binom{i}{1} c_1 x^{i-1} + \ldots + ic_{i-1}x + c_i\right] r\right) =$$

$$= ix^i yq + \left[ic_0 x^i + (i-1)\binom{i}{1} c_1 x^{i-1} + \ldots + ic_{i-1}x\right] r$$

concludiamo

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_i = 0\,;$$

e, posto $z' = e^z$, otteniamo il gruppo

$[\mathbf{17}]_3$
$$p\,,\ xp + bzr\,,\ x^i[yq + czr]\,,\ \varphi(x)q \qquad (i = 0, 1, \ldots, m)$$

Se è $b \gtrless 0$, si riduce $b_1 = 0$ e dalle

$$(xp + bzr\,,\ x^i yq + \pi_i r) = ix^i yq + [x\pi'_i - b\pi_i]r$$

si deduce

$$x\pi'_i = (b + i)\pi_i\,;$$

cosicchè b sarà un intero negativo $-s$ e sarà

$$\pi_i = \binom{i}{s} a x^{i-s}\,.$$

$[\mathbf{17}]_4$
$$p\,,\ xp - szr\,,\ \varphi(x)q\,,\ yq\,,\ xyq\,,\ \ldots\,,\ x^{s-1}yq\,,\ x^{s+j}yq + \binom{s+j}{s} a x^j r \qquad (j = 0, 1, \ldots, m-s)$$

170. — Passando ai *gruppi di seconda specie*, si trova anzitutto in corrispondenza del gruppo [**12**, I] (n. 159),

[**17**, I] $$p\,,\ xp + azr\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i[yq + bzr]\,,\ \psi(x,y)r \qquad (i=0,1,\ldots,m)$$

Così i gruppi $[\mathbf{12}, \mathrm{II}]_1$, $[\mathbf{12}, \mathrm{II}]_2$ (n. 159) danno agevolmente

$[\mathbf{17}, \mathrm{II}]_1$ $$p\,,\ xp - szr\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i[yq + nzr]\,,\ x^{s+j}yq + \left[nx^{s+j}z + \binom{s+j}{j}ax^jy^n\right]r\,,\ \varphi_l(x)y^lr \qquad (l=0,1,\ldots,n-1\ ;\ i=0,1,\ldots,s-1\ ;\ j=0,1,\ldots,m-s)$$

$[\mathbf{17}, \mathrm{II}]_2$ $$p\,,\ xp + ay^nr\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i[yq + (nz + by^n)]r\,,\ \varphi_l(x)y^lr \qquad (i=0,1,\ldots,m\ ;\ l=0,1,\ldots,n-1)$$

$[\mathbf{17}, \mathrm{II}]_3$ $$p\,,\ xp + [bz + b_1y^n]r\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i[yq + nzr]\,,\ \varphi_l(x)y^lr \qquad (i=0,1,\ldots,m\ ;\ l=0,1,\ldots,n-1)$$

Nel caso del gruppo $[\mathbf{12}, \mathrm{II}]_3$ basta ragionare come al n. **166** per concludere $\rho = 0$; e si trovano i due tipi:

$[\mathbf{17}, \mathrm{II}]_4$ $$p\,,\ xp + (h-s)zr\,,\ \frac{1}{h!}\varphi^{(h)}(x)q + \frac{1}{s!}y^n\varphi^{(s)}r\,,\ yp + (n+1)zr\,,\ \varphi_l(x)y^lr\,,\ x^iy^nr \qquad (l=0,1,\ldots,n-1\ ;\ i=0,1,\ldots,h-1)$$

$[\mathbf{17}, \mathrm{II}]_5$ $$p\,,\ xp + hzr\,,\ \varphi(x)[q + y^nr]\,,\ yq + [(n+1)z + ax^hy^n]r\,,\ \varphi_l(x)y^lr\,,\ x^iy^nr \qquad (l=0,1,\ldots,n-1\ ;\ i=0,1,\ldots,h-1)$$

I gruppi $[\mathbf{12}, \mathrm{II}]_4$-$[\mathbf{12}, \mathrm{II}]_6$ danno origine ai tipi seguenti:

$[\mathbf{17}, \mathrm{II}]_6$ $$p\,,\ xp + bzr\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^iyq\,,\ \varphi_l(x)y^lr\,,\ x^jy^nr \qquad (i=0,1,\ldots,m\ ;\ l=0,1,\ldots,n-1\ ;\ j=0,1,\ldots,h-1)$$

$[\mathbf{17}, \mathrm{II}]_7$ $$p\,,\ xp + [hz + kx^hy^n]r\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^iyq\,,\ \varphi_l(x)y^lr\,,\ x^jy^nr \qquad (i=0,1,\ldots,m\ ;\ l=0,1,\ldots,n-1\ ;\ j=0,1,\ldots,h-1)$$

[**17**, II]$_8$

$$p\,,\ xp - szr\,,\ \varphi(x)q\,,\ yq\,,\ \dots\,,\ x^{s-1}yq\,,\ x^{s+j}yq + \binom{s+j}{j} ax^j r$$
$$\varphi_l(x)y^l r\,,\ x^i y^n r$$
$$(j=0,1,\dots,m-s\ ;\ l=0,1,\dots,n-1\ ;\ i=0,1,\dots,h-1)$$

[**17**, II]$_9$

$$p\,,\ xp - zr\,,\ \varphi(x)q + y^n\varphi' r\,,\ x^i yq + \left[(n+1)x^i z + \frac{i}{n+1} x^{i-1}y^{n+1}\right]r$$
$$\varphi_l(x)y^l r$$
$$(i=0,1,\dots,m\ ;\ l=0,1,n-1)$$

[**17**, II]$_{10}$

$$p\,,\ xp - szr\,,\ \varphi(x)q + \frac{1}{s!} ay^n\varphi^{s)} r\,,\ yq + (n+1)zr\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1)$$

[**17**, II]$_{11}$

$$p\,,\ xp + ay^n r\,,\ \varphi(x)[q + y^n r]\,,\ yq + (n+1)zr\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1)$$

Analogamente i gruppi [**12**, III]$_1$ e [**12**, III]$_2$ conducono ai tipi:

[**17**, III]$_1$

$$p\,,\ xp + (h-s)zr\,,\ \frac{1}{h!}\varphi^{(h)}(x)q + \frac{a}{s!}\varphi^{(s)} r\,,\ yq + zr\,,\ x^i r$$
$$(i=0,1,\dots,h-1)$$

[**17**, III]$_2$

$$p\,,\ xp + hzr\,,\ \varphi(x)[q + y^n r]\,,\ yq + [z + ax^h]r\,,\ x^i r$$
$$(i=0,1,\dots,h-1)$$

[**17**, III]$_3$

$$p\,,\ xp - szr\,,\ \varphi(x)q\,,\ yq\,,\ \dots\,,\ x^{s-1}yq\,,\ x^{s+j}yq + \binom{s+j}{j} ax^j r\,,\ x^i r$$
$$(j=0,1,\dots,m-s\ ;\ i=0,1,\dots,h-1)$$

[**17**, III]$_4$

$$p\,,\ xp + [hz + bx^h]r\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i yq\,,\ x^l r$$
$$(i=0,1,\dots,m\ ;\ l=0,1,\dots,h-1)$$

[**17**, III]$_5$

$$p\,,\ xp\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i[yq + ar]\,,\ x^l r$$
$$(i=0,1,\dots,m\ ;\ l=0,1,\dots,h-1)$$

171. — Il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie* è dato dal gruppo **[17, III]**$_5$ per $h = 1$; cosicchè otteniamo i tipi seguenti:

[17, IV] $$p\,,\ xp\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i yq\,,\ \psi_0(x\,,y)r\,,\ \psi_1(x\,,y)zr \qquad (i=0,1,\dots,m)$$

[17, V] $$p\,,\ xp\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i yq\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ \varphi_l(x)y^l zr \qquad (i=0,1,\dots,m\,;\ l=0,1,\dots,h-1)$$

[17, VI] $$p\,,\ xp\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i[yq + azr]\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ x^l zr \qquad (i=0,1,\dots,m\,;\ l=0,1,\dots,h-1)$$

[17, VII] $$p\,,\ xp\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i yq\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ \bar\varphi(x)zr \qquad (i=0,1,\dots,m\,;\ l=0,1,\dots,h-1)$$

[17, VIII] $$p\,,\ xp\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i[yq + azr]\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ x^j zr \qquad (i=0,1,\dots,m\,;\ l=0,1,\dots,h-1\,;\ j=0,1,\dots,n-1)$$

[17, IX] $$p\,,\ xp\,,\ \varphi(x)q\,,\ x^i yq\,,\ x^l r\,,\ zr \qquad (i=0,1,\dots,m\,;\ l=0,1,\dots,h-1)$$

[18] Gruppo accorciato: $p\,,\ xp\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq$.

172. — Aggiungendo una trasf. inf.

$$xp + \beta_1(x\,,y\,,z)r$$

ai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato **[13]** (n. 161) otteniamo i tipi seguenti:

[18]$_1$ $$p\,,\ xp - zr\,,\ \varphi(x)q + \varphi' r\,,\ \varphi_1(x)yq + [y\varphi'_1 + z\varphi_1]r$$

[18]$_2$ $$p\,,\ xp - szr\,,\ \varphi(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + \frac{1}{s!}\,a\varphi_1^{(s)}r$$

[18]$_3$ $$p\,,\ xp + bzr\,,\ \varphi(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + \varepsilon zr] \qquad \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$$

[18, I] $$p\,,\ xp + bzr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + azr]\,,\ \psi(x, y)r$$

[18, II]₁ $$p\,,\ xp - szr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + \left[nz\varphi_1 + \frac{1}{s!}ay^n\varphi^{(s)}\right]r\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr \qquad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

[18, II]₂ $$p\,,\ xp + by^nr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + (nz + ay^n)r]\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr \qquad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

[18, II]₃ $$p\,,\ xp + [bz + b_1y^n]r\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + nzr]\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr \qquad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

[18, II]₄ $$p\,,\ xp + (h - s)zr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \frac{1}{h!}\varphi_1^{(h)}(x)yq + \left[\frac{n}{h!}z\varphi_1^{(h)} + \frac{1}{s!}ay^n\varphi_1^{(s)}\right]r$$
$$\bar{\varphi}_l(x)y^lr\,,\ x^iy^nr \qquad (l = 0, 1, \ldots, n-1\ ;\ i = 0, 1, \ldots, h-1)$$

[18, II]₅ $$p\,,\ xp + [hz + ax^hy^n]r\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \frac{1}{h!}\varphi_1^{(h)}yq + \left[\frac{n}{h!}z\varphi_1^{(h)} + ay^n\varphi_1\right]r$$
$$\bar{\varphi}_l(x)y^lr\,,\ x^iy^nr \qquad (l = 0, 1, \ldots, n-1\ ;\ i = 0, 1, \ldots, h-1)$$

[18, III]₁ $$p\,,\ xp + [h - s]zr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \frac{1}{h!}\varphi_1^{(h)}(x)yq + \frac{1}{s!}a\varphi_1^{(s)}r\,,\ x^ir \qquad (i = 0, 1, \ldots, h-1)$$

[18, III]₂ $$p\,,\ xp + [hz + ax^h]r\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \frac{1}{h!}\varphi_1^{(h)}(x)yq + b\varphi_1r\,,\ x^ir \qquad (i = 0, 1, \ldots, h-1)$$

[18, IV] $$p\,,\ xp\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \psi_0(x, y)r\,,\ \psi_1(x, y)zr$$

[18, V] $$p\,,\ xp\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \psi(x, y)r\,,\ \bar{\varphi}_l(x)yz^lr \qquad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

[18, VI]

$$p\,,\, xp\,,\, \varphi_0(x)q\,,\, \varphi_1(x)[\,yq + azr\,]\,,\, \psi(x\,,y)r\,,\, x^i zr \qquad (i=0,1,\ldots,h-1)$$

[18, VII]

$$p\,,\, xp\,,\, \varphi_0(x)q\,,\, \varphi_1(x)yq\,,\, \bar{\varphi}_l(x)y^l r\,,\, \bar{\varphi}(x)zr \qquad (l=0,1,\ldots,n-1\;;\; i=0,1,\ldots,h-1)$$

[18, VIII]

$$p\,,\, xp\,,\, \varphi_0(x)q\,,\, \varphi_1(x)[\,yq + azr\,]\,,\, \bar{\varphi}_l(x)y^l r\,,\, x^i zr \qquad (l=0,1,\ldots,n-1\;;\; i=0,1,\ldots,h-1)$$

[18, IX]

$$p\,,\, xp\,,\, \varphi_0(x)q\,,\, \varphi_1(x)yq\,,\, x^i r\,,\, zr \qquad (i=0,1,\ldots,h-1)$$

[19] Gruppo accorciato: $p\,,\, xp\,,\, \varphi_0(x)q\,,\, \varphi_1(x)yq\,,\, \varphi_2(x)y^2 q$.

173. — Ci limitiamo a enumerare i tipi, ottenuti aggiungendo una trasf. inf.

$$xp + \beta_1(x\,,y\,,z)r$$

ai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato **[14]** (n. 162).

[19]₁

$$p\,,\, xp - zr\,,\, \varphi_0(x)q + \varphi'_0 r\,,\, \varphi_1(x)yq + [y\varphi'_1 + z\varphi_1]r\,,\, \varphi_2(x)y^2 q + [2yz\varphi_2 + y^2\varphi'_2]r$$

[19]₂

$$p\,,\, xp + bzr\,,\, \varphi_0(x)q\,,\, \varphi_1(x)[\,yq + zr\,]\,,\, \varphi_2(x)[\,y^2 q + 2yzr\,]$$

[19]₃

$$p\,,\, xp\,,\, \varphi_0(x)q\,,\, \varphi_1(x)[\,yq + zr\,]\,,\, \varphi_2(x)[\,y^2 q + (2y + z)zr\,]$$

[19]₄

$$p\,,\, xp + zr\,,\, \varphi_0(x)q\,,\, \varphi_1(x)yq\,,\, \varphi_2(x)y^2 q$$

[19, I]

$$p\,,\, xp + bzr\,,\, \varphi_0(x)q\,,\, \varphi_1(x)[\,yq + \varepsilon zr\,]\,,\, \varphi_2(x)[\,y^2 q + 2\varepsilon yzr\,] \qquad \varepsilon(\varepsilon - 1) = 0$$

[19, II]$_1$ $$p\,,\; xp + bzr\,,\; \varphi_0(x)q\,,\; \varphi_1(x)\left[yq + \frac{n}{2}zr\right],\; \varphi_2(x)\left[y^2q + nzyr\right],\; \bar{\varphi}_l(x)y^l r \qquad (l=0,1,\dots,n)$$

[19, II]$_2$ $$p\,,\; x\varphi\,,\; \varphi_0(x)q\,,\; \varphi_1(x)yq\,,\; \varphi_2(x)\left[y^2q + 2yr\right],\; \bar{\varphi}(x)r$$

[19, III]$_1$ $$p\,,\; xp\,,\; \varphi_0(x)q\,,\; \varphi_1(x)q + a\varphi_1 r\,,\; \varphi_2(x)y^2q + 2ay\varphi_2 r\,,\; x^l r \qquad (l=0,1,\dots,h-1)$$

[19, III]$_2$ $$p\,,\; xp + azr\,,\; \varphi_0(x)q\,,\; \varphi_1(x)yq\,,\; \varphi_2(x)y^2q\,,\; x^l r \qquad (l=0,1,\dots,h-1)$$

[19, III]$_3$ $$p\,,\; xp + \left[hz + ax^h\right]r\,,\; \varphi_0(x)q\,,\; \varphi_1(x)yq\,,\; \varphi_2(x)y^2q\,,\; x^l r \qquad (l=0,1,\dots,h-1)$$

[19, IV] $$p\,,\; xp\,,\; \varphi_0(x)q\,,\; \varphi_1(x)yq\,,\; \varphi_2(x)y^2q\,,\; \psi_0(x, y)r\,,\; \psi_1(x, y)zr$$

[19, V] $$p\,,\; xp\,,\; \varphi_0(x)q\,,\; \varphi_1(x)yq\,,\; \varphi_2(x)y^2q\,,\; \psi(x, y)r\,,\; \bar{\varphi}(x)zr$$

[19, VI] $$p\,,\; xp\,,\; \varphi_0(x)q\,,\; \varphi_1(x)\left[yq + azr\right],\; \varphi_2(x)\left[y^2q + 2ayzr\right],\; \psi(x, y)r\,,\; x^i zr \qquad (i=0,1,\dots,h-1)$$

[19, VII] $$p\,,\; xp\,,\; \varphi_0(x)q\,,\; \varphi_1(x)yq\,,\; \varphi_2(x)\left[y^2q + nyzr\right],\; \bar{\varphi}_l(x)y^l r\,,\; \bar{\varphi}(x)zr \qquad (l=0,1,\dots,n)$$

[19, VIII] $$p\,,\; xp\,,\; \varphi_0(x)q\,,\; \varphi_1(x)\left[yq + \frac{n}{2}zr\right],\; \varphi_2(x)\left[y^2q + nyzr\right],\; \bar{\varphi}_l(x)y^l r\,,\; x^i zr \qquad (l=0,1,\dots,n\,;\; i=0,1,\dots,m)$$

[19, IX] $$p\,,\; xp\,,\; \varphi_0(x)q\,,\; \varphi_1(x)yq\,,\; \varphi_2(x)y^2q\,,\; x^i r\,,\; zr \qquad (i=0,1,\dots,m)$$

[20] Gruppo accorciato: p , xp , $\psi(x, y)q$.

174. — Anche qui basterà enumerare i tipi, che si ottengono, prendendo le mosse dai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [15] (n. 163).

[20]₁ $\quad p, xp - zr, \psi(x, y)q + \left[z\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right]r$

[20]₂ $\quad p, xp, \psi(x, y)q + \left[z\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{3!}z^3\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right]r$

[20]₃ $\quad p, xp + bzr, \psi(x, y)q + \varepsilon z\frac{\partial\psi}{\partial y}r$
$\varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$

[20]₄ $\quad p, xp, \psi(x, y)q + \left[z\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]r$

[20, I] $\quad p, xp + bzr, \psi(x, y)q + \varepsilon z\frac{\partial\psi}{\partial y}r, \psi_0(x, y)r$
$\varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$

[20, II]₁ $\quad p, xp, \psi(x, y)q + \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial y}r, \varphi(x)r$
$\varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$

[20, II]₂ $\quad p, xp + bzr, \psi(x, y)q, \varphi(x)r$

[20, III]₁ $\quad p, xp, \psi(x, y)q + \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial y}r, x^i r$
$(\varepsilon[\varepsilon - 1] = 0 \ ; \ i = 0, 1, \ldots, m)$

[20, III]₂ $\quad p, xp + [bz + b_1 x^m]r, \psi(x, y)q, x^i r$
$(i = 0, 1, \ldots, m - 1)$

[20, IV] $p, xp, \psi(x, y)q, \psi_0(x, y)r, \psi_1(x, y)zr$

[20, V] $p, xp, \psi(x, y)q + \varepsilon z \frac{\partial\psi}{\partial y} r, \psi_0(x, y)r, \varphi(x)zr$
$\varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$

[20, VI] $p, xp, \psi(x, y)q + \varepsilon z \frac{\partial\psi}{\partial y} r, \psi_0(x, y)r, x^i r$
$(\varepsilon[\varepsilon - 1] = 0 ; i = 0, 1, \ldots, m-1)$

[20, VII] $p, xp, \psi(x, y)q, \varphi_0(x)r, \varphi_1(x)zr$

[20, VIII] $p, xp, \psi(x, y)q, \varphi_0(x)r, x^i zr$
$(i = 0, 1, \ldots, m-1)$

[20, IX] $p, xp, \psi(x, y)q, x^i r, zr$
$(i = 0, 1, \ldots, m-1)$

§ 5. — Gruppi che nel fascio invariante di piani subordinano un gruppo ∞^3.

175. — I gruppi di cui qui ci dobbiamo occupare, corrispondono ai gruppi accorciati [21]-[25]; cosicchè si otterranno aggiungendo una trasf. inf.

$$x^2p + 2cxyq + \zeta_2(x, y, z)r$$

ai gruppi determinati nel paragrafo precedente, partendo dai gruppi accorciati [16]-[20].

[21] **Gruppo accorciato**: $p, xp + cyq, x^2p + 2cxyq, \varphi(x)q$.

176. — I *gruppi di prima specie* sono riducibili ai tipi seguenti (cfr. i gruppi $[16]_1$-$[16]_3$ del n. 165):

$[21]_1$ $p, xp + cyq + (c-1)zr, x^2p + 2cxyq + 2[(c-1)xz + cy]r, \varphi(x)q + \varphi' r$

[21]₂ $p\,,\ 2xp + (s-1)yq - (s+1)zr\,,\ x^2p + (s-1)xyq - (s+1)xzr\,,\ \varphi(x)q + \frac{1}{s!}\varphi^{(s)}r$

[21]₃ $p\,,\ xp + yq + ar\,,\ x^2p + 2xyq + 2[ax + \varepsilon y]r\,,\ \varphi(x)q + \varepsilon\varphi' r$ $\quad \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$

[21]₄ $p\,,\ xp + cyq + zr\,,\ x^2p + 2cxyq + 2xzr\,,\ \varphi(x)q$

177. — Passando ai *gruppi di seconda specie*, deduciamo da **[16, I]₁** e **[16, II]₂** (n. 166)

[21, I]₁ $p\,,\ xp + cyq + bzr\,,\ x^2p + 2cxyq + 2bxzr\,,\ \varphi(x)q\,,\ \psi(x, y)r$

[21, I]₂ $p\,,\ xp + yq + bzr\,,\ x^2p + 2xyq + 2[bx + ay]zr\,,\ \varphi(x)q + az\varphi' r\,,\ \psi(x, y)r$

Così dai gruppi **[16, II]₁**, **[16, II]₂**, **[16, II]₃** risultano i tipi seguenti:

[21, II]₁ $p\,,\ xp + cyq + [bz + b_1y^n]r\,,\ x^2p + 2cxyq + [2bxz + 2b_1xy^n]r\,,\ \varphi(x)q\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr$ $\quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$

[21, II]₂ $p\,,\ xp + cyq + [(nc-1)z + by^n]r\,,$
$x^2p + 2cxyq + [2(nc-1)xz + 2bxy^n + b_1y^n]r\,,\ \varphi(x)q\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr$ $\quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$

[21, II]₃ $p\,,\ xp + yq + bzr\,,\ x^2p + 2xyq + 2[bx + ay]zr\,,\ \varphi(x)q + az\varphi' r\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr$ $\quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$

[21, II]₄ $p\,,\ xp + [bz + b_1y^n]r\,,\ x^2p + 2[bxz + b_1xy^n]r\,,\ \varphi(x)q\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr\,,\ \varphi_{s,t}(x)y^se^{c_ty}r$ $\quad (l = 0, 1, \ldots, n-1\ ;\ t = 1, 2, \ldots, k\ ;\ s = 0, 1, \ldots, n_t)$

[21, II]₅ $p\,,\ xp - zr\,,\ x^2p + [by^n - 2xz]r\,,\ \varphi(x)q\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr\,,\ \varphi_{s,t}(x)y^se^{c_ty}r$ $\quad (l = 0, 1, \ldots, r-1\ ;\ t = 1, 2, \ldots, k\ ;\ s = 0, 1, \ldots, n_t)$

Nei gruppi **[16, II]$_4$**-**[16, II]$_{12}$** abbiamo h trasf. inf. della forma

$$x^i y^n r \qquad i = 0, 1, \dots, h-1.$$

Ora la trasf. inf. da aggiungere è della forma

$$x^2 p + 2cxyq + \{2bxz + \beta_2(x, y)\} r$$

e dalla alternata

$$(x^2 p + 2cxyq + \{2bxz + \beta_2\} r, x^{h-1} y^n r) = [h - 1 + 2cn - 2b] x^h y^n r$$

si ricava

$$2b = h - 1 + 2cn$$

cosicchè dovendo essere $h \geq 1$, si escludono senz'altro i gruppi **[16, II]$_8$**-**[16, II]$_{12}$**. Invece partendo dai gruppi **[16, II]$_4$**-**[16, II]$_7$** e **[16]$_{13}$**-**[16]$_{16}$**, si trovano i tipi seguenti:

[21, II]$_6$

$$p, \varphi(x)q, xp + cyq + \frac{1}{2}(2cn + m - 1)zr, x^2 p + 2cxyq + (2cn + m - 1)xzr$$
$$\varphi_l(x) y^l r, x^i y^n r$$
$$(l = 0, 1, \dots, n-1 \ ; \ i = 0, 1, \dots, m-1)$$

[21, II]$_7$

$$p, \varphi(x)q + ay^n \varphi' r, xp + \frac{m+1}{2} yq + \frac{1}{2}\left[(n+1)(m+1) - 2\right] zr,$$
$$x^2 p + (m+1)xyq + \left[(\{n+1\}\{m+1\} - 2)xz + \frac{m+1}{n+1} ay^{n+1}\right] r,$$
$$\varphi_l(x) y^l r, x^i y^n r$$
$$(l = 0, 1, \dots, n-1 \ ; \ i = 0, 1, \dots, m-1)$$

[21, II]$_8$

$$p, \varphi'(x)q + y^n [a_0 \varphi + a_1 \varphi'] r, xp - yq + \left[nz - \frac{a}{n+1} y^{n+1}\right] r,$$
$$x^2 p - 2xyq + \left[2nxz - \frac{2a_1}{n+1} xy^{n+1}\right] r$$
$$\varphi_l(x) y^l r, y^n r$$
$$(l = 0, 1, \dots, n-1)$$

[21, II]$_9$

$$p, \varphi(x)\{q + y^n r\}, xp + cyq + \left[\frac{2cn + m - 1}{2} z + \frac{2c - m + 1}{2(n+1)} y^{n+1}\right] r$$
$$x^2 p + 2cxyq + \left[(2cn + m - 1)xz + \frac{2c - m + 1}{2} xy^{n+1}\right] r$$
$$\varphi_l(x) y^l r, x^i y^n r$$
$$l = 0, 1, \dots, n-1 \ ; \ i = 0, 1, \dots, m-1$$

[21, II]₁₀

$$p\,,\ \varphi(x)[q + y^n r\ ,\ xp + \frac{m-1}{2}\left[z - \frac{1}{n+1}y^{n+1}\right]r\,,$$

$$x^2p + (m-1)x\left[z - \frac{1}{n+1}y^{n+1}\right]r$$

$$\varphi_l(x)y^l r\,,\ x^i y^n r\,,\ \varphi_{s\cdot t}(x)y^s e^{c_t y} r$$

$$(l = 0, 1, \dots, n-1\ ;\ i = 0, 1, \dots, m-1\ ;\ t = 1, 2, \dots, k\ ;\ s = 0, 1, \dots, n_t)$$

[21, II]₁₁

$$p\,,\ \varphi(x)q + ay^n\varphi' r\,,\ xp + cyq + [c(n+1)-1]zr\,,$$

$$x^2p + 2cxyq + \left[2[c(n+1)-1]xz + 2\frac{ac}{n+1}y^{n+1}\right]r$$

$$\varphi_l(x)y^l r$$

$$(l = 0, 1, \dots, n-1)$$

[21, II]₁₂

$$p\,,\ \varphi(x)q + ay^n\varphi' r\,,\ xp + yq + [nz + by^n]r\,,$$

$$x^2p + 2xyq + \left[2nxz + 2bxy^n + 2\frac{a}{n+1}y^{n+1}\right]r$$

$$\varphi_l(x)y^l r$$

$$(l = 0, 1, \dots, n-1)$$

[21, II]₁₃

$$p\,,\ \varphi(x)q + ay^n\varphi' r\,,\ xp - zr\,,\ x^2p + [by^n - 2xz]r$$

$$\varphi_l(x)y^l r\,,\ \varphi_{s\cdot t}(x)y^s e^{c_t y} r$$

$$(l = 0, 1, \dots, n-1\ ;\ t = 1, 2, \dots, k\ ;\ s = 0, 1, \dots, n_t)$$

[21, II]₁₄

$$p\,,\ \varphi(x)[q + y^n r]\,,\ xp + by^n r\,,\ x^2p + 2bxy^n r$$

$$\varphi_l(x)y^l r\,,\ \varphi_{s\cdot t}(x)y^s e^{c_t y} r$$

$$(l = 0, 1, \dots, n-1\ ;\ t = 1, 2, \dots, k\ ;\ s = 0, 1, \dots, n_t)$$

A completare la enumerazione dei gruppi di seconda specie restano da considerare i gruppi corrispondenti a **[16, III]₁-[16-III]₄**

[21, III]₁

$$p\,,\ \frac{1}{h!}\varphi^{(h)}(x)q + a\varphi r\,,$$

$$2xp - (h+1)yq + (h-1)zr\,,\ x^2p - (h+1)xyq + (h-1)xzr$$

$$x^i r$$

$$(i = 0, 1, \dots, h-1)$$

[21, III]$_2$ $$p\,,\,xp-yq\,,\,x^2p-2xyq+bxr\,,\,\varphi'(x)q+a\varphi r\,,\,r$$

[21, III]$_3$ $$p\,,\,2xp+(m+1)yq+(m-1)zr\,,\\ x^2p+(m+1)xyq+(m-1)xzr\,,\,\varphi(x)q+a\varphi' r\,,\,x^i r\\ (i=0,1,\ldots,m-1)$$

[21, III]$_4$ $$p\,,\,xp+cyq+\frac{1}{2}(m-1)zr\,,\,x^2p+2cxyq+(m-1)xzr\,,\,\varphi(x)q\,,\,x^i r\\ (i=0,1,\ldots,m-1)$$

[21, III]$_5$ $$p\,,\,xp+yq\,,\,x^2p+2xyq+[2by+ax]r\,,\,\varphi(x)q+b\varphi' r\,,\,r$$

[21, III]$_6$ $$p\,,\,xp+cyq\,,\,x^2p+2cxyq+axr\,,\,\varphi(x)q\,,\,r$$

178. — Il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie* può appartenere a tre tipi distinti, cioè ai tipi [21, III]$_6$, [21, III]$_5$, [21, III]$_2$. Tenendo presenti questi tre gruppi e le particolarità dipendenti dall'annullarsi di c nel caso [21, III]$_6$, otteniamo i tipi seguenti:

[21, IV] $$p\,,\,xp+cyq\,,\,x^2p+2cxyq\,,\,\varphi(x)q\,,\,\psi_0(x,y)r\,,\,\psi_1(x,y)zr$$

[21, V]$_1$ $$p\,,\,xp+cyq\,,\,x^2p+2cxyq\,,\,\varphi(x)q\,,\,\psi(x,y)r\,,\,\varphi_l(x)y^l zr\\ (l=0,1,\ldots,n-1)$$

[21, V]$_2$ $$p\,,\,xp\,,\,x^2p\,,\,\varphi(x)q\,,\,\psi(x,y)r\,,\,\varphi_l(x)y^l zr\,,\,\varphi_{s,t}(x)y^s e^{c_t y} zr\\ (l=0,1,\ldots,n-1\;;\;t=1,2,\ldots,k\;;\;s=0,1,\ldots,n_t)$$

[21, V]$_3$ $$p\,,\,xp+yq\,,\,x^2p+2xyq+2byzr\,,\,\varphi(x)q\,,\,\psi(x,y)r\,,\,\bar\varphi(x)zr$$

[21, VI]$_1$ $$p\,,\,xp+cyq\,,\,x^2p+2cxyq+axzr\,,\,\varphi(x)q\,,\,\psi(x,y)r\,,\,zr$$

[21, VI]$_2$ $p\,,\; xp + yq\,,\; x^2p + 2xyq + [2by + ax]zr\,,\; \varphi(x)q + bz\varphi' r\,,\; \psi(x\,,y)r\,,\; zr$

[21, VI]$_3$ $p\,,\; xp - yq\,,\; x^2p - 2xyq + axzr\,,\; \varphi'(x)q + bz\varphi r\,,\; \psi(x\,,y)r\,,\; zr$

[21, VII]$_1$ $p\,,\; xp + cyq\,,\; x^2p + 2cxyq\,,\; \varphi(x)q\,,\; \varphi_l(x)y^l r\,,\; \bar\varphi(x)zr$ $\quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$

[21, VII]$_2$ $p\,,\; xp\,,\; x^2p\,,\; \varphi(x)q\,,\; \varphi_l(x)y^l r\,,\; \varphi_{s\,.\,t}(x)y^s e^{c_t y} r\,,\; \bar\varphi(x)zr$ $\quad (l = 0, 1, \ldots, n-1\;;\; t = 1, 2, \ldots, k\;;\; s = 0, 1, \ldots, n_t)$

[21, VIII]$_1$ $p\,,\; xp + cyq\,,\; x^2p + 2cxyq + axzr\,,\; \varphi(x)q\,,\; \varphi_l(x)y^l r\,,\; zr$ $\quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$

[21, VIII]$_2$ $p\,,\; xp\,,\; x^2p + axzr\,,\; \varphi(x)q\,,\; \varphi_l(x)y^l r\,,\; \varphi_{s\,.\,t}(x)y^s e^{c_t y} r\,,\; zr$ $\quad (l = 0, 1, \ldots, n-1\;;\; t = 1, 2, k\;;\; s = 0, 1, \ldots, n_t)$

[21, VIII]$_3$ $p\,,\; xp - yq\,,\; x^2p - 2xyq + axzr\,,\; \varphi'(x)q + bz\varphi r\,,\; \varphi_l(x)y^l r\,,\; zr$ $\quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$

[21, IX] $p\,,\; xp + cyq\,,\; x^2p + 2cxyq + mxzr\,,\; \varphi(x)q\,,\; x^i r\,,\; zr$ $\quad (i = 0, 1, \ldots, m)$

[22] Gruppo accorciato: $p\,,\; xp\,,\; x^2p + 2cxyq\,,\; \varphi(x)q\,,\; yq$.

179. — A base della determinazione prenderemo qui i gruppi corrispondenti al gruppo accorciato **[17]** (nn. 169-171) per $m = 0$

$$p\,,\; xp\,,\; \varphi(x)q\,,\; yq$$

e a ciascuno di essi aggiungeremo una trasf. inf.

$$x^2p + 2cxyq + \beta_2(x\,,y\,z)r\,.$$

Del resto, come riprova, possiamo anche aggiungere una trasformazione infinitesimale

$$yq + \gamma_1(x\,,y\,,z)r$$

ai gruppi testè determinati, partendo dal gruppo accorciato **[21]** (nn. 176-178).

[22]$_1$ $$p\,,\ xp - zr\,,\ x^2p + 2cxyq + 2\,[cy + (c-1)\,xz\,]\,r\,,\ yq + zr\,,\ \varphi(x)q + \varphi' r$$

[22]$_2$ $$p\,,\ xp - szr\,,\ x^2p + (s-1)xyq - (s+1)xzr\,,\ yq + zr\,,\ \varphi(x)q + \frac{1}{s!}\,\varphi^{(s)} r$$

[22]$_3$ $$p\,,\ xp + zr\,,\ x^2p + 2cxyq + 2\,[ac + 1\,]\,xzr\,,\ yq + azr\,,\ \varphi(x)\,q$$

[22]$_4$ $$p\,,\ xp\,,\ x^2p + 2cxyq + axzr\,,\ yq + zr\,,\ \varphi(x)q$$

[22, I] $$p\,,\ xp + azr\,,\ x^2p + 2cxyq + 2\,[a + bc]\,xzr\,,\ yq + bzr\,,\ \varphi(x)q\,,\ \psi(x\,,y)r$$

[22, II]$_1$ $$p\,,\ xp + ay^n r\,,\ yq + [nz + by^n]\,r\,,\ x^2p + 2cxyq + [2ncxz + 2\,(a + bc)\,xy^n]\,r$$ $$\varphi(x)\,q\ ,\ \varphi_l(x)\,y^l r$$ $$(l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

[22, II]$_2$ $$p\,,\ xp + bzr\,,\ x^2p + 2cxyq + 2\,[b + cn]\,xzr\,,\ yq + nzr\,,\ \varphi(x)q\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$ $$(l = 0, 1, \ldots n-1)$$

[22, II]$_3$ $$p\,,\ xp - zr\,,\ x^2p + 2cxyq + [2\,(cn - 1)\,xz + by^n\,]\,r\,,\ yq + nzr\,,\ \varphi(x)q\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$ $$(l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

[22, II]$_4$ $$p\,,\ xp + by^n r\,,\ x^2p + 2cxyq + 2\,[cnz + by^n\,]\,xr\,,\ yq + nzr\,,\ \varphi(x)q\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$ $$(l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

[22, II]$_5$ $$p\,,\ xp - zr\,,\ x^2p + [m + 1]\,xyq + \Big[\,([m+1][n+1] - 2)\,xz + \frac{m+1}{n+1}\,y^{n+1}\Big]\,r\,,$$ $$yq + (n+1)\,zr\,,\ \varphi(x)\,q + y^n \varphi' r\,,$$ $$\varphi_l(x)y^l r\,,\ x^i y^n r$$ $$(l = 0, 1, \ldots, n-1\ ;\ i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

[22, II]$_6$

$$p\,,\; xp - zr\,,\; x^2p + 2cxyq + 2\left[(c[n+1]-1)xz + \frac{c}{n+1}y^{n+1}\right]r\,,$$
$$yq + (n+1)zr\,,\; \varphi(x)q + y^n\varphi' r$$
$$\varphi_l(x)y^l r$$
$$(l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

[22, II]$_7$

$$p\,,\; xp + ay^n r\,,\; x^2p + 2axy^n r\,,\; yq + (n+1)zr\,,\; \varphi(x)|q + y^n r|\,,\; \varphi_l(x)y^l r$$
$$(l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

[22, III]$_1$

$$q\,,\; xp + hzr\,,\; yq + zr\,,\; x^2p - |h+1|xyq + |h-1|xzr\,,\; \frac{1}{h!}\varphi^{(h)}(x)q + \varphi r\,,\; x^i r$$
$$(i = 0, 1, \ldots, h-1)$$

[22, III]$_2$

$$p\,,\; xp + zr\,,\; yq + zr\,,\; x^2p - 2xyq + bxr\,,\; \varphi'(x)q + a\varphi r\,,\; r$$

[22, III]$_3$

$$p\,,\; xp - zr\,,\; yq + zr\,,\; x^2p + (h+1)xyq + (h-1)xzr\,,\; \varphi(x)q + a\varphi' r\,,\; x^i r$$
$$(i = 0, 1, \ldots, h-1)$$

[22, III]$_4$

$$p\,,\; xp - zr\,,\; yq + zr\,,\; x^2p + 2xyq + 2yr\,,\; \varphi(x)q + \varphi' r\,,\; r$$

[22, III]$_5$

$$p\,,\; 2xp + [h - 2bc - 1]zr\,,\; yq + bzr\,,\; x^2p + 2cxyq + (h-1)xzr\,,\; \varphi(x)q\,,\; x^i r$$
$$(i = 0, 1, \ldots, h-1)$$

[22, III]$_6$

$$p\,,\; xp\,,\; yq\,,\; x^2p + 2cxyq + axr\,,\; \varphi(x)q\,,\; r$$

[22, IV]

$$p\,,\; xp\,,\; yq\,,\; x^2p + 2cxyq\,,\; \varphi(x)q\,,\; \psi_0(x, y)r\,,\; \psi_1(x, y)zr$$

[22, V]

$$p\,,\; xp\,,\; yq\,,\; x^2p + 2cxyq\,,\; \varphi(x)q\,,\; \psi(x, y)r\,,\; \varphi_l(x)y^l zr$$
$$(l = 0, 1, \ldots, n)$$

[22, VI]

$$p\,,\; xp\,,\; yq\,,\; x^2p + 2cxyq + axzr\,,\; \varphi(x)q\,,\; \psi(x, y)r\,,\; zr$$

[22, VII] $$p\,,\,xp\,,\,yq\,,\,x^2p+2cxyq\,,\,\varphi(x)q\,,\,\varphi_l(x)y^lr\,,\,\bar{\varphi}(x)zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[22, VIII] $$p\,,\,xp\,,\,yq\,,\,x^2p+2cxyq+axzr\,,\,\varphi(x)q\,,\,\varphi_l(x)y^lr\,,\,zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[22, IX] $$p\,,\,xp\,,\,yq\,,\,x^2p+2cxyq+hxzr\,,\,\varphi(x)q\,,\,x^ir\,,\,zr \qquad (i=0,1\dots h)$$

[23] Gruppo accorciato: $p\,,\,xp\,,\,x^2p\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq$.

180. — I gruppi corrispondenti al nostro gruppo accorciato si possono ottenere, sia aggiungendo una trasf. inf.

$$x^2p+\beta_2(x\,,y\,,z)r$$

ai gruppi aventi il gruppo accorciato $p\,,\,xp\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq$ (n. **172**), sia aggiungendo una trasf. inf.

$$\varphi_1(x)yq+\zeta_1(x\,,y\,,z)r$$

ai gruppi determinati or ora, corrispondentemente al gruppo accorciato [22] (n. prec.). Il confronto delle due serie di gruppi corrispondenti a [18] e a [22] permette di controllare l'esattezza dei calcoli.

$[23]_1$ $$p\,,\,xp-zr\,,\,x\,p-2xzr\,,\,\varphi_0(x)q+\varphi'_0r\,,\,\varphi\,(x)yq+[y\varphi'_1+z\varphi_1]r$$

$[23]_2$ $$p\,,\,xp-zr\,,\,x^2p-2[a+xz]r\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq+\varphi'_1r$$

$[23]_3$ $$p\,,\,xp+bzr\,,\,x^2p+2bxzr\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)[yq+\varepsilon zr] \qquad \varepsilon[\varepsilon-1]=0$$

$[23]_4$ $$p\,,\,xp-zr\,,\,x^2p-[a+2xz]r\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq$$

[23, I] $$p\,,\ xp + bzr\,,\ x^2p + 2bxzr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi(x)[yq + azr]\,,\ \psi(x\,,y)r$$

[23, II]₁ $$p\,,\ xp - zr\,,\ x^2p + [ay^n - 2xz]r\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,[nz\varphi_1 + by^n\varphi'_1]r\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr$$

[23, II]₂ $$p\,,\ xp + by^nr\,,\ x^2p + 2bxy^nr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + (nz + ay^n)]r\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr \quad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[23, II]₃ $$p\,,\ xp + azr\,,\ x^2p + 2axzr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + bzr]\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr \quad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[23, II]₄ $$p\,,\ xp\,,\ x^2p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + (nz + ay^n)r]\,,\ \bar{\varphi}(x)y^lr\,,\ y^nr \quad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[23, III] $$p\,,\ xp\,,\ x^2p + bxr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + ar]\,,\ r$$

[23, IV] $$p\,,\ xp\,,\ x^2p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \psi_0(x\,,y)r\,,\ \psi_1(x\,,y)zr$$

[23, V] $$p\,,\ xp\,,\ x^2p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lzr \quad (l=0,1,\dots,m-1)$$

[23, VI] $$p\,,\ xp\,,\ x^2p + axzr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + bzr]\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ zr$$

[23, VII] $$p\,,\ xp\,,\ x^2p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr\,,\ \bar{\varphi}(x)zr \quad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[23, VIII] $$p\,,\ xp\,,\ x^2p + axzr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + bzr]\,,\ \bar{\varphi}_l(x)y^lr\,,\ zr$$

[23, IX] $$p\,,\ xp\,,\ x^2p + mxzr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ x^ir\,,\ zr \quad (i=0,1,\dots,m)$$

[24] Gruppo accorciato: $p\,,\ xp\,,\ x^2p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q\,.$

181. — Anche qui si possono seguir due vie o, meglio si può controllare la esattezza dei resultati, tenendo presenti due serie di gruppi già ottenute. Si può, cioè, aggiungere una trasf. inf.

$$x^2p + \beta_2(x\,,y\,,z)r$$

ai gruppi corrispondenti a [19] (n. 173) e, d'altra parte, aggiungere una trasf. inf.

$$\varphi_2(x)y^2q + \zeta_2(x\,,y\,,z)r$$

ai gruppi determinati nel numero precedente partendo dal gruppo accorciato [23].

Otterremo così i gruppi seguenti, che ci limitiamo a enumerare:

$[24]_1$
$$p\,,\ xp - zr\,,\ x^2p - 2xzr\,,\ \varphi_0(x)q + \varphi'_0r\,,\ \varphi_1(x)yq + [z\varphi_1 + y\varphi'_1]r\,,$$
$$\varphi_2(x)y^2q + [2yz\varphi_2 + y^2\varphi'_2]r$$

$[24]_2$
$$p\,,\ xp + azr\,,\ x^2p + 2axzr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + zr]\,,\ \varphi_2(x)[y^2q + 2yzr]$$

$[24]_3$
$$p\,,\ xp\,,\ x^2p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)q[yq + zr]\,,\ \varphi_2(x)[y^2q + (2y + z)zr]$$

$[24]_4$
$$p\,,\ xp + zr\,,\ x^2p + [2x + \varepsilon z]zr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q$$
$$\varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$$

$[24\,,\mathrm{I}]$
$$p\,,\ xp + bzr\,,\ x^2p + 2bxzr\,,\ \varphi_0(x)q\,,$$
$$\varphi_1(x)[yq + azr]\,,\ \varphi_2(x)[y^2q + 2ayzr]\,,\ \psi(x\,,y)r$$

$[24\,,\mathrm{II}]_1$
$$p\,,\ xp + bzr\,,\ x^2p + 2bxzr\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)\left[yq + \frac{n}{2}zr\right],$$
$$\varphi_2(x)[y^2q + nyzr]\,,\ \bar\varphi_l(x)y^lr$$
$$(l = 0\,,1\,,\dots,n)$$

[24, II]₂ $p\,,\,xp\,,\,x^2p\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq\,,\,\varphi_2(x)[y^2q+2\varepsilon yr]\,,\,\bar\varphi(x)r$

$\varepsilon[\varepsilon-1]=0$

[24, III]₁ $p\,,\,xp\,,\,x^2p+axr\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)[yq+\varepsilon r]\,,\,\varphi_2(x)[y^2q+2\varepsilon yr]\,,\,r$

$\varepsilon[\varepsilon-1]=0$

[24, III]₂ $p\,,\,xp+\left[\frac{m}{2}z+ax^{m+1}\right]r\,,\,x^2p+\left[mxz+\frac{2a}{m+2}x^{m+2}\right]r\,,$

$\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq\,,\,\varphi_2(x)y^2q\,,\,x^ir$

$(i=0,1,\dots,m)$

[24, IV] $p\,,\,xp\,,\,x^2p\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq\,,\,\varphi_2(x)y^2q\,,\,\psi_0(x\,,\,y)r\,,\,\psi_1(x\,,\,y)zr$

[24, V] $p\,,\,xp\,,\,x^2p\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq\,,\,\varphi_2(x)[y^2q+2ayzr]\,,\,\psi(x\,,\,y)r\,,\,\varphi(x)zr$

[24, VI] $p\,,\,xp\,,\,x^2p+axzr\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)[yq+\varepsilon zr]\,,$

$\varphi_2(x)[y^2q+2\varepsilon yzr]\,,\,\psi(x\,,\,y)r\,,\,zr$

[24, VII] $p\,,\,xp\,,\,x^2p\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq\,,\,\varphi_2(x)[y^2q+nyzr]\,,\,\bar\varphi_i(x)y^ir\,,\,\bar\varphi(x)zr$

$(i=0,1,\dots,n)$

[24, VIII] $p\,,\,xp\,,\,x^2p+axzr\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)\left[yq+\frac{n}{2}zr\right]\,,$

$\varphi_2(x)[y^2q+nyzr]\,,\,\bar\varphi_i(x)y^ir\,,\,zr$

$(i=0,1,\dots,n)$

[24, IX] $p\,,\,xp\,,\,x^2p+mxzr\,,\,\varphi_0(x)q\,,\,\varphi_1(x)yq\,,\,\varphi_2(x)y^2q\,,\,x^iz\,,\,zr$

$(i=0,1,\dots,m)$

[25] Gruppo accorciato: $p\,,\ xp\,,\ x^2p\,,\ \psi(x\,,y)q$.

182. — Tenendo simultaneamente presenti i gruppi testè determinati e i gruppi corrispondenti al gruppo accorciato [20] (n. 174) otteniamo i tipi seguenti:

$[25]_1$ $$p\,,\ xp - zr\,,\ x^2p - 2xzr\,,\ \psi(x\,,y)q + \left[z\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right]r$$

$[25]_2$ $$p\,,\ xp\,,\ x^2p\,,\ \psi(x\,,y)q + \left[z\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{3\,!}z^3\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right]r$$

$[25]_3$ $$p\,,\ xp + zr\,,\ x^2p + 2xzr\,,\ \psi(x\,,y)q + z\frac{\partial\psi}{\partial y}r$$

$[25]_4$ $$p\,,\ xp + zr\,,\ x^2p + [2x + z]zr\,,\ \psi(x\,,y)q$$

$[25]_5$ $$p\,,\ xp\,,\ x^2p\,,\ \psi(x\,,y)q + \left[z\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]r$$

$[25\,,\mathrm{I}]$ $$p\,,\ xp + azr\,,\ x^2p + 2axzr\,,\ \psi(x\,,y)q + bz\frac{\partial\psi}{\partial y}r\,,\ \psi_0(x\,,y)r$$

$[25]_1$ $$p\,,\ xp\,,\ x^2p\,,\ \psi(x\,,y)q + \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial y}r\,,\ \varphi(x)r$$
$$\varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$$

$[25\,,\mathrm{II}]_2$ $$p\,,\ xp + azr\,,\ x^2p + 2axzr\,,\ \psi(x\,,y)q\,,\ \varphi(x)r$$

$[25\,,\mathrm{III}]_1$ $$p\,,\ xp + \frac{m}{2}zr\,,\ x^2p + mxzr\,,\ \psi(x\,,y)q\,,\ x^i r$$
$$(i = 0, 1, \ldots, m)$$

$[25\,,\mathrm{III}]_2$ $$p\,,\ xp\,,\ x^2p + axr\,,\ \psi(x\,,y)q + \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial y}r\,,\ r$$

[25, IV] $p, xp, x^2p, \psi(x, y)q, \psi_0(x, y)r, \psi_1(x, y)zr$

[25, V] $p, xp, x^2p, \psi(x, y)q + \varepsilon z \frac{\partial \psi}{\partial y} r, \psi_0(x, y)r, \varphi(x)zr$

[25, VI] $p, xp, x^2p + axzr, \psi(x, y)q + \varepsilon z \frac{\partial \psi}{\partial y} r, \psi_0(x, y)r, zr$

[25, VII] $p, xp, x^2p, \psi(x, y)q, \varphi_0(x)r, \varphi_1(x)zr$

[25, VIII] $p, xp, x^2p + axzr, \psi(x, y)q, \varphi_0(x)r, zr$

[25, IX] $p, xp, x^2p + mxzr, \psi(x, y)q, x^i r, zr$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$

§ 6. — Gruppi che nel fascio invariante di piani subordinano un gruppo ∞^∞.

183. Questi gruppi si ottengono partendo dai gruppi accorciati [26]-[33].

I gruppi [26]-[30] contengono rispettivamente come sottogruppi i gruppi [21]-[25], talchè i corrispondenti gruppi spaziali si otterranno aggiungendo ai gruppi determinati nel paragrafo precedente (nn. 172-186) una schiera di trasf. inf. della forma (*)

$$\varphi(x)p + c\varphi' yq + \zeta(x, y, z)r .$$

Invece i gruppi [31]-[33] richiedono una trattazione *ex novo.* Notiamo come fra questi tre gruppi siano particolarmente interessanti il [31] e il [33], come quelli che *insieme con* [1] *danno tutti*

(*) Veramente basterebbe aggiungere una trasf. inf. del terz'ordine

$$x^3p + 3cx^2yq + \ldots,$$

giacchè poi alternando iteratamente questa con le trasf. inf. del 2.° ordine si otterrebbero tutte le trasf. inf. d'ordine superiore; ma per lo più conviene tener presente senz'altro tutta la schiera di trasf. inf.

i gruppi infiniti piani non abeliani e dipendenti soltanto da una funzione arbitraria di una sola variabile (*).

Per caratterizzare la differenza che, da un punto di vista geometrico, intercede fra i gruppi spaziali corrispondenti a [31]-[33] e quelli corrispondenti a [6]-[30], osserviamo che, nel piano, tanto i gruppi [31]-[33] quanto i [6]-[30] trasformano in sè l'unica schiera di curve $x = \text{cost.}$; ma mentre i gruppi [6]-[30] contengono tutti il sottogruppo infinito

$$\varphi(x) q ,$$

i gruppi [31]-[33] non possiedono nessuna trasf. inf. della forma

$$\alpha(x) q .$$

In altre parole, i gruppi [6]-[30] ammettono un *sottogruppo* (*infinito*) *intransitivo che lascia ferma ogni singola retta* $x = \text{cost.}$; mentre invece i gruppi [31]-[33] non contengono nessuna trasf. inf. che trasformi in sè ciascuna di codeste rette.

Concludiamo quindi che i gruppi spaziali, che ammettono i gruppi accorciati [31]-[33], godono delle seguenti proprietà: *a*) *trasformano in sè simultaneamente la stella di rette* $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$, *e il fascio di piani* $x = \text{cost.}$; *b*) *subordinano nel fascio un gruppo infinito; c*) *non contengono nessuna trasformazione infinitesima che lasci fermo ogni singolo piano del fascio.*

Le proprietà *a*) e *b*) sono comuni anche ai gruppi corrispondenti agli altri gruppi accorciati [6]-[30], mentre la *c*) è caratteristica dei gruppi associati a [31]-[33].

A

[26] Gruppo accorciato: $\varphi(x)q$, $\varphi(x)p + cy\varphi' q$.

184. — Per avere i gruppi corrispondenti a questo gruppo accorciato possiamo prender le mosse dai gruppi aventi il gruppo

(*) I *gruppi di prima specie* corrispondenti ai gruppi accorciati [1], [6], [31], [33] sono i gruppi determinati dal Medolaghi: *Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del 2.° ordine, che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali* [Ann. di Mat. (3), t. 1 (1888)].

accorciato [**21**] (nn. 176-178) e aggiungere a ciascuna di essi la schiera di trasf. inf.

$$\bar{\varphi}(x)p + cy\bar{\varphi}'q + \zeta(x, y, z)r,$$

dove ζ è una funzione dipendente da φ, ma che può naturalmente in certi casi esserne determinata soltanto a meno di una funzione generica di un certo insieme funzionale lineare.

Nel caso dei *gruppi di prima specie* (che sono caratterizzati dalla proprietà di non contenere nessuna trasf. inf. della forma $\alpha(x, y, z)r$) codesto insieme lineare manca; cioè la ζ è *determinata univocamente dalla* φ, talchè avremo

$$\zeta = A(\bar{\varphi}),$$

dove la A è una certa forma differenziale lineare a coefficienti determinati

$$A(\bar{\varphi}) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \alpha_m(x, y, z) \bar{\varphi}^{(m)}.$$

Cominciamo col supporre che il sottogruppo

$$(46) \qquad p + \dots, xp + cyq + \dots, x^2p + 2cxyq + \dots, \varphi(x)q + \dots$$

del nostro gruppo di prima specie sia già ridotto alla forma $[\mathbf{21}]_1$ del n. 176:

$$p, xp + cyq + (c-1)zr, x^2p + 2cxyq + 2\{(c-1)xz + cy\}r, \varphi(x)q + \varphi'r.$$

L'ipotesi è legittima in quanto le trasformazioni spaziali, con cui il più generale gruppo (46) è stato ridotto alla forma tipica $[\mathbf{21}]_1$ erano del tipo

$$x' = x, y' = y, z' = z'(x, y, z)$$

e perciò non alteravano la forma del gruppo accorciato [**26**], di cui qui ci occupiamo.

Sotto la precedente ipotesi avremo senz'altro

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = (c-1)z, \alpha_2 = 2cy.$$

Inoltre dalle alternate

$$(p, \bar{\varphi}p + c\bar{\varphi}'yq + A(\bar{\varphi})r) = \bar{\varphi}'p + c\bar{\varphi}''yq + D_x A(\bar{\varphi})r$$
$$(q, \bar{\varphi}p + c\bar{\varphi}'yq + A(\bar{\varphi})r) = c\bar{\varphi}'q + D_y A(\bar{\varphi})r$$
$$(xq + r, \bar{\varphi}p + c\bar{\varphi}'yq + A(\bar{\varphi})r) = \{cx\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}\}q + \{x D_y A(\bar{\varphi}) + D_z A(\bar{\varphi})\}r$$

ricaviamo che debbono essere identicamente soddisfatte le seguenti equazioni funzionali:

$$a)\qquad D_x A(\varphi) = A(\varphi')$$

$$b)\qquad D_y A(\varphi) = c\varphi''$$

$$c)\qquad D_z A(\varphi) = (c-1)\varphi' .$$

La a) ci dice che la forma A è commutabile con D_x e quindi i coefficienti α_m sono tutti indipendenti da x; e così le b) e c), in quanto si ha

$$\alpha_1 = (c-1)z\,,\ \alpha_2 = 2cy\,,$$

ci dicono che tutti i coefficienti $\alpha_3, \alpha_4, .., \alpha_n$ sono indipendenti anche da y e z, e quindi costanti.

Posto

$$\alpha_i = a_i\,,$$

risulta dall' alternata

$$(xp + cyq + [c-1]zr\,,\bar{\varphi}p + c\bar{\varphi}'yq + A(\bar{\varphi})r) =$$
$$= [x\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}]p + cx\bar{\varphi}''yq + [xD_xA(\bar{\varphi}) + cyD_yA(\bar{\varphi}) + [c-1]zD_zA(\bar{\varphi}) - [c-1]A(\bar{\varphi})]r$$

che deve sussistere l' identità funzionale

$$A(x\bar{\varphi}') - A(\bar{\varphi}) = xD_xA(\bar{\varphi}) + cyD_yA(\bar{\varphi}) + [c-1]zD_zA(\varphi) - [c-1]A(\bar{\varphi})\,,$$

ossia, ricordando le b) e c) e sviluppando $A(x\varphi')$,

$$A'D_x(\bar{\varphi}) = c^2y\bar{\varphi}'' + (c-1)z\bar{\varphi}' + (2-c)A(\bar{\varphi})\,,$$

dove A' è, al solito, la derivata funzionale di A.

Identificando i coefficienti delle varie derivate di φ si trova

$$[c+i-2]a_i = 0 \qquad\qquad (i = 3, 4, 5, \dots, n)\,,$$

cosicchè concludiamo che in generale i coefficienti a_i sono tutti nulli. Solo se c fosse uguale ad un intero negativo $-s$, potrebbe essere diverso da zero a_{s+2}. Ma basta alternare le

$$x^2p + \dots, \bar{\varphi}(x)p + \dots$$

per concludere che anche in codesto caso è necessariamente $a_{s+2} = 0$.

Si verifica oramai agevolmente che le condizioni gruppali sono tutte soddisfatte; cosicchè otteniamo il gruppo

$$[26]_1 \qquad \varphi(x)q + \varphi'r\,,\ \bar{\varphi}(x)p + cy\bar{\varphi}'q + [(c-1)z\bar{\varphi}' + cy\bar{\varphi}'']r$$

185. — Assumiamo in secondo luogo come sottogruppo il gruppo $[21]_2$ del n. 176:

$$p\,,2xp+(s-1)yq-(s+1)zr\,,x^2p+(s-1)xyq-(s+1)xzr\,,\varphi(x)q+\frac{1}{s!}\varphi^{(s)}r\,,$$

nel quale possiamo supporre $s>1$, giacchè per $s=1$, si ottiene un caso particolare del gruppo $[21]_1$, considerato nel n. prec. Avremo allora

$$c=\frac{1}{2}[s-1]\,,\alpha_0=0\,,\alpha_1=-\frac{1}{2}[s+1]z\,,\alpha_2=0$$

e la presenza della p implicherà ancora che i coefficienti di A siano tutti indipendenti da x.

Di più in base alle

$$\left(q\,,\bar\varphi(x)p+\frac{1}{2}[s-1]y\bar\varphi'q+A(\bar\varphi)r\right)=\frac{1}{2}[s-1]\bar\varphi'q+D_yA(\bar\varphi)r$$

$$\left(xq\,,\bar\varphi p+\frac{1}{2}[s-1]y\bar\varphi'q+A(\bar\varphi)r\right)=\left[\frac{1}{2}(s-1)x\bar\varphi'-\bar\varphi\right]q+xD_yA(\bar\varphi)r$$

avremo per la A le due equazioni funzionali

$$a)\qquad D_yA(\bar\varphi)=\frac{1}{s!}\frac{s-1}{2}\bar\varphi^{(s+1)}$$

$$b)\qquad xD_yA(\bar\varphi)=\frac{1}{s!}\frac{d^s}{dx^s}\left[\frac{1}{2}(s-1)x\bar\varphi'-\bar\varphi\right].$$

Eliminando fra queste due equazioni la $D_yA(\bar\varphi)$ si ottiene la equazione numerica

$$\frac{1}{2}[s-1]s-1=0\,,$$

la quale implica $s=2$ e quindi $2c=1$.

Allora la a) ci dice che i coefficienti α_m sono tutti indipendenti da y, tranne α_3 il quale è della forma

$$\alpha_3=\frac{3}{2}y+\bar\alpha_3(z)\,,$$

dove $\bar\alpha_3$ è una funzione determinata, indipendente da x e y.

Dopo ciò basta combinare le

$$\varphi q + \frac{1}{2}\varphi'' r \,,\, \varphi p + \dots$$

per concludere

$$\bar{\alpha}_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_n = 0$$

e quindi

$$A(\bar{\varphi}) = -\frac{3}{2} z\varphi' + \frac{1}{4} y\varphi'''.$$

Poichè la proprietà gruppale è verificata, abbiamo il tipo:

[26]$_2$

$$\left| \varphi(x)q + \frac{1}{2}\varphi'' r \,,\, \bar{\varphi}(x)p + \frac{1}{2} y\bar{\varphi}' q + \frac{1}{4}[y\bar{\varphi}''' - 6z\varphi'] r \right|$$

Analogamente i gruppi [21]$_3$, [21]$_4$ danno rispettivamente i due gruppi

[26]$_3$

$$\left| \begin{matrix} \varphi(x)q + \varepsilon\varphi' r \,,\, \bar{\varphi}(x)p + y\bar{\varphi}' q + [a\bar{\varphi}' + \varepsilon y \bar{\varphi}''] r \\ \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0 \end{matrix} \right|$$

[26]$_4$

$$\left| \begin{matrix} \varphi(x)q \,,\, \bar{\varphi}(x)p + cy\bar{\varphi}' q + [z\bar{\varphi}' + \varepsilon c z^3 \bar{\varphi}'''] r \\ \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0 \end{matrix} \right|$$

186. — Passando ai *gruppi di seconda specie*, ci converrà determinarli direttamente anzichè prendere in esame i numerosi gruppi [21, II] (n. 178), parecchi dei quali andrebbero poi rifiutati, in quanto qui non hanno alcun corrispondente.

Dobbiamo determinare tutti i gruppi della forma

$$\varphi(x)q + [zA(\varphi) + \zeta] r \,,\, \bar{\varphi}(x)p + c\bar{\varphi}' yq + [zB(\bar{\varphi}) + \zeta_1] r \,,\, \theta(x, y) r$$

dove θ è funzione arbitraria o definita da un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali; e le A, B sono forme differenziali lineari, a coefficienti indipendenti dalla z mentre le ζ, ζ_1 sono funzioni dipendenti rispettivamente da $\varphi, \bar{\varphi}$ e determinate da esse a meno di una determinazione generica della θ.

Le A, B si possono determinare, indipendentemente da ogni ipotesi circa la θ.

Anzitutto, per mezzo di una trasformazione della forma

$$x' = x\,,\, y' = y\,,\, z' = z\lambda(x\,,y) + \mu(x\,,y)$$

possiamo ridurre simultaneamente

$$B(1) = 0\ ,\ A(1) = 0\,,$$

talchè avremo nel gruppo due trasf. inf. della forma

$$q + \dots\,,\ p + \dots\,,$$

dove i termini non scritti sono indipendenti da z.

Ciò premesso, alternando le trasf. inf. del nostro gruppo con la $p + \dots$ si trova che le forme A e B sono commutabili con la D_x e quindi hanno coefficienti indipendenti, oltre che da z anche dalla x.

Inoltre in base alle alternate

$$(q + \dots\,, \varphi(x)q + [zA(\varphi) + \zeta]r) = \left[zD_yA(\varphi) + \frac{\partial\zeta}{\partial y} + \dots\right]r$$

$$(q + \dots\,, \bar{\varphi}(x)p + c\bar{\varphi}'yq + [zB(\varphi) + \zeta_1]r) = c\bar{\varphi}'q + \left[zD_yB(\bar{\varphi}) + \frac{\partial\zeta_1}{\partial y} + \dots\right]r$$

sussisteranno le equazioni funzionali

$$a)\qquad D_yA(\varphi) = 0$$

$$b)\qquad D_yB(\varphi) = cA(\varphi')\,;$$

la prima delle quali ci dice che i coefficienti di A sono indipendenti, oltre che da x e z, anche da y e perciò sono costanti. Sia precisamente

$$A(\varphi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!}\,a_m\varphi^{(m)}\,.$$

Tenendo conto della b) e della alternata

$$(\varphi(x)q + [zA(\varphi) + \zeta]r\,, \bar{\varphi}(x)p + c\bar{\varphi}'yq + [zB(\bar{\varphi}) + \zeta_1]r) =$$

$$= [c\varphi\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}\varphi']q + \{z[\varphi D_yB(\bar{\varphi}) - \bar{\varphi}D_xA(\varphi)] + \dots\}\,r$$

otteniamo l'equazione funzionale

$$c\varphi A(\bar{\varphi}') - \bar{\varphi}A(\varphi') = A[c\varphi\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}\varphi']\,,$$

la quale ove si sviluppi il secondo membro e si identifichino i coefficienti, ci dice che sono possibili soltanto due casi: o $A=0$ oppure $c=1$, $A(\varphi)=a\varphi'$.

Nel primo caso la B, in quanto deve soddisfare alla b), sarà a coefficienti costanti e allora, combinando le due trasf. inf.

$$\bar{\varphi}_1(x)p+\dots \quad , \quad \bar{\varphi}_2(x)p+\dots$$

concludiamo che deve essere

$$B(\bar{\varphi}_1\bar{\varphi}'_2-\bar{\varphi}'_1\bar{\varphi}_2)=\bar{\varphi}_1 B(\bar{\varphi}'_2)-\bar{\varphi}_2 B(\bar{\varphi}'_1),$$

onde risulta (n. 113)

$$B(\varphi)=b\varphi';$$

e quando la θ sia arbitraria, otteniamo il gruppo:

$$[26, I]_1 \qquad \boxed{\varphi(x)q\,,\,\bar{\varphi}(x)p+cy\bar{\varphi}'q+bz\bar{\varphi}'r\,,\,\psi(x,y)r}$$

Quando poi sia $c=1$, $A(\varphi)=a\varphi'$, risulta dalla b)

$$B=ay\varphi''+\bar{B}(\varphi)$$

dove $\bar{B}$ è una forma differenziale lineare a coefficienti costanti; e per questa forma $\bar{B}$ si ritrova la stessa equazione funzionale trovata pocanzi per la B, talchè concludiamo

$$B(\varphi)=ay\varphi''+b\varphi',$$

e, se θ è arbitraria, troviamo il gruppo

$$[26, I]_2 \qquad \boxed{\varphi(x)q+az\varphi'r\,,\,\bar{\varphi}(x)p+y\bar{\varphi}'q+z[b\bar{\varphi}'+ay\bar{\varphi}'']r\,,\,\psi(x,y)r}$$

187. — Dobbiamo occuparci in secondo luogo dei gruppi di seconda specie, in cui la θ sia definita da un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali. Esaminando dapprima il caso in cui sia $A=0$, avremo un gruppo della forma

$$(47) \qquad \varphi(x)q+\zeta r\,,\,\bar{\varphi}(x)p+cy\bar{\varphi}'q+[az\bar{\varphi}'+\zeta_1]r\,,\,\theta(x,y)r\,.$$

Tenuto conto della presenza della $\varphi(x)q + \zeta r$ (dove ricordiamo che ζ è indipendente da z) avremo, in base al n. 131, che le determinazioni delle θ sono della forma

$$\varphi_l(x)y^l\,,\ \rho_i(x)y^n\,,\ \varphi_{s.t}(x)y^s e^{c_t y}$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\ ;\ i=1,2,\dots,h\ ;\ t=1,2,\dots,k\ ;\ s=0,1,\dots,n_t)$$

dove le $\varphi_l\,, \varphi_{s.t}$ sono funzioni arbitrarie e le ρ_i funzioni determinate.

Se nella

$$\bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + \dots$$

la costante c è diversa da zero, dovranno necessariamente mancare le $\varphi_{s.t}(x)y^s e^{c_t y}$; e, in ogni caso, dalla

$$(\bar\varphi p + cy\bar\varphi' q + [az\bar\varphi' + \zeta_1]r\,,\, \rho_i y^n r) = [\bar\varphi \rho'_i + (cn - a)\bar\varphi' \rho_i] y^n r$$

concludiamo che mancheranno le ρ_i, salvo il caso in cui sia

$$\rho'_i = 0\,,\ a = cn\,.$$

Escludendo per ora questo caso particolare ed esaminando il caso generale, possiamo, con una trasformazione lineare della z (a coefficienti dipendenti da x e y) far sì che nel gruppo compaia la q; e allora dalla

$$(q\,, \varphi q + \zeta r) = \frac{\partial \zeta}{\partial y} r$$

ricaviamo

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \varphi_0(x)\,, \dots\,, \varphi_{n-1}(x)y^{n-1}]$$

ossia

$$\zeta \equiv y^n A_1(\varphi)$$

dove A_1 è una forma differenziale a coefficienti indipendenti da y e z, e priva del termine di ordine zero.

Analogamente la

$$(q\,, \bar\varphi p + c\bar\varphi' yq + [az\bar\varphi' + \zeta_1]r) = c\bar\varphi' q + \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} r$$

dà

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} \equiv cy^n A_1(\bar\varphi')$$

e quindi

$$\zeta_1 \equiv \frac{c}{n+1} y^{n+1} A_1(\bar\varphi') + y^n B_1(\bar\varphi)$$

dove B_1 è una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y e z.

Ciò premesso, l'alternata

$$\left(\varphi q + y^n A_1(\varphi) r, \bar\varphi p + cy\bar\varphi' q + \left[az\bar\varphi' + \frac{c}{n+1} y^{n+1} A_1(\bar\varphi') + y^n B_1(\bar\varphi) \right] r \right) \equiv$$

$$\equiv [c\bar\varphi'\varphi - \bar\varphi\varphi'] q + y^n \left\{ (a - cn)\bar\varphi' A_1(\bar\varphi) + c\varphi A_1(\bar\varphi') - \bar\varphi D_x A_1(\varphi) \right\} r$$

dà l'equazione funzionale

$$[a - cn]\bar\varphi' A_1(\varphi) + c\varphi A_1(\bar\varphi') - \bar\varphi D_x A_1(\varphi) = c A_1(\varphi\bar\varphi') - A_1(\bar\varphi\varphi'), \tag{47}$$

da cui, identificando i coefficienti di $\bar\varphi$ nei due membri risulta

$$D_x A_1(\varphi) = A_1 D_x(\varphi);$$

cioè la forma A_1 è a coefficienti indipendenti anche da x e quindi costanti.

Posto

$$A_1(\varphi) = \sum_{m=1}^{h} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)},$$

la (47) implica, come risulta identificando i coefficienti di $\bar\varphi'$,

$$[c(n+1) - a - m] A_1(\varphi) = A'_1(\varphi')$$

e quindi

$$[c(n+1) - a - m] a_m = 0 \qquad (m = 0, 1, \dots, h).$$

talchè uno al più dei coefficienti a_m potrà essere diverso da zero; e se è $a_s \gtrless 0$, dovremo avere

$$a = c(n+1) - s. \tag{48}$$

Supponiamo in primo luogo che tutti gli a_m siano nulli: avremo allora

$$A_1 = 0, \quad \zeta_1 = y^n B_1(\bar\varphi);$$

e basta porre

$$z' = z - \int_0^x B_1(1) dx$$

per ridurre $B_1(1) = 0$ e avere nel gruppo la p. Dopo di che la B_1 sarà a coefficienti costanti e l'alternata

$$(\bar\varphi p + cy\bar\varphi' q + [az\bar\varphi' + y^n B_1(\bar\varphi)]r \,,\, \bar\varphi_1 p + cy\bar\varphi'_1 q + [az\bar\varphi'_1 + y^n B_1(\bar\varphi_1)]r) =$$

$$= [\bar\varphi\bar\varphi'_1 - \bar\varphi'\bar\varphi_1]p + cy[\bar\varphi\varphi'_1 - \bar\varphi_1\bar\varphi']'q +$$

$$+ \{ az[\bar\varphi\bar\varphi'_1 - \bar\varphi'\bar\varphi_1]' + y^n[\bar\varphi B_1(\bar\varphi') - \bar\varphi_1 B_1(\bar\varphi') + (cn - a)(\bar\varphi' B_1(\bar\varphi_1) - \bar\varphi'_1 B_1(\bar\varphi))]r$$

darà l'equazione funzionale

$$B_1(\bar\varphi\bar\varphi'_1 - \bar\varphi_1\bar\varphi') = \bar\varphi B_1(\bar\varphi'_1) - \bar\varphi_1 B_1(\bar\varphi') + (cn - a)[\bar\varphi' B_1(\bar\varphi_1) - \bar\varphi'_1 B_1(\bar\varphi)], \tag{49}$$

la quale, come risulta identificando i coefficienti dei vari termini, non può se $cn - a \gtrless 0, 1, 2$, esser soddisfatta che da $B_1 = b_1\varphi'$; mentre poi per $cn - a = 0$ è soddisfatta da

$$B_1(\varphi) = b_0\varphi + b_1\varphi';$$

per $cn - a = 1$ da

$$B_1(\varphi) = b_1\varphi' + \frac{1}{2} b_2\varphi'';$$

e per $cn - a = 2$ da

$$B_1(\varphi) = b_1\varphi' + \frac{1}{3!} b_3\varphi'''.$$

Otteniamo così (escluso il caso in cui è $cn - a = 0$) tre gruppi, due dei quali danno per $c = 0$ un tipo che non si incontrerà nel seguito:

[26, II]$_1$

$$\varphi(x)q \,,\, \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + az\varphi' r \,,\, \varphi_l(x)y^l r \qquad (l = 0, 1, \dots, n-1)$$

[26, II]$_2$

$$\varphi(x)q \,,\, \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + \left[(cn-1)z\bar\varphi' + \left(b_1\bar\varphi' + \frac{1}{2} b_2\bar\varphi''\right)y^n\right]r \,,\, \varphi_l(x)y^l r \qquad (l = 0, 1, \dots, n-1)$$

[26, II]$_3$

$$\varphi(x)q \,,\, \bar\varphi(x)p + \left[y^n\left(b_1\bar\varphi' + \frac{1}{2} b_2\bar\varphi''\right) - z\bar\varphi'\right]r \,,\, \varphi_l(x)y^l r \,,\, \varphi_{st}(x)y^s e^{c_t y} r$$
$$(l = 0, 1, \dots, n-1 \;;\; t = 1, 2, \dots, k \;;\; s = 0, 1, \dots, n_t)$$

$$[26, II]_4 \quad \varphi(x)q \,,\; \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + \Big[(cn-2)z\bar\varphi' + y^n\Big(b_1\bar\varphi' + \frac{1}{3!}b_3\bar\varphi'''\Big)\Big] r \,,\; \varphi_l(x)y^l r \qquad (l = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$[26, II]_5 \quad \varphi(x)q \,,\; \bar\varphi(x)p + \Big[y^n\Big(b_1\bar\varphi' + \frac{1}{3!}b_3\bar\varphi'''\Big) - 2z\bar\varphi' \Big] r \,,\; \varphi_l(x)y^l r \,,\; \varphi_{st}(x)y^s e^{c_t y} r \qquad (l = 0, 1, \dots, n-1 \,;\; t = 1, 2, \dots, k \,;\; s = 0, 1, \dots, n_t)$$

188. — Riprendiamo la nostra discussione per esaminare il caso in cui sia

$$a_s \gtrless 0 \;,\; a = c(n+1) - s$$

e quindi

$$A_1(\varphi) = \frac{1}{s!} a_s \varphi^{(s)} \,,\; \zeta_1 = \frac{c}{n+1}\frac{a_s}{s!} y^{n+1}\bar\varphi^{(s+1)} + y^n B_1(\bar\varphi) \,.$$

Anche qui, poichè abbiamo $s > 0$, possiamo fare in modo che il gruppo contenga la p e allora, nella solita maniera, si conclude che la forma B_1 deve essere a coefficienti indipendenti anche da x e quindi costanti.

Resta allora da tener conto della alternata

$$(50) \quad \begin{cases} \Big(\bar\varphi q + cy\bar\varphi' q + \Big\{ [c(n+1) - s] z\bar\varphi' + \frac{1}{s!}\frac{ca_s}{n+1} y^{n+1}\bar\varphi^{(s+1)} + y^n B_1(\bar\varphi) \Big\} r \,, \\ \bar\varphi_1 p + cy\bar\varphi'_1 q + \dots \Big) = (\bar\varphi\bar\varphi'_1 - \bar\varphi'\bar\varphi_1) p + cy(\bar\varphi\bar\varphi'_1 - \bar\varphi'\bar\varphi_1)' q + \\ + \Big\{ z[c(n+1) - s] \, |\bar\varphi\bar\varphi'_1 - \bar\varphi'\bar\varphi_1|' + \\ + \frac{1}{s!}\frac{ca_s}{n+1} y^{n+1} |\bar\varphi\bar\varphi_1^{(s+2)} - \bar\varphi_1\bar\varphi^{(s+2)} + s(\bar\varphi'\bar\varphi_1^{(s+1)} - \bar\varphi'_1\bar\varphi^{(s+1)})| + \\ + y^n \Big[\bar\varphi B_1(\bar\varphi'_1) - \bar\varphi_1 B_1(\bar\varphi') + (s - c)\Big(\bar\varphi' B_1(\bar\varphi_1) - \bar\varphi'_1 B_1(\bar\varphi) \Big) \Big] \Big\} r \,. \end{cases}$$

Considerando anzitutto nel secondo membro il coefficiente di y^{n+1} troviamo che deve essere

$$\bar\varphi\bar\varphi_1^{(s+2)} - \bar\varphi_1\bar\varphi^{(s+2)} + s\,|\bar\varphi'\bar\varphi_1^{(s+1)} - \varphi'_1\bar\varphi^{(s+1)}| = \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} [\bar\varphi\bar\varphi'_1 - \bar\varphi'\bar\varphi_1] \,,$$

il che richiede (poichè è escluso il caso $s = 0$) o $s = 1$ o $s = 2$. Supposto $s = 1$, consideriamo nel secondo membro della (50) il coefficiente di y^n. Dovrà essere

$$\bar\varphi B_1(\bar\varphi'_1) - \bar\varphi_1 B_1(\bar\varphi') + (1 - c)\,|\bar\varphi' B_1(\bar\varphi_1) - \bar\varphi'_1 B_1(\bar\varphi)| = B_1(\bar\varphi\bar\varphi'_1 - \bar\varphi'\bar\varphi_1)$$

e poichè questa equazione funzionale è della stessa forma della (49) del n. prec., salvo che al posto di $cn - a$ compare $1 - c$ concludiamo (in quanto abbiamo già ridotto $B_1(1) = 0$) che sarà o

$$B_1(\varphi) = b_1\varphi',$$

o

$$c = 0 \quad , \qquad B(\varphi) = b_1\varphi' + \frac{1}{2} b_2\varphi'',$$

o

$$c = -1 \quad , \qquad B_1(\varphi) = b_1\varphi' + \frac{1}{3!} b_3\varphi'''.$$

Quando è $c \gtrless 1$, basta porre

$$z' = z + \frac{b_1}{c-1} y^n$$

per ridurre $b_1 = 0$; cosicchè si ottengono i gruppi seguenti:

[26, II]$_6$

$$\begin{gathered} \varphi(x)q + a_1 y^n \varphi' r \,,\, \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + \\ + \left\{ [c(n+1) - 1] z\bar\varphi' + \frac{c}{n+1} a\, y^{n+1}\bar\varphi'' \right\} r \,,\, \varphi_l(x) y^l r \\ (l = 0, 1, \dots, n-1) \end{gathered}$$

[26, II]$_7$

$$\begin{gathered} \varphi(x)q + a_1 y^n \varphi' r \,,\, \bar\varphi(x)p + y\bar\varphi' q + \\ + \left\{ nz\bar\varphi' + \frac{1}{2} a_1 y^{n+1}\bar\varphi'' + b_1 y^n \bar\varphi' \right\} r \,,\, \varphi_l(x) y^l r \\ (l = 0, 1, \dots, n-1) \end{gathered}$$

[26, II]$_8$

$$\begin{gathered} \varphi(x)q + a_1 y^n \varphi' r \,,\, \bar\varphi(x)p - z\bar\varphi' r \,,\, \varphi_l(x) y^l r \,,\, \varphi_{st}(x) y^s e^{c_t y} r \\ (l = 0, 1, \dots, n-1 \;;\; t = 1, 2, \dots, k \;;\; s = 0, 1, \dots, n_t) \end{gathered}$$

[26, II]$_9$

$$\begin{gathered} \varphi(x)q + a_1 y^n \varphi' r \,,\, \bar\varphi(x)p + \\ + \left\{ \frac{1}{2} b y^n \bar\varphi'' - z\bar\varphi' \right\} r \,,\, \varphi_l(x) y^l r \,,\, \varphi_{st}(x) y^s e^{c_t y} r \\ (l = 0, 1, \dots, n-1 \;;\; t = 1, 2, \dots, k \;;\; s = 0, 1, \dots, n_t) \end{gathered}$$

[26, II]$_{10}$

$$\begin{gathered} \varphi(x)q + a_1 y^n \varphi' r \,,\, \bar\varphi(x)p - y\bar\varphi' q - \left\{ (n+2) z\bar\varphi' + \frac{a_1}{n+1} y^{n+1}\bar\varphi'' - \frac{a_3}{3!} y^n \bar\varphi''' \right\} r \,, \\ \varphi_l(x) y^l r \\ (l = 0, 1, \dots, n-1) \end{gathered}$$

Se infine poniamo nella (50) $s=2$ troviamo per la B_1 l'equazione

$$B_1(\bar\varphi\bar\varphi'_1-\bar\varphi'\bar\varphi_1)=\bar\varphi B_1(\bar\varphi'_1)-\bar\varphi_1 B_1(\bar\varphi')+(2-c)\{\bar\varphi' B_1(\bar\varphi_1)-\bar\varphi'_1 B_1(\bar\varphi)\},$$

la quale è ancora del tipo (49), talchè abbiamo i seguenti tre casi:

$$B_1(\varphi)=b_1\varphi'$$

$$c=1\ ,\quad a=n-1\ ,\quad B_1(\varphi)=b_1\varphi'+\frac{1}{2}b_2\varphi''$$

$$c=0\ ,\quad a=-2\ ,\quad B_1(\varphi)=b_1\varphi'+\frac{1}{3!}b_3\varphi'''.$$

In ogni caso se è $c\gtrless 2$, si riduce $b_1=0$ ponendo

$$z'=z+\frac{b_1}{c-2}y^n.$$

Abbiamo così i gruppi seguenti:

$[26, \text{II}]_{11}$

$$\varphi(x)q+\frac{1}{2}ay^n\varphi''r\,,\ \bar\varphi(x)p+cy\bar\varphi'q+$$
$$+\left\{[c(n+1)-2]z\bar\varphi'+\frac{1}{2}\frac{ac}{n+1}y^{n+1}\varphi'''\right\}r\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1)$$

$[26, \text{II}]_{12}$

$$\varphi(x)q+\frac{1}{2}ay^n\varphi''r\,,\ \bar\varphi(x)p+2y\bar\varphi'q+$$
$$+\left\{2nz\bar\varphi'+\frac{a}{n+1}y^{n+1}\bar\varphi'''+b_1y^n\bar\varphi'\right\}r\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1)$$

$[26, \text{II}]_{13}$

$$\varphi(x)q+\frac{1}{2}ay^n\varphi''r\,,\ \bar\varphi(x)p-2z\bar\varphi'r\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ \varphi_{s,t}(x)y^s e^{\sigma_t y}r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1\ ;\ t=1,2,\dots,k\ ;\ s=0,1,\dots,n_t)$$

$[26, \text{II}]_{14}$

$$\varphi(x)q+\frac{1}{2}ay^n\varphi''r\,,\ \bar\varphi(x)p+y\bar\varphi'q+$$
$$+\left\{(n-1)z\bar\varphi'+\frac{a}{2(n+1)}y^{n+1}\varphi'''+\frac{1}{2}by^n\varphi''\right\}r\,,\ \varphi_l(x)y^l r$$
$$(l=0,1,\dots,n-1)$$

[26, II]$_{15}$

$$\begin{gathered}\varphi(x)q + \frac{1}{2}\, a y^n \varphi'' r \,,\, \bar\varphi(x)p + \\ + \left\{ \frac{a}{3!} y^n \bar\varphi''' - 2z\bar\varphi' \right\} r \,,\, \varphi_l(x) y^l r \,,\, \varphi_{st}(x) y^s e^{c_t y} r \\ (l=0,1,\dots,n-1\,;\ t=1,2,\dots,k\,;\ s=0,1,\dots,n_t)\end{gathered}$$

189. — Dianzi abbiamo escluso il caso in cui è $a = cn$ e si ha nel gruppo la $y^n r$.

Ora è facile constatare, ripetendo la discussione dei nn. 187, 188, che la presenza di codesta trasf. inf. non modifica le forme A, B, A_1, B_1, da noi incontrate. Basta quindi porre $a = cn$ in quei gruppi da noi determinati, in cui ciò è possibile, e aggiungere la $y^n r$. Otteniamo così in corrispondenza dei gruppi **[26, II]$_1$**, **[26, II]$_7$** due nuovi tipi, mentre gli altri non danno alcun gruppo nuovo:

[26, II]$'_1$

$$\begin{gathered}\varphi(x)q \,,\, \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + cnz\varphi' r \,,\, \varphi_l(x) y^l r \,,\, y^n r \\ (l=0,1,\dots,n-1)\end{gathered}$$

[26, II]$''_1$

$$\begin{gathered}\varphi(x)q \,,\, \bar\varphi(x)p \,,\, \varphi_l(x) y^l r \,,\, y^n r \,,\, \varphi_{s.t}(x) y^s e^{c_t y} r \\ (l=0,1,\dots,n-1\,;\ t=1,2,\dots,k\,;\ s=0,1,\dots,n_t)\end{gathered}$$

[26, II]$'_7$

$$\begin{gathered}\varphi(x)q + a y^n \varphi' r \,,\, \bar\varphi(x)p + y\bar\varphi' q + \\ + \left\{ nz\bar\varphi' + \frac{1}{2}\, a y^{n+1} \bar\varphi'' + b y^n \bar\varphi' \right\} r \,,\, \varphi_l(x) y^l r \,,\, y^n r \\ (l=0,1,\dots,n-1)\end{gathered}$$

190. — Continuando la determinazione dei gruppi di seconda specie, consideriamo il caso, in cui la forma A non sia identicamente nulla, cioè consideriamo i gruppi della forma

$$\varphi(x)q + |az\varphi' + \zeta|r \,,\, \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + [(b\bar\varphi' + ay\bar\varphi'')z + \zeta_1|r \,,\, \theta(x, y)r \,.$$

Tenendo conto del risultato del n. 131 e della presenza della

$$\bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + \dots,$$

abbiamo che le determinazioni di θ saranno della forma

$$\varphi_l(x) y^l \qquad (l = 0, 1, \dots, n-1).$$

Anche qui possiamo senz' altro supporre che il gruppo contenga la q, cosicchè otteniamo

$$\zeta \equiv y^n A_1(\varphi)$$

dove A_1 è una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y e da z, e mancante del termine d'ordine zero. Ma dall' alternata

$$(\varphi q + \{ az\varphi' + y^n A_1(\varphi) \} r \,.\, \varphi_1 q + [az\varphi'_1 + y^n A_1(\varphi_1)] r) \equiv ay^n [\varphi'_1 A_1(\varphi) - \varphi' A_1(\varphi_1)] r$$

deduciamo, poichè è $a \gtrless 0$,

$$\varphi'_1 A_1(\varphi) - \varphi' A_1(\varphi_1) = 0$$

e quindi

$$A_1(\varphi) = \alpha(x)\varphi' ;$$

e basta assumere come nuova z la

$$z + \frac{\alpha}{a} y^n$$

per ridurre $\alpha = 0$, $A_1 = 0$.

Ciò premesso, combinando la q con la $\bar{\varphi} p + \dots$, troviamo

$$\zeta_1 \equiv y^n B_1(\bar{\varphi}) ,$$

dove al solito B_1 è una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y e z. L'alternata

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Big(\bar{\varphi}(x) p + y\bar{\varphi}' q + \{ z (b\bar{\varphi}' + ay\bar{\varphi}'') + y^n B_1(\bar{\varphi}) \} r \,,\, \bar{\varphi}_1 p + y\bar{\varphi}'_1 q + \\ & + \{ z (b\bar{\varphi}'_1 + ay\bar{\varphi}''_1) + y^n B_1(\bar{\varphi}_1) \} r \Big) = [\bar{\varphi}\bar{\varphi}'_1 - \bar{\varphi}'\bar{\varphi}_1] p + y [\bar{\varphi}\bar{\varphi}'_1 - \bar{\varphi}'\bar{\varphi}_1]' q + \\ & + \{ z (b [\bar{\varphi}\bar{\varphi}'_1 - \bar{\varphi}'\bar{\varphi}_1]' + ay [\bar{\varphi}\bar{\varphi}'_1 - \bar{\varphi}'\bar{\varphi}_1]'') + \\ & + y^n [\bar{\varphi} D_x B_1(\bar{\varphi}_1) - \bar{\varphi} D_x B_1(\bar{\varphi}) + (n - b) (\bar{\varphi}' B_1(\bar{\varphi}_1) - \bar{\varphi}'_1 B_1(\bar{\varphi}))] + \\ & + ay^{n+1} [B_1(\bar{\varphi})\bar{\varphi}''_1 - B_1(\bar{\varphi}_1)\bar{\varphi}''] \} r \end{aligned} \right.$$

implica anzitutto, poichè è $a \gtrless 0$,

$$\bar{\varphi}''_1 B_1(\bar{\varphi}) - \bar{\varphi}'' B_1(\bar{\varphi}_1) = 0$$

ossia

$$B_1(\varphi) = \frac{1}{2} \alpha_2(x) \varphi''$$

e allora considerando nella (51) il coefficiente di y^n, troviamo l'identità funzionale

$$\alpha_2[\bar{\varphi}\bar{\varphi}_1''' - \bar{\varphi}_1\bar{\varphi}''' + (n-b)(\bar{\varphi}'\bar{\varphi}_1'' - \bar{\varphi}'_1\bar{\varphi}'')] + \alpha'_2[\bar{\varphi}\bar{\varphi}_1'' - \bar{\varphi}_1\bar{\varphi}''] = \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2}[\bar{\varphi}\bar{\varphi}'_1 - \bar{\varphi}'\bar{\varphi}_1]$$

la quale richiede che α_2 sia costante e che inoltre o questa costante sia nulla oppure che sia $b = n + 1$. Otteniamo così i due gruppi

$$[26, \mathrm{II}]_{16} \qquad \varphi(x)q + az\varphi' r, \bar{\varphi}(x)p + y\bar{\varphi}'q + z(b\bar{\varphi}'_1 + ay\bar{\varphi}_1'')r, \varphi_l(x)y^l r \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$$[26, \mathrm{II}]_{17} \qquad \begin{gathered} \varphi(x)q + az\varphi' r, \bar{\varphi}(x)p + y\bar{\varphi}'q + \\ + \left[z([n+1]\bar{\varphi}'_1 + ay\bar{\varphi}_1'') + \frac{1}{2} by^n\varphi'' \right] r, \varphi_l(x)y^l r \\ (l = 0, 1, \ldots, n-1) \end{gathered}$$

191. — Per compiere la determinazione dei gruppi di seconda specie ci rimangono da considerare i gruppi contenenti un sottogruppo intransitivo (finito) del tipo [III]. Avremo anche qui da discutere due casi, cioè le due specie di gruppi (n. 186):

$$a) \qquad \varphi(x)q + \zeta(x, y)r, \bar{\varphi}(x)p + cy\bar{\varphi}'q + [bz\bar{\varphi}' + \zeta_1]r, \rho_i(x, y)r, \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

$$b) \qquad \begin{gathered} \varphi(x)q + [az\varphi' + \zeta]r, \bar{\varphi}(x)p + \\ + ay\bar{\varphi}'q + (z[b\bar{\varphi}' + ay\bar{\varphi}''] + \zeta_1)r, \rho_i(x, y)r, \qquad (i = 1, 2, \ldots, h). \end{gathered}$$

In ogni caso, in quanto vi è nel gruppo la $\varphi(x)q + \ldots$, le ρ_i saranno indipendenti da y; e basta combinare la $\bar{\varphi}p + \ldots$ con le $\rho_i r$ per convincersi che le ρ_i non possono ammettere che la determinazione 1; cosicchè le funzioni ζ, ζ_1 risulteranno determinate dalle $\varphi, \bar{\varphi}$ rispettivamente, ***a meno di una eventuale costante additiva arbitraria.***

Ciò posto, il caso b) si esclude senz'altro; perchè la

$$(r, \varphi q + [az\varphi' + \zeta]r) = a\varphi' r$$

implica $a = 0$: talchè resta solo da esaminare il caso a).

Avremo nel gruppo due trasf. inf. della forma

$$p + \beta_0 r, q + \alpha_0 r$$

(in cui α_0, β_0 sono determinate a meno di una costante additiva) e dalla loro alternata risulta

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} = \text{cost.},$$

cosicchè, per mezzo di una trasformazione lineare in z, si possono ridurre alla forma

$$p, q + a_0 x r.$$

Allora in base alla

$$(q + a_0 x r, \varphi q + \zeta r) = \frac{\partial \zeta}{\partial y} r$$

si conclude

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \text{cost}.$$

e poichè la ζ dipende (per mezzo di equazioni differenziali) dalla funzione arbitraria φ, avremo senz'altro (cfr. n. 33)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

Tenuto conto del fatto che ζ deve risultare determinata dalla φ a meno di una costante additiva arbitraria sarà

$$\zeta = D_x^{-1} A(\varphi),$$

dove A è una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da y e z, e (per la presenza della p) anche da x. Sia

$$A = \sum_{m=0}^{h} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)},$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che deve essere $A(1) = a_0$. Avremo così la trasf. inf.

$$\varphi(x) q + D_x^{-1} A(\varphi) r,$$

ossia, sostituendo a φ la derivata φ' (il che è lecito per la presenza esplicita nel gruppo della r) la

$$\varphi' q + A(\varphi) r, \tag{52}$$

dove φ è il coefficiente di $a_0 r$ nella componente $A(\varphi)r$ della trasformazione infinitesimale.

Ciò premesso, risulta dalla

$$\left(q + a_0 x r \,,\, \bar{\varphi} p + c y \bar{\varphi}' q + [\, b z \bar{\varphi}' + \zeta_1] r \right) = c \bar{\varphi}' q + \left[\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + a_0 b x \bar{\varphi}' - a_0 \bar{\varphi} \right] r \,,$$

poichè la $\frac{\partial \zeta_1}{\partial y}$ (scomparsa la eventuale costante additiva arbitraria) deve essere univocamente determinata dalla φ,

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = c A(\bar{\varphi}') - a_0 b x \bar{\varphi}' + a_0 \varphi \,. \tag{53}$$

Così l'alternata

$$\left\{ \begin{aligned} &(\varphi' q + A(\varphi) r \,,\, \bar{\varphi} p + c y \bar{\varphi}' q + [\, b z \bar{\varphi}' + \zeta_1] r) = \\ &= [\, c \varphi' \bar{\varphi}' - \bar{\varphi} \varphi''] q + \left[\varphi' \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + b \bar{\varphi}' A(\varphi) - \bar{\varphi} A(\varphi') \right] r \end{aligned} \right. \tag{54}$$

è della forma (52); e allora, ricordando che il coefficiente di q deve essere la derivata del coefficiente di $a_0 r$ nel secondo membro e tenendo conto della (53) troviamo che deve essere identicamente *se* a_0 *è diverso da zero*,

$$c \varphi' \bar{\varphi}' - \bar{\varphi} \varphi'' = \frac{d}{dx} \left[c \varphi \bar{\varphi}' + b \varphi' (\varphi - x \varphi') \right]$$

ossia

$$(c + 1) \varphi'' \bar{\varphi} + b [\, \bar{\varphi}' \varphi - x (\varphi'' \varphi' + \bar{\varphi} \varphi'')] = 0$$

il che richiede $b = 0 \,,\, c = -1$.

Escludiamo pel momento questo caso che discuteremo più avanti (n. 192); e *supponiamo* $a = 0$. Allora la trasf. inf. (52), riscrivendo φ al posto di φ' e a_{i-1} al posto di a_i, diventerà

$$\varphi(x) q + A(\varphi) r \,,\, A(\varphi) = \sum_{m=0}^{h-1} \frac{1}{m!} a_m \varphi^{(m)} \,.$$

Ragionando allora come nel n. 187, e tenendo conto della (53) e della arbitrarietà della eventuale costante additiva, troviamo

$$\zeta_1 = c y A(\bar{\varphi}') + B(\bar{\varphi}) \,,\, B(\bar{\varphi}) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} b_m \bar{\varphi}^{(m)} \,;$$

e ci ritroviamo in condizioni analoghe a quelle del n. 187. La sola differenza sta nel fatto che mentre là era *a priori* $a_0 = b_0 = 0$, qui dobbiamo tener conto anche della possibilità che sia $a_0 \gtrless 0$, $b_0 \gtrless 0$. Non ripeteremo la discussione, che è sostanzialmente implicita in quella del n. 187; e daremo soltanto i resultati.

Se $b \gtrless c - s$ $(s = 0, 1, \ldots h-1)$ avremo $A = 0$ e allora per la B si presentano i seguenti quattro casi:

$$B(\bar\varphi) = a_1\bar\varphi' \;; \qquad b = \text{num. qualsiasi};$$

$$b = 0 \quad ; \; B(\bar\varphi) = b_0\bar\varphi + b_1\bar\varphi'$$

$$b = -1 \; ; \; B(\bar\varphi) = b_1\bar\varphi' + \frac{1}{2} b_2\varphi''$$

$$b = -2 \; ; \; B(\bar\varphi) = b_1\bar\varphi' + \frac{1}{3!} b_3\bar\varphi''' .$$

Otteniamo così i gruppi seguenti, in cui nei casi possibili (cioè il primo per $b \gtrless 0$, il terzo e quarto) si è ridotto $b_1 = 0$ nel solito modo.

[26, III]$_1$ $\quad \varphi(x)q\,,\, \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + bz\bar\varphi' r\,,\, r$

[26, III]$_2$ $\quad \varphi(x)q\,,\, \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + b_1\bar\varphi' r\,,\, r$

[26, III]$_3$ $\quad \varphi(x)q\,,\, \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + \left[\frac{1}{2!} b\bar\varphi'' - z\bar\varphi'\right] r\,,\, r$

[26, III]$_4$ $\quad \varphi(x)q\,,\, \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + \left[\frac{1}{3!} b\bar\varphi''' - 2z\bar\varphi'\right] r\,,\, r$

Se (cfr. n. 187) è $b = c - 1$ sono possibili i seguenti tre casi:

$$c = 1\,,\; b = 0 \quad , A_1(\varphi) = a_1\varphi'\,,\; B(\bar\varphi) = b_0\bar\varphi + b_1\bar\varphi'$$

$$c = 0\,,\; b = -1\,, \qquad » \qquad , B(\bar\varphi) = b_1\bar\varphi' + \frac{1}{2} b_2\bar\varphi''\,,$$

$$c = -1\,,\; b = -2\,, \qquad » \qquad , B(\bar\varphi) = b_1\bar\varphi' + \frac{1}{3!} b_3\bar\varphi''' .$$

Abbiamo così i gruppi:

[26, III]$_5$ $\bar\varphi(x)q + a\bar\varphi' r\,,\ \bar\varphi(x)p + y\bar\varphi' q + [ay\bar\varphi'' + a_1\bar\varphi']\,r\,,\ r$

[26, III]$_6$ $\varphi(x)q + a\varphi' r\,,\ \bar\varphi(x)p + \left[\frac{1}{2}b\bar\varphi'' - z\bar\varphi'\right]r\,,\ r$

[26, III]$_7$ $\varphi(x)q + a\varphi' r\,,\ \bar\varphi(x)p - y\bar\varphi' q + \left[\frac{1}{3!}b\bar\varphi''' - ay\bar\varphi'' - 2z\bar\varphi'\right]r\,,\ r$

Se infine è $b = c - 2$ si hanno i tre casi

$$c = 2\,,\ b = 0\quad,\ A(\varphi) = \frac{1}{2}a_2\varphi''\,,\ B(\bar\varphi) = b_0\bar\varphi + b_1\bar\varphi'$$

$$c = 1\,,\ b = -1\,,\quad \text{»}\quad,\ B(\bar\varphi) = b_1\bar\varphi' + \frac{1}{2}b_2\bar\varphi''$$

$$c = 0\,,\ b = -2\,,\quad \text{»}\quad,\ B(\bar\varphi) = b_1\bar\varphi' + \frac{1}{3!}b_3\bar\varphi'''.$$

Si ottengono così i gruppi

[26, III]$_8$ $\varphi(x)q + \frac{1}{2}a\varphi'' r\,,\ \bar\varphi(x)p + 2y\bar\varphi' q + [ay\bar\varphi''' + b\bar\varphi']\,r\,,\ r$

[26, III]$_9$ $\varphi(x)q + \frac{1}{2}a\varphi'' r\,,\ \bar\varphi(x)p + y\bar\varphi' q + \left[\frac{1}{2}ay\bar\varphi''' + \frac{1}{2}b\bar\varphi'' - z\bar\varphi'\right]r\,,\ r$

[26, III]$_{10}$ $\varphi(x)q + \frac{1}{2}a\varphi'' r\,,\ \bar\varphi(x)p + \left[\frac{1}{3!}b\bar\varphi''' - 2z\bar\varphi'\right]r\,,\ r$

192. — Al n. prec. abbiamo escluso il caso, in cui sia

$$a_0 \gtrless 0\,,\ b = 0\,,\ c = -1\,.$$

Sotto siffatte ipotesi le (53) (54) danno per la A l'equazione funzionale

$$A(\bar\varphi\varphi') = \varphi' A(\bar\varphi) + \bar\varphi A(\varphi') - a_0\varphi'\bar\varphi\,,$$

da cui risulta, per $\bar{\varphi} = x$,

$$A' D_x(\varphi) = \varphi' A(x) - a_0 x \varphi',$$

ossia

$$A' D_x(\varphi) = a_1 \varphi';$$

onde concludiamo

$$A(\varphi) = a_0 \varphi + a_1 \varphi'$$

e basta porre $z' = z - a_1 y$ per ridurre $a_1 = 0$ nella

$$\varphi' q + | a_0 \varphi + a_1 \varphi' | r$$

senza alterare le altre trasf. inf. del gruppo. Allora la (53) dà

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = 0,$$

e quindi

$$\zeta_1 = B(\bar{\varphi}) \quad , \quad B(\bar{\varphi}) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} b_m \bar{\varphi}^{(m)}.$$

Ma l'alternata

$$(\bar{\varphi} p - y \bar{\varphi}' q + B(\bar{\varphi}) r, \bar{\varphi}_1 p - y \bar{\varphi}'_1 q + B(\bar{\varphi}_1) r) =$$
$$= | \bar{\varphi} \bar{\varphi}'_1 - \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}' | p - y | \bar{\varphi} \bar{\varphi}'_1 - \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}' |' q + | \bar{\varphi} B(\bar{\varphi}'_1) - \bar{\varphi}_1 B(\bar{\varphi}') | r$$

implica

$$B(\bar{\varphi} \bar{\varphi}'_1 - \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}') = \bar{\varphi} B(\bar{\varphi}'_1) - \bar{\varphi}_1 B(\bar{\varphi}'); \tag{55}$$

cosicchè si avrà

$$B(\bar{\varphi}) = a_0 \bar{\varphi} + a_1 \bar{\varphi}'.$$

Posto $z' = z - a_0 x$ si riduce $a_0 = 0$ e si ottiene il gruppo

$$[\mathbf{26}, \mathrm{III}]_{11} \qquad \boxed{\varphi'(x) q + a \varphi r, \bar{\varphi}(x) p - y \bar{\varphi}' q + b \bar{\varphi}' r, r}$$

193. — Passando da ultimo ai *gruppi di terza specie*, avremo che il gruppo generatore è dato per c qualsiasi dal gruppo $[\mathbf{26}, \mathrm{III}]_2$

$$a) \qquad \varphi(x) q, \bar{\varphi}(x) p + c y \bar{\varphi}' q + b \bar{\varphi}' r, r$$

e, per valori particolari di c, anche dai gruppi $[\mathbf{26}, \mathrm{III}]_5$, $[\mathbf{26}, \mathrm{III}]_8$, $[\mathbf{26}, \mathrm{III}]_{11}$, cioè:

b) $$\varphi(x)q + a\varphi' r\,,\ \bar\varphi(x)p + y\bar\varphi' q + [ay\bar\varphi'' + b\bar\varphi']r\,,\ r\,;$$

c) $$\varphi(x)q + \frac{1}{2}a\varphi'' r\,,\ \bar\varphi(x)p + 2y\bar\varphi' q + [ay\bar\varphi''' + b\bar\varphi']r\,,\ r\,;$$

d) $$\varphi'(x)q + a\varphi r\,,\ \bar\varphi(x)p - y\bar\varphi' q + b\bar\varphi' r\,,\ r\,.$$

Tenendo conto di questi quattro tipi del gruppo generatore e della possibilità che nel tipo *a*) si annulli il parametro c, troviamo i tipi seguenti:

$[\mathbf{26}, \mathrm{IV}]$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q\,,\ \psi_0(x, y)r\,,\ \psi_1(x, y)zr$$

$[\mathbf{26}, \mathrm{V}]_1$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q\,,\ \psi(x, y)r\,,\ \varphi_l(x)y^l zr \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$[\mathbf{26}, \mathrm{V}]_2$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p\,,\ \psi(x, y)r\,,\ \varphi_l(x)y^l zr\,,\ \varphi_{s,t}(x)y^s e^{c_t y} zr \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1\,;\ t = 1, 2, \ldots, k\,;\ s = 0, 1, \ldots, n_t)$$

$[\mathbf{26}, \mathrm{V}]_3$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + y\bar\varphi' q + byz\bar\varphi'' r\,,\ \psi(x, y)r\,,\ \varphi_0(x)zr$$

$[\mathbf{26}, \mathrm{V}]_4$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + 2y\bar\varphi' q + byz\bar\varphi''' r\,,\ \psi(x, y)r\,,\ \varphi(x)zr$$

$[\mathbf{26}, \mathrm{VI}]_1$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + bz\bar\varphi' r\,,\ \psi(x, y)r\,,\ zr$$

$[\mathbf{26}, \mathrm{VI}]_2$ $$\varphi(x)q + az\varphi' r\,,\ \bar\varphi(x)p + y\bar\varphi' q + z[ay\bar\varphi'' + b\bar\varphi']r\,,\ \psi(x, y)r\,,\ zr$$

$[\mathbf{26}, \mathrm{VI}]_3$ $$\varphi(x)q + \frac{1}{2}az\varphi'' r\,,\ \bar\varphi(x)p + 2y\bar\varphi' q + z[ay\bar\varphi''' + b\bar\varphi']r\,,\ \psi(x, y)r\,,\ zr$$

$[\mathbf{26}, \mathrm{VI}]_4$ $$\varphi'(x)q + az\varphi r\,,\ \bar\varphi(x)p - y\bar\varphi' q + bz\bar\varphi' r\,,\ \psi(x, y)r\,,\ zr$$

[26, VII]$_1$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ \bar\varphi_0(x)zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[26, VII]$_2$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ \varphi_{s,t}(x)y^s e^{c_t y} r\,,\ \bar\varphi_0(x)zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1\ ;\ t=1,2,\dots,k\ ;\ s=0,1,\dots,n_t)$$

[26, VIII]$_1$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + bz\bar\varphi' r\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[26, VIII]$_2$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + bz\bar\varphi' r\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ \varphi_{s,t}(x)y^s e^{c_t y} r\,,\ zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1\ ;\ t=1,2,\dots,k\ ;\ s=0,1,\dots,n_t)$$

[26, VIII]$_3$ $$\varphi'(x)q + az\varphi r\,,\ \bar\varphi(x)p - y\bar\varphi' q + bz\bar\varphi' r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r\,,\ zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[26, IX] $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q\,,\ r\,,\ zr$$

[27] Gruppo accorciato: $\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q\,,\ yq$.

194. — Il modo più semplice di ottenere questi gruppi consisterà nell'aggiungere una trasf. inf.

$$yq + \beta(x, y, z)r$$

ai gruppi or ora determinati (nn. 185-193) partendo dal gruppo accorciato [26]. Poichè la trasf. inf. da aggiungere non dipende da funzioni arbitrarie, i calcoli che qui si richiedono sono del tutto elementari; cosicchè potremo limitarci alla enumerazione.

[27]$_1$ $$\varphi(x)q + \varphi' r\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + \left[(c-1)z\bar\varphi' + cy\bar\varphi''\right]r\,,\ yq + zr$$

[27]$_2$ $$\varphi(x)q + \frac{1}{2}\varphi'' r\,,\ \bar\varphi(x)p + \frac{1}{2}y\bar\varphi' q + \frac{1}{4}\left[y\varphi''' - 6z\varphi'\right]r\,,\ yq + zr$$

[27]$_3$
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + y\bar\varphi' q + b\bar\varphi' r\,,\ yq$$

[27]$_4$
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + z\bar\varphi' r\,,\ yq + azr$$

[27, I]
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + bz\bar\varphi' r\,,\ yq + azr\,,\ \psi(x, y)r$$

[27, II]$_1$
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + bz\bar\varphi' r\,,\ yq + azr\,,\ \underset{(l=0,1,\ldots,n-1)}{\varphi_l(x)y^l r}$$

[27, II]$_2$
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + \left[(cn-1)z\bar\varphi' + y^n\left(b_1\bar\varphi' + \frac{1}{2} b_2\bar\varphi''\right)\right]r\,,$$
$$yq + nzr\,,\ \underset{(l=0,1,\ldots,n-1)}{\varphi_l(x)y^l r}$$

[27, II]$_3$
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + \left[(cn-2)z\bar\varphi' + y^n\left(b_1\bar\varphi' + \frac{1}{3!} b_3\bar\varphi'''\right)\right]r\,,$$
$$yq + nzr\,,\ \underset{(l=0,1,\ldots,n-1)}{\varphi_l(x)y^l r}\,,$$

[27, II]$_4$
$$\varphi(x)q + ay^n\bar\varphi' r\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q +$$
$$+ \left\{ [c(n+1)-1]z\bar\varphi' + \frac{ac}{n+1} y^{n+1}\bar\varphi'' \right\} r\,,\ yq + (n+1)zr\,,\ \underset{(l=0,1,\ldots,n-1)}{\varphi_l(x)y^l r}$$

[27, II]$_5$
$$\varphi(x)q + \frac{1}{2} ay^n\varphi'' r\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q +$$
$$+ \left\{ [c(n+1)-2]z\bar\varphi' + \frac{1}{2}\frac{ac}{n+1} y^{n+1}\varphi''' \right\} r\,,\ yq + (n+1)zr\,,\ \underset{(l=0,1,\ldots,n-1)}{\varphi_l(x)y^l r}$$

[27, II]$_6$
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + cnz\bar\varphi' r\,,\ yq + bzr\,,\ \underset{(l=0,1,\ldots,n-1)}{\varphi_l(x)y^l r}\,,\ y^n r$$

[27, II]$_7$ $$\varphi(x)q + ay^n\varphi' r\,,\ \bar\varphi(x)p + y\bar\varphi' q + \left\{ nz\bar\varphi' + \frac{1}{2}\,ay^{n+1}\varphi'' \right\} r\,,\ yq + (n+1)zr\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ y^n r \quad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[27, III]$_1$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + bz\bar\varphi' r\,,\ yq + azr\,,\ r$$

[27, III]$_2$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + b\bar\varphi' r\,,\ yq\,,\ r$$

[27, III]$_3$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + \left[\frac{1}{2}\,b\bar\varphi'' - z\bar\varphi'\right] r\,,\ yq + azr\,,\ r$$

[27, III]$_4$ $$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi' q + \left[\frac{1}{3!}\,b\bar\varphi''' - 2z\bar\varphi'\right] r\,,\ yq + azr\,,\ r$$

[27, III]$_5$ $$\varphi(x)q + a\varphi' r\,,\ \bar\varphi(x)p + y\bar\varphi' q + ay\bar\varphi'' r\,,\ yq + zr\,,\ r$$

[27, III]$_6$ $$\varphi(x)q + a\varphi' r\,,\ \bar\varphi(x)p - z\bar\varphi' r\,,\ yq + zr\,,\ r$$

[27, III]$_7$ $$\varphi(x)q + a\varphi' r\,,\ \bar\varphi(x)p - y\bar\varphi' q - [2z\bar\varphi' + ay\bar\varphi''] r\,,\ yq + zr\,,\ r$$

[27, III]$_8$ $$\varphi(x)q + \frac{1}{2}\,a\varphi'' r\,,\ \bar\varphi(x)p + 2y\bar\varphi' q + ay\bar\varphi''' r\,,\ yq + zr\,,\ r$$

[27, III]$_9$ $$\varphi(x)q + \frac{1}{2}\,a\varphi'' r\,,\ \bar\varphi(x)p + y\bar\varphi' q + \left[\frac{1}{2}\,ay\bar\varphi''' - z\bar\varphi'\right] r\,,\ yq + zr\,,\ r$$

[27, III]$_{10}$ $$\varphi(x)q + \frac{1}{2}\,a\varphi'' r\,,\ \bar\varphi(x)p - 2z\bar\varphi' r\,,\ yq + zr\,,\ r$$

[27, III]$_{11}$ $$\varphi'(x)q + a\varphi r\,,\ \bar\varphi(x)p - y\bar\varphi' q\,,\ yq + zr\,,\ r$$

[27, IV]
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi'q\,,\ yq\,,\ \psi_0(x,y)r\,,\ \psi_1(x,y)zr$$

[27, V]
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi'q\,,\ yq\,,\ \psi(x,y)r\,,\ \varphi_l(x)y^l zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[27, VI]
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi'q\,,\ yq\,,\ \psi(x,y)r\,,\ r$$

[27, VII]
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi'q\,,\ yq\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ \bar\varphi_0(x)zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[27, VIII]
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi'q + az\bar\varphi'r\,,\ yq\,,\ \varphi_l(x)y^l r\,,\ zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[27, IX]
$$\varphi(x)q\,,\ \bar\varphi(x)p + cy\bar\varphi'q\,,\ yq\,,\ r\,,\ zr$$

[28] Gruppo accorciato: $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi(x)p$.

195. — I gruppi di cui qui ci dobbiamo occupare si potranno ottenere sia aggiungendo una schiera di trasf. inf.

$$\varphi_1(x)yq + \zeta_1(x, y, z)r$$

ai gruppi determinati nei nn. (184-193) partendo dal gruppo accorciato **[26]**, sia (e quest' ultimo metodo sarà preferibile) aggiungendo una trasf. inf.

$$x^3p + \beta_3(x, y, z)r$$

ai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato **[23]**: $p\,,\ xp\,,\ x^2p\,,\ \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q$ (n. 180). Noi qui ci limiteremo ad enumerare i tipi:

[28]$_1$
$$\varphi_0(x)q + a\varphi'_0 r\,,\ \varphi_1(x)yq + [z\varphi_1 + ay\varphi'_1]r\,,\ \bar\varphi(x)p - z\bar\varphi' r$$

[28]$_2$
$$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq + \varepsilon\bar\varphi'_1 r\,,\ \bar\varphi(x)p + \left[\frac{1}{2}a\bar\varphi'' - \varepsilon z\bar\varphi'\right]r \qquad \varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$$

[28]$_3$ $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq+\varepsilon zr]\,,\ \bar\varphi(x)p+z\bar\varphi' r \qquad \varepsilon[\varepsilon-1]=0$$

[28]$_4$ $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \bar\varphi(x)p+\left[z\bar\varphi'+\frac{1}{3!}z^3\bar\varphi'''\right]r$$

[28]$_5$ $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq+zr]\,,\ \bar\varphi(x)p$$

[28, I] $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq+azr]\,,\ \bar\varphi(x)p+bz\bar\varphi' r\,,\ \psi(x,y)r$$

[28, II]$_1$ $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq+[nz\varphi_1+ay^n\varphi'_1]r\,,\ \bar\varphi(x)p-z\bar\varphi' r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[28, II]$_2$ $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq+(nz+ay^n)r]\,,\ \bar\varphi(x)p+by^n\bar\varphi' r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[28, II]$_3$ $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq+azr]\,,\ \bar\varphi(x)p+bz\bar\varphi' r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[28, II]$_4$ $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq+(nz+ay^n)r]\,,\ \bar\varphi(x)p\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r\,,\ y^n r \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[28, III] $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq+ar]\,,\ \bar\varphi(x)p+b\bar\varphi' r\,,\ r$$

[28, IV] $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \bar\varphi(x)p\,,\ \psi_0(x,y)r\,,\ \psi_1(x,y)zr$$

[28, V] $$\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \bar\varphi(x)p\,,\ \psi(x,y)r\,,\ \varphi_l(x)y^l zr \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

[28, VI] $\quad \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + azr]\,,\ \bar\varphi(x)p + bz\bar\varphi' r\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ zr$

[28, VII] $\quad \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi(x)p\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r\,,\ \bar\varphi(x)zr \quad (l=0,1,\dots,n-1)$

[28, VIII] $\quad \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + azr]\,,\ \bar\varphi(x)p + bz\bar\varphi' r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r\,,\ zr$

[28, IX] $\quad \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \bar\varphi(x)p\,,\ r\,,\ zr$

[29] **Gruppo accorciato:** $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q\,,\ \varphi(x)p\,.$

196. — Sia aggiungendo una trasf. inf.

$$x^3p + \zeta_3(x\,,y\,,z)r$$

ai gruppi aventi il gruppo accorciato [24]: $p\,,\ xp\,,\ x^2p\,,\ \varphi_0 q\,,\ \varphi_1 yq\,,\ \varphi_2 y^2 q$ (n. 181), sia aggiungendo una schiera di trasf. inf.

$$\varphi_2(x)y^2q + \zeta_2(x\,,y\,,z)r$$

ai gruppi determinati pocanzi partendo dal gruppo [28], otteniamo i tipi seguenti:

$[29]_1 \quad \varphi_0(x)q + a\varphi'_0 r\,,\ \varphi_1(x)yq + [z\varphi_1 + ay\varphi'_1]r\,,$
$\varphi_2(x)y^2q + [2yz\varphi_2 + y^2\varphi'_2]r\,,\ \bar\varphi(x)p - z\bar\varphi' r$

$[29]_2 \quad \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + zr]\,,\ \varphi_2(x)[y^2q + 2yzr]\,,\ \bar\varphi(x)p + az\bar\varphi' r$

$[29]_3 \quad \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + zr]\,,\ \varphi_2(x)[y^2q + (2y + z)zr]\,,\ \bar\varphi(x)p$

$[29]_4 \quad \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q\,,\ \bar\varphi(x)p + \left[z\bar\varphi' + \frac{1}{2}z^2\bar\varphi''\right]r$

$[29]_5 \quad \varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q\,,\ \bar\varphi(x)p + \left[z\bar\varphi' + \frac{1}{3!}az^3\bar\varphi'''\right]r$

[29, I] $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + azr]\,,\ \varphi_2(x)[y^2q + 2ayzr]\,,\ \bar\varphi(x)p + bz\bar\varphi' r\,,\ \psi(x\,,y)r$

[29, II]$_1$ $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)\left[yq + \frac{n}{2}zr\right],\ \varphi_2(x)[y^2q + nyzr]\,,\ \bar\varphi(x)p + az\bar\varphi' r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r$ $(l = 0, 1, \ldots, n)$

[29, II]$_2$ $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)[y^2q + 2\varepsilon yr]\,,\ \bar\varphi(x)p\,,\ \bar\varphi_0(x)r$ $\varepsilon[\varepsilon - 1] = 0$

[29, III] $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + ar]\,,\ \varphi^2(x)[y^2q + 2ayr]\,,\ \bar\varphi(x)p + b\bar\varphi' r\,,\ r$

[29, IV] $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q\,,\ \bar\varphi(x)p\,,\ \psi_0(x\,,y)r\,,\ \psi_1(x\,,y)zr$

[29, V] $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)[y^2q + 2ayzr]\,,\ \varphi(x)p\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ \bar\varphi_0(x)zr$

[29, VI] $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)[yq + azr]\,,\ \varphi_2(x)[y^2q + 2ayzr]\,,$ $\bar\varphi(x)p + bz\bar\varphi' r\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ zr$

[29, VII] $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)[y^2q + nyzr]\,,\ \varphi(x)p\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r\,,\ \bar\varphi(x)zr$ $(l = 0, 1, \ldots, n-1)$

[29, VIII] $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)\left[yq + \frac{n}{2}zr\right],\ \varphi_2(x)[y^2q + nyzr]\,,$ $\bar\varphi(x)p + bz\bar\varphi' r\,,\ \bar\varphi_l(x)y^l r\,,\ zr$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

[29, IX] $\varphi_0(x)q\,,\ \varphi_1(x)yq\,,\ \varphi_2(x)y^2q\,,\ \bar\varphi(x)p\,,\ r\,,\ zr$

[30] Gruppo accorciato: $\psi(x, y)q, \varphi(x)p$.

197. — Si prendano le mosse dai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato **[25]**: $p, xp, x^2p, \psi(x, y)q$ (n. 182) oppure dai gruppi or ora determinati in base al gruppo accorciato **[29]** (n. prec.).

Si ottengono così i gruppi seguenti:

[30]₁ $$\psi(x, y)q + \left[z\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right]r, \bar{\varphi}(x)p - z\bar{\varphi}'r$$

[30]₂ $$\psi(x, y)q + z\frac{\partial\psi}{\partial y}r, \bar{\varphi}(x)p + az\bar{\varphi}'r$$

[30]₃ $$\psi(x, y)q + \left[z\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]r, \bar{\varphi}(x)p$$

[30]₄ $$\psi(x, y)q + \left[z\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{3!}az^3\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right]r, \bar{\varphi}(x)p$$

[30]₅ $$\psi(x, y)q, \bar{\varphi}(x)p + \left[z\bar{\varphi}' + \frac{1}{2}z^2\bar{\varphi}''\right]r$$

[30]₆ $$\psi(x, y)q, \bar{\varphi}(x)p + \left[z\bar{\varphi}' + \frac{1}{3!}az^3\bar{\varphi}'''\right]r$$

[30, I] $$\psi(x, y)q + az\frac{\partial\psi}{\partial y}r, \varphi(x)p + bz\varphi'r, \psi_0(x, y)r$$

[30, II]₁ $$\psi(x, y)q + a\frac{\partial\psi}{\partial y}r, \varphi(x)p, \varphi_0(x)r$$

[30, II]₂ $$\psi(x, y)q, \varphi(x)p + az\varphi'r, \varphi_0(x)r$$

[30, III] $$\psi(x, y)q + a\frac{\partial\psi}{\partial y}r, \varphi(x)p + b\varphi'r, r$$

[**30**, IV] $\psi(x,y)q\,,\ \varphi(x)p\,,\ \psi_0(x,y)r\,,\ \psi_1(x,y)zr$

[**30**, V] $\psi(x,y)q + az\dfrac{\partial\psi}{\partial y}r\,.\ \varphi(x)p\,,\ \psi_0(x,y)r\,,\ \varphi_0(x)zr$

[**30**, VI] $\psi(x,y)q + az\dfrac{\partial\psi}{\partial y}r\,,\ \varphi(x)p + bz\varphi' r\,,\ \psi_0(x,y)r\,,\ zr$

[**30**, VII] $\psi(x,y)q\,,\ \varphi(x)p\,,\ \varphi_0(x)r\,,\ \varphi_1(x)zr$

[**30**, VIII] $\psi(x,y)q\,,\ \varphi(x)p + az\varphi' r\,,\ \varphi_0(x)r\,,\ zr$

[**30**, IX] $\psi(x,y)q\,,\ \varphi(x)p\,,\ r\,,\ zr$

B

Ci restano oramai da considerare i tre gruppi accorciati [**31**]-[**33**] che, come già notammo (n. 183) richiedono una trattazione speciale e offrono un particolare interesse.

[**31**] Gruppo accorciato: $\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q$.

198. — I *gruppi di prima specie* (cioè non contenenti nessuna trasf. inf. che lasci ferma ogni singola retta della stella invariante) saranno della forma

$$\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi'''
]q + A(\varphi)r\,,$$

dove A è una forma differenziale lineare a coefficienti dipendenti da $x\,,y\,,z$

$$A(\varphi) = \sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m\,!}\alpha_m(x\,,y\,,z)\varphi^{(m)}\,.$$

Per $\varphi = 1, x, x^2$ avremo le tre trasf. inf.

$$p + \alpha_0 r, \; xp + yq + [\alpha_0 x + \alpha_1]r, \; x^2p + 2xyq + [\alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_2]r$$

le quali generano manifestamente un gruppo finito a tre parametri: esso è riducibile, con facili trasformazioni, alla forma tipica

$$\text{a)} \qquad p, \; xp + yq, \; x^2p + 2xyq + yr$$

se è $\alpha_2 \gtrless 0$; e alla forma

$$\text{b)} \qquad p, \; xp + yq, \; x^2p + 2xyq$$

se è $\alpha_2 = 0$.

Esaminiamo successivamente i due casi. Nel caso *a*) abbiamo

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \; \alpha_2 = y.$$

Inoltre dalle alternate *)

$$(p, \varphi p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + A(\varphi)r) = \varphi' p + [y\varphi'' + cy^3\varphi^{(\mathrm{IV})}]q + D_x A(\varphi)r,$$
$$(xp + yq, \varphi p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + A(\varphi)r) = [x\varphi' - \varphi]p + [\dots]q + [xD_x A(\varphi) + yD_y A(\varphi)]r,$$

risultano le due equazioni simboliche

$$(56) \qquad \begin{cases} D_x A(\varphi) = A D_x(\varphi) \\ xD_x A(\varphi) + yD_y A(\varphi) = A(x\varphi') - A(\varphi), \end{cases}$$

la prima delle quali ci dice che la A è a coefficienti indipendenti da x; mentre la seconda, che sviluppata dà

$$(57) \qquad A' D_x(\varphi) = yD_y A(\varphi) + A(\varphi),$$

implica pei coefficienti $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$ le equazioni

$$(m-1)\alpha_m = y\frac{\partial \alpha_m}{\partial y}$$

ossia

$$(58) \qquad \alpha_m = y^{m-1}\bar{\alpha}_m(z) \qquad (m = 3, 4, \dots, n),$$

dove gli $\bar{\alpha}_m$ sono indipendenti da x e y.

Analogamente l'alternata

$$(x^2p + 2xyq + yr, \varphi p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + A(\varphi)r) =$$
$$= [x^2\varphi' - 2x\varphi]p + [\dots]q + [x^2D_x A(\varphi) + 2xyD_y A(\varphi) + yD_z A(\varphi) - y\varphi' - cy^3\varphi''']r$$

(*) Per abbreviare, per quanto è possibile, le formole, tralascieremo spesso di scrivere per disteso la seconda componente (coefficiente di q), della quale non abbiamo da occuparci.

conduce, dopo ovvie riduzioni in base alle (56) (57), all'equazione funzionale

$$A''D_x(\varphi) = yD_zA(\varphi) + 2A'(\varphi) - y\varphi' - cy^3\varphi''',$$

la quale dà

$$\alpha_4 = y\frac{\partial \alpha_3}{\partial z} - 6cy^3, (m-2)\alpha_{m+1} = y\frac{\partial \alpha_m}{\partial z} \quad (m = 4, 5, \dots, n-1) \ , \ \frac{\partial \alpha_n}{\partial z} = 0;$$

ossia, tenuto conto delle (58) e indicata con α la funzione $\bar{\alpha}_3(z)$, la quale è razionale intera di grado $n-3$ al più,

$$\alpha_3 = y^2\alpha(z), \alpha_4 = (\alpha' - 6c)y^3, \alpha_{m+1} = \frac{1}{(m-2)!}\alpha^{(m-2)}y^m, \qquad (m = 4, 5, \dots, n-1).$$

Infine, teniamo conto della alternata

$$(x^3p + [3x^2y + 6cy^3]q + [3xy + \alpha y^2]r, \varphi p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + A(\varphi)r) =$$
$$= [x^3\varphi' - 3x^2\varphi]p + [\dots]q + \{x^3D_xA(\varphi) + [3x^2y + 6cy^3]D_yA(\varphi) +$$
$$+ [3xy + \alpha y^2]D_zA(\varphi) - 3y\varphi - [3x + 2\alpha y][y\varphi' + cy^3\varphi'''] - \alpha'y^2A(\varphi)\}r.$$

Di qui, valendoci delle (56) (57) (58), ricaviamo l'equazione funzionale

$$A'''D_x(\varphi) = 3A''(\varphi) + 6cy^3D_yA(\varphi) + \alpha y^2D_zA(\varphi) - \alpha'y^2A(\varphi) - 3y\varphi - 2\alpha y^2\varphi' - 2cy^4\alpha\varphi''',$$

la quale implica per $m > 3$

$$(m-3)\alpha_{m+2} = 6cy^3\frac{\partial \alpha_m}{\partial y} + \alpha y^2\frac{\partial \alpha_m}{\partial z} - \alpha'\alpha_m y^2,$$

ossia tenuto conto delle (59)

$$\frac{(m-1)(m-2)}{m-3}\alpha^{(m-1)} = 6(m-1)c\,\alpha^{(m-3)} + \alpha\alpha^{(m-2)} - \alpha'\alpha^{(m-3)} \qquad (m > 3).$$

Per $m = 4, 5$ risulta di qui

$$\frac{1}{6}\alpha''' = 18c\alpha' + \alpha\alpha'' - \alpha'^2 \ , \ \frac{1}{6}\alpha^{(\text{IV})} = 24c\alpha'' + \alpha\alpha''' - \alpha'\alpha''$$

e quindi, confrontando la seconda con la derivata della prima,

$$\alpha'' = 0, [18c - \alpha']\alpha' = 0$$

Dovremo dunque avere o $\alpha' = 0$, oppure $\alpha' = 18c$ (*). Nel primo caso sarà, ove si ponga $\alpha = a$ ($=$ cost. determinata)

$$\alpha_2 = y\,,\ \alpha_3 = ay^2\,,\ \alpha_4 = -6cy^3\,,\ \alpha_m = 0 \qquad (m > 4)\,;$$

ma basta calcolare l'alternata di due trasf. inf. generiche del gruppo, per concludere che deve essere $c = 0$; talchè otteniamo il gruppo

$$[31]_1 \qquad \varphi(x)p + y\varphi'q + \left[\frac{1}{2}\,y\varphi'' + \frac{1}{3!}\,ay^2\varphi'''\right]r$$

Supponiamo in secondo luogo

$$\alpha' = 18c\ ,\ \alpha = 18cz + \text{cost}\,.$$

La costante, poichè oramai possiamo ammettere $c \gtrless 0$, si riduce a zero con la trasformazione

$$z' = z + \frac{\text{cost}}{18c}\,;$$

e allora avremo

$$\alpha_2 = y\,,\ \alpha_3 = 18czy^2\,,\ \alpha_4 = 12cy^3\,,\ \alpha_m = 0 \qquad (m > 4)\,.$$

Si verifica che la proprietà gruppale sussiste e si ottiene il gruppo del quart' ordine

$$[31]_2 \qquad \varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + \left[\frac{1}{2}\,y\varphi'' + 3czy^2\varphi''' + \frac{1}{2}\,cy^3\varphi^{(\text{IV})}\right]r$$

Esaurita così l'ipotesi che il nostro gruppo contenga un sottogruppo del tipo a), supponiamo che esso possieda invece il sottogruppo b). Varranno anche qui le equazioni simboliche (56) (57). Inoltre dalla

$$(x^2p + 2xyq\,,\ \varphi p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + A(\varphi)r) = [x^2\varphi' - 2x\varphi]p + [\ldots]q +$$
$$+ [x^2 D_x A(\varphi) + 2xy D_y A(\varphi)]r$$

(*) Supponendo $c = 0$ a priori, si giunge ugualmente alla conclusione $\alpha' = 0$, p. es. considerando il coefficiente di D^n nella ultima equazione funzionale per A.

discende

$$A''D_x(\varphi) = 2A'(\varphi)$$

ossia

$$(m-2)\,\alpha_{m+1} = 0 \qquad (m = 3, 4, \dots, n-1)\,.$$

Sarà dunque $\alpha_4 = \alpha_5 = \dots = \alpha_n = 0$; e la α_3 sarà, come risulta dalle (58), della forma

$$\alpha_3 = y^2\alpha(z)\,,$$

dove possiamo supporre $\alpha \gtrless 0$; giacchè altrimenti ricadremmo sul gruppo accorciato stesso. Posto

$$z' = \int \frac{dz}{\alpha}$$

riduciamo $\alpha = 1$ e otteniamo il gruppo

$$[31]_3 \qquad \left|\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + \frac{1}{3!}y^2\varphi'''r\right|$$

199. — Passiamo ai *gruppi di seconda specie*. Essi saranno della forma

$$\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + [zA(\varphi) + \zeta]r\,,\ \theta(x, y)r\,,$$

dove A è una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da z, la ζ è una funzione dipendente da φ e determinata da essa a meno di una determinazione arbitraria di θ, e infine θ o è una funzione arbitraria di x e y oppure è la più generale soluzione di un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, appartenente o no alla classe del MAYER.

In ogni caso, alternando due trasf. inf.

$$\varphi p + \dots\,,\ \varphi_1 p + \dots$$

del gruppo, si trova che la A deve soddisfare all' equazione funzionale

$$\begin{aligned}(60) \qquad A(\varphi\varphi'_1 - \varphi_1\varphi') = \varphi D_x A(\varphi_1) - \varphi_1 D_x A(\varphi) + y[\varphi' D_y A(\varphi_1) - \varphi'_1 D_y A(\varphi)] + \\ + cy^3[\varphi''' D_y A(\varphi_1) - \varphi'''_1 D_y A(\varphi)]\,.\end{aligned}$$

Ora, considerate le due trasf. inf.

$$p + (\alpha_0 z + \beta_0)r\,,\ xp + yq + \{[\alpha_0 x + \alpha_1]z + \beta_1\}r\,,$$

possiamo, per mezzo di una trasformazione della forma

$$z' = z\lambda(x, y) + \mu(x, y),$$

ridurre simultaneamente $\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_1 = 0$, talchè avremo nel gruppo le trasf. inf.

$$p, xp + yq + \beta_1 r,$$

dove β_1 è indipendente da z. Quanto alla A, posto

$$A(\varphi) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \alpha_m \varphi^{(m)},$$

avremo intanto

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0.$$

Di più, sviluppando i vari termini della (60) secondo la formola del D'ALEMBERT, troviamo, identificando i coefficienti di $\varphi, \varphi', \varphi'' \ldots$, oltre la commutabilità della A colla D_x, onde risulta che gli α_m sono indipendenti anche da x,

a) $A' D_x(\varphi_1) = A(\varphi_1) + y D_y A(\varphi_1)$

b) $A'' D_x(\varphi_1) = 2A'(\varphi_1) - \alpha'_2 [y\varphi'_1 + cy^3 \varphi'''_1]$

c) $A''' D_x(\varphi_1) = 3A''(\varphi_1) - \alpha'_3 [y\varphi'_1 + cy^3 \varphi'''_1] - 3\alpha_2 \varphi_1 + 6cy^3 D_y A(\varphi_1)$

e per $m > 3$

d) $A^{(m)} D_x(\varphi_1) = mA^{(m-1)}(\varphi_1) - \alpha'_m [y\varphi'_1 + cy^3 \varphi'''_1] - m\alpha_{m-1} \varphi_1$.

La a), in quanto le α_m sono indipendenti da z, implica (cfr. le (58) del n. prec.)

$$\alpha_m = a_m y^{m-1} \qquad (m = 2, 3, \ldots)$$

dove le a_m sono costanti determinate.

Sostituendo nella b) e identificando, si ottiene

$$\alpha_2 = a_2 y, \quad \alpha_3 = a_3 y^2, \quad \alpha_4 = -6ca_2 y^3, \quad \alpha_m = 0 \qquad (m > 4),$$

dopo di che dalla c) discende

$$ca_2 = 0,$$

cosicchè dovremo avere o $c = 0$ o $a_2 = 0$; e nell'uno e nell'altro

caso le d) risultano identicamente soddisfatte. Otteniamo così le due seguenti specie di gruppi:

$$\varphi p + [y\varphi' + cy^3\varphi'''] q + \left[\frac{1}{3!} ay^2 z\varphi''' + \zeta\right] r , \theta(x, y) r \tag{61}$$

$$\varphi p + y\varphi' q + \left[\left(\frac{1}{2} a\varphi'' + \frac{1}{3!} by\varphi'''\right) yz + \zeta\right] r , \theta(x, y) r . \tag{62}$$

Se la θ è funzione arbitraria di x e y, otteniamo anzitutto i due gruppi:

[**31**, I]$_1$ $$\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + \frac{1}{3!} ay^2 z\varphi''' r , \psi(x, y) r$$

[**31**, I]$_2$ $$\varphi(x)p + y\varphi' q + \left(\frac{1}{2} a\varphi'' + \frac{1}{3!} by\varphi'''\right) yzr , \psi(x, y) r$$

200. — Dopo ciò esaminiamo il caso in cui θ è definita da un sistema di equazioni differenziali lineari e dipende da infinite costanti arbitrarie. Allora, in base alla presenza nel gruppo del sottogruppo ∞^3

$$p , xp + yq + \ldots , x^2 p + 2xyq + \ldots ,$$

si concluderà (cfr. il n. 93) che le determinazioni della θ saranno della forma

$$\theta = \sum_{s, t} \mu_{st}(x) y^{c_s} \log^t y \qquad (s = 1, 2, \ldots h \; ; \; t = 0, 1, \ldots, n_s) ,$$

dove ciascuna delle μ_{st} è variabile in un insieme lineare di funzioni, e codesti vari insiemi funzionali possono essere legati da particolari corrispondenze lineari.

Ciò premesso, distinguiamo i due casi (61) (62); e, cominciando dal primo, notiamo che dalla combinazione delle

$$\varphi p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + \left[\frac{1}{3!} ay\, z\varphi''' + \zeta\right] r , \theta r$$

risulta che deve essere

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s, t} \Big\{ \left[\varphi\mu'_{st} + c_s\varphi'\mu_{st}\right] y^{c_s} \log^t y + t\varphi'\mu_{st} y^{c_s} \log^{t-1} y + \\ &+ \left[cc_s - \frac{1}{3!} a\right] \varphi'''\mu_{st} y^{c_s+2} \log^t y + ct\mu_{st}\varphi''' y^{c_s+2} \log^{t-1} y \Big\} \equiv 0 \end{aligned}\right\} \; [\text{mod. } \theta] .$$

Risulta di qui (terzo termine della sommatoria) che i c_s debbono costituire una progressione aritmetica di differenza 2 e che pel massimo c_h dei c_s deve essere

$$6cc_h - a = 0\ ,\quad tc = 0$$

e quindi, potendosi supporre $c \gtrless 0$ (in quanto il caso $c = 0$ è incluso in (62))

$$t = 0 \qquad a = 6cc_h\,;$$

cioè, in particolare, debbono mancare i termini logaritmici relativi all'esponente c_h. Allora, se si pone

$$z' = zy^{-c_h},$$

e si indica $-c_h$ con a, la trasf. inf. generica del gruppo diventa

$$\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + [az\varphi' + \zeta]r\,;$$

e gli esponenti c_s assumeranno la forma

$$-2n\ ,\ -2n+2\ ,\ \ldots\ ,\ -2\ ,\ 0\ ,$$

e all'ultimo non corrisponderà nessun termine logaritmico. Allora combinando la trasf. inf. generica del gruppo con la

$$\sum_{s,t} \mu_{s,t}\, y^{-2s} \log^t y r\,, \tag{63}$$

troviamo

$$\left.\begin{aligned} \sum \Big\{ \Big[\varphi\mu'_{s,t} - (2p+a)\varphi'\mu_{s,t} \Big] y^{-2s} \log^t y \,+ \\ + t\varphi'\mu_{s,t}\, y^{-2s}\log^{t-1} y - 2sc\mu_{st}\varphi''' y^{-2s+2}\log^t y \,+ \\ + ct\varphi'''\mu_{st}\, y^{-2s+2}\log^{t-1} y \Big\} = 0 \end{aligned}\right\} \quad [\text{mod. } \theta]. \tag{64}$$

Siccome nella (63) per $s = 0$ mancano i termini logaritmici, risulta dal terzo termine della sommatoria della (64) che debbono pur mancare i termini logaritmici relativi a tutti gli altri valori di s, per modo che la θ avrà la forma

$$\theta = \sum_s \mu_s(x) y^{-2s} \tag{63'}$$

e la (64) diventerà

$$\sum_{s=0}^{h} [\varphi\mu'_s - (2s + a)\varphi'\mu_s - 2(s+1)c\mu_{s+1}\varphi''']y^{-2s} \equiv 0 \qquad [\text{mod. } \theta],$$

e in particolare dovremo avere, per $\varphi = 1, x, x^2, x^3$,

$$(65) \qquad \sum \mu'_s y^{-2s} \equiv 0$$

$$(66) \qquad \sum [x\mu'_s - (2s + a)\mu_s]y^{-2s} \equiv 0$$

$$(67) \qquad \sum [x^2\mu'_s - 2(2s + a)x\mu_s]y^{-2s} \equiv 0$$

$$(68) \qquad \sum [x^3\mu'_s - 3(2s + a)x^2\mu_s - 12c(s+1)\mu_{s+1}]y^{-2s} \equiv 0$$

$[\text{mod. } \theta]$.

Ciascuno dei μ_s deve essere variabile in uno spazio lineare di funzioni che, come risulta dalla (65), deve essere trasformato in sè stesso dalla D_x; per modo che, se una certa μ_s, per es. la μ_i, è variabile in uno spazio ad un numero finito di dimensioni, essa sarà della forma

$$\mu_i = \sum c_{pq} x^p e^{h_q x};$$

ma basta tener conto della (66) per convincersi che le h_q debbono essere tutte nulle e la μ_i deve ridursi ad un polinomio in x (a coefficienti costanti ed arbitrari)

$$\mu_i = \sum c_p x^p.$$

Se m_i è il (massimo) grado delle determinazioni di μ_i, risulta dalla (67)

$$a = \frac{m_i - 4i}{2}.$$

D'altra parte risulta dalla (68) che se è ad un numero finito di dimensioni lo spazio delle determinazioni di μ_i, sono necessariamente tali anche quelli delle $\mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \dots, \mu_n$; talchè tutti codesti coefficienti saranno polinomi e avremo pei rispettivi gradi $m_i, m_{i+1}, \dots, m_n$ le uguaglianze:

$$a = \frac{m_i - 4i}{2} = \frac{m_{i+1} - 4(i+1)}{2} = \dots = \frac{m_n - 4n}{2}.$$

Ma, applicando la (69) alla μ_n che è di grado m_n si trova $m_n = 0$; cosicchè si dovrebbe avere per un certo intero positivo (o nullo) m_{n-1} l'identità

$$\frac{4n-4-m_{n-1}}{2} = 2n$$

la quale è assurda.

Si conclude di qui che ciascuna delle μ_s è, per sè stessa, una funzione variabile in uno spazio ad un numero infinito di dimensioni e perciò ***arbitraria*** (*).

Ma con ciò non resta escluso che le varie μ_s possano essere mutuamente legate da corrispondenze lineari, per cui, fissata ad arbitrio la determinazione di una o più fra esse restino individuate le determinazioni delle altre. Ad escludere la possibilità di questa dipendenza valgono le seguenti considerazioni.

Se fra le diverse μ_s intercedessero corrispondenze quali pocanzi indicammo, esse sarebbero espresse da un sistema (S) di equazioni differenziali, ciascuna delle quali avrebbe la forma

$$\sum_0^n F_s(\mu_s) = 0 \tag{69}$$

dove F_s rappresenta una forma differenziale lineare ordinaria in x a coefficienti indipendenti da x e y; e il sistema (S), come risulta dalle (65)-(67), dovrebbe ammettere, insieme con ogni soluzione determinata

$$\mu_s \qquad (s = 0, 1, \ldots, n)$$

anche le

$$\mu'_s \tag{70}$$

$$x\mu'_s - 2(2s+a)\mu_s \tag{71}$$

$$x^2\mu'_s - 2(2s+a)x\mu_s. \tag{72}$$

Intanto la (70) ci avverte che le equazioni del sistema (S) sono a coefficienti costanti o, quanto meno, si possono ridurre tali con semplici eliminazioni algebriche.

(*) Non si dimentichi che qui si tratta di gruppi *continui* nel senso del Lie, cioè definiti da equazioni differenziali.

Inoltre, per la (71), se è soddisfatta la (69), dovrà pur sussistere la

$$\sum_{o}^{n} F_s(x\mu'_s - (2s + a)\mu_s) = 0 ;$$

ossia, sviluppando e tenendo conto delle (69) (70), la

$$\sum_{o}^{n} F'_s(\mu'_s) - 2\sum_{s} sF_s(\mu_s) = 0 . \tag{73}$$

Quest' equazione, che è manifestamente dello stesso ordine della (69), deve essere una conseguenza del sistema (S); e poichè, posto

$$F_s = \sum_{m} \frac{1}{m\,!} a_{s\cdot m} D_x^m ,$$

essa diventa

$$\sum_{s,m} \frac{1}{m\,!} [\, m - 2s\,] a_{sm} \mu_s^{(m)} = 0 ; \tag{74}$$

basta iterare il passaggio dalla (69) alla (74) per concludere che il sistema (S) deve comprendere tutte le equazioni

$$\sum_{s,m} \frac{1}{m\,!} [\, m - 2s\,]^t a_{s\cdot m} \mu_s^{(m)} = 0 \qquad (t = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

cosicchè la (69) si spezzerà in tante equazioni quanti sono i gruppi di termini in cui è costante il binomio

$$m - 2s .$$

Precisamente le equazioni di (S) dovranno essere della forma

$$\sum_{s} \frac{1}{(2s + i)\,!} a'_{i\cdot s} \mu_s^{(2s+i)} = 0 \tag{75}$$

dove i è un intero positivo che può variare da equazione ad equazione, ma è costante da termine a termine di un'equazione stessa.

Ciò premesso, tenendo conto della (72), avremo che il sistema (S), insieme con la (69) deve pur contenere la

$$\sum_s F_s(x^2\mu'_s - 2[2s+a]x\mu_s) = 0\,,$$

ossia, sviluppando e tenendo conto delle (69) (70) (73), la

$$\sum_s F''_s(\mu'_s) - 2\sum_s [2s+a]F'_s(\mu_s) = 0:$$

così con la (75) il sistema (S) dovrà contenere la

$$\sum \frac{1}{(2s+i-1)!}[i-1-2(s+a)]a'_{is}\mu_s^{(2s+i-1)} = 0\,. \tag{76}$$

Ora, se la (75) è una delle equazioni di ordine minimo, contenute nel sistema (S), la (76) che è di ordine inferiore, deve ridursi ad una identità, talchè dovremo avere

$$[i-1-2(s+a)]a'_{i.s} = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, n);$$

e, poichè i è costante e varia soltanto s, abbiamo che gli a'_{is} sono tutti nulli tranne uno al più. Ma in quest'ultimo caso il sistema (S) conterrebbe un'equazione della forma

$$\frac{d^i\mu_s}{dx^i} = 0\,,$$

il che contraddice alla conclusione dianzi ottenuta che ciascuna μ_s è di per sè arbitraria.

Vediamo così l'impossibilità che le μ_s siano fra loro dipendenti e otteniamo un gruppo della forma

$$\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + [az\varphi' + \zeta]r\,, \varphi_s(x)y^{-2s}r \quad (s = 0, 1, \ldots, n).$$

Resta ora da determinare la ζ. Basta a tale scopo considerare le trasf. inf.

$$p\,, xp + yq + [az + \beta_1]r\,, x^2p + 2xyq + [2axz + \beta_2]r\,,$$

$$x^3p + [3x^2y + 6cy^3]q + [3ax^2z + \beta_3]r\,,$$

giacchè da queste, alternando iteratamente, si otterranno poi tutte le trasf. inf. del gruppo.

Dalla

$$(p\,,xp+yq+[az+\beta_1]r)=p+\frac{\partial\beta_1}{\partial x}r$$

risulta

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial x}\equiv 0 \qquad [\text{modd. } \varphi_s y^{-2s}]$$

e quindi

$$\beta_1\equiv\beta_1(y)$$

e allora basta porre

$$z'=z+\lambda$$

dove sia

$$\beta_1+y\lambda_y=a\lambda$$

per ridurre $\beta_1=0$.

Dopo ciò, combinando le $p\,,xp+yq+azr$ colla $x^2p+\ldots$ otteniamo

$$\frac{\partial\beta_2}{\partial x}\equiv 0\ ,\ y\frac{\partial\beta_2}{\partial y}\equiv(a+1)\beta_2 \qquad [\text{modd. } \varphi_s y^{-2s}].$$

Dalla prima congruenza risulta ancora

$$\beta_2\equiv\beta_2(y)$$

e la seconda diventa

$$y\frac{d\beta_2}{dy}=(a+1)\beta_2+\Sigma\, b_s y^{-2s},$$

talchè avremo

$$\beta_2=by^{a+1}-\Sigma\frac{b_s}{1+a+2s}y^{-2s}\equiv by^{a+1}.$$

Il solo caso di eccezione si ha quando per un certo intero positivo $h<n$ sia

$$a=-[2h+1], \tag{77}$$

giacchè allora risulta

$$\beta_2\equiv by^{a+1}\log y=by^{-2h}\log y\,. \tag{78}$$

Escluso pel momento questo caso, si trova in modo analogo

$$\beta_3=3\,bxy^{a+1}+b_1y^{a+2},$$

tranne il caso in cui sia per un certo intero $h < n$

$$a = -2[h+1], \tag{79}$$

giacchè allora abbiamo

$$\beta_3 = 3bxy^{a+1} + b_1 y^{a+2} \log y = 3bxy^{-2h-1} + b_1 y^{-2h} \log y. \tag{80}$$

Escluso pel momento anche questo caso, si ottiene alternando le trasf. inf. del 2.° e 3.° ordine

$$x^4 p + [4x^3 y + 24cxy^3] q + [4ax^3 z + 6bx^2 y^{a+1} + 4b_1 xy^{a+2} - 6bc(a+1)y^{a+3}] r;$$

e più in generale iterando e ragionando per induzione completa si otterranno le trasf. inf.

$$\varphi p + [y\varphi' + cy^3\varphi'''] q + \left[az\varphi' + \frac{1}{2} b\varphi'' y^{a+1} + \frac{1}{3!} b_1 \varphi''' y^{a+2} - \frac{1}{4} bc(a+1)\varphi^{(\mathrm{IV})} y^{a+3}\right] r$$

dove $\varphi = z, x, x^2, x^3, x^4, \ldots$.

Ma alternando due trasf. inf. generiche siffatte si trova che la proprietà gruppale è verificata sempre e solo quando sia

$$bc(a+1)(a+3) = 0,$$

talchè escluso il caso $c = 0$ dovrà essere $b = 0$ o $a = -1$ o $a = -3$.

Otteniamo così i tre gruppi

$$[31, \mathrm{II}]_1 \qquad \varphi(x) p + [y\varphi' + cy^3\varphi'''] q + az\varphi' r, \; \varphi_s(x) y^{-2s} r \quad (s = 0, 1, \ldots, n)$$

$$[31, \mathrm{II}]_2 \qquad \varphi(x) p + [y\varphi' + cy^3\varphi'''] q + \left[\frac{1}{2} b_1 \varphi'' + \frac{1}{3!} b_2 y\varphi''' - z\varphi'\right] r, \; \varphi_s(x) y^{-2s} r \quad (s = 0, 1, \ldots, n)$$

$$[31, \mathrm{II}]_3 \qquad \varphi(x) p + [y\varphi' + cy^3\varphi'''] q + \left[\frac{1}{2} by^{-2}\varphi'' + \frac{1}{3!} b_1 y^{-1}\varphi''' + \frac{1}{2} bc\varphi^{(\mathrm{IV})} - 3z\varphi'\right] r, \; \varphi_s(x) y^{-2s} r \quad (s = 0, 1, \ldots, n)$$

Seguendo lo stesso procedimento nei casi dianzi esclusi (77) (79) si trova che, perchè sia verificata la proprietà gruppale deve essere

in (78) e (80) $b=0$, talchè nel caso (77) otteniamo un caso particolare di $[\mathbf{31}, \mathrm{II}]_1$; mentre nel caso (79) si ottiene il gruppo

$$[\mathbf{31}, \mathrm{II}]_4 \qquad \begin{gathered} \varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi'''\,]q + \\ + \left[\frac{1}{3!} b\varphi''' y^{-2h} \log y - 2(1+h)z\varphi'\right] r\,,\ \varphi_s(x) y^{-2s} r \\ (s=0,1,\dots,n\,;\ 0<h<n) \end{gathered}$$

201. — Consideriamo in secondo luogo un gruppo della forma (62) del n. 199, cioè

$$(62) \qquad \varphi p + y\varphi' q + \left[\left(\frac{1}{2} a\varphi'' + \frac{1}{3!} by\varphi'''\right) yz + \zeta\right] r\,,\ \theta(x,y) r\,.$$

Anche qui la $\theta(x,y)$ sarà della forma (cfr. n. 93)

$$(81) \qquad \theta = \sum_{s,t} \mu_{s,t}(x)\, y^{c_s} \log^t y \quad (s=1,2,\dots,h\,;\ t=0,\dots,n_s)\,,$$

dove al solito le singole $\mu_{s,t}$ sono variabili ciascuna in un insieme lineare e codesti insiemi lineari possono essere mutuamente vincolati da particolari corrispondenze lineari [espresse da equazioni differenziali lineari ordinarie nelle $\mu_{s,t}$].

Tenendo conto della prima delle trasformazioni infinitesime (62), troviamo che deve essere

$$(82) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{s,t} [\varphi\mu'_{s,t} + c_s\varphi'\mu_{s,t}] y^{c_s} \log^t y + \varphi' \sum_{s,t} t\,\mu_{s,t} y^{c_s} \log^{t-1} y + \\ & - \frac{1}{2} a\varphi'' \sum_{s,t} \mu_{s,t} y^{c_s+1} \log^t y - \frac{1}{3!} b\varphi''' \sum_{s,t} \mu_{s,t} y^{c_s+2} \log^t y \equiv 0 \end{aligned} \right. \quad [\mathrm{mod.}\ \theta].$$

Il terzo e quarto termine di questa congruenza ci dicono che deve essere

$$a = b = 0\,;$$

in altre parole dobbiamo considerare un gruppo della forma

$$(83) \qquad \varphi(x)p + y\varphi' q + \zeta r\,,\ \theta(x,y) r\,,$$

dove ζ è indipendente da z, e la θ avrà la forma (81). Le eventuali corrispondenze lineari tra gli insiemi delle singole $\mu_{s,t}$ dovranno

soddisfare alle condizioni imposte dalla congruenza funzionale (82) per $a = b = 0$. Ma noi, come al n. 93, condurremo a termine il calcolo nell'ipotesi che le varie $\mu_{s,t}$ siano fra loro indipendenti.

Poichè l'insieme delle θ deve essere trasformato in sè dalla prima delle (83)

$$\varphi\theta_x + y\varphi'\theta_y \equiv 0 \qquad [\text{mod. } \theta],$$

concludiamo che ciascuna $\mu_{s,t}$ è una funzione arbitraria della x, talchè avremo un gruppo

$$\varphi(x)p + y\varphi'q + \zeta r, \varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t y \cdot r, \qquad (s = 0, 1, .., h \; ; \; t = 0, 1, ..., n_s)$$

Indicando al solito con β_i una determinazione di ζ corrispondente alla determinazione x^i della φ, potremo ridurre, al solito,

$$\beta_0 = \beta_1 = 0 .$$

Inoltre dalle

$$\frac{\partial\beta_2}{\partial x} = 0 \; , \; y\frac{\partial\beta_2}{\partial y} = \beta_2 \qquad \left[\text{mod. } \varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t y\right]$$

risulta che la β_2 è congrua ad una funzione della sola y ed è data, per certe costanti $a_{s,t}$, a, da

$$\beta_2 = y \left\{ \sum_{s,t} a_{s,t} \int y^{c_s - 2} \log^t y dy + a \right\} . \tag{84}$$

Ora da questa espressione risulta (cfr. n. 93)

$$\beta_2 \equiv ay ,$$

tolto il caso in cui una delle c_s, p. es. la c_0, sia uguale ad 1. Escluso pel momento codesto caso, avremo le trasformazioni infinitesime

$$p \, , \, xp + yq \, , \, x^2p + 2xyq + ayr \, ;$$

e dalle

$$\frac{\partial\beta_3}{\partial x} \equiv 3ay \; , \; x\frac{\partial\beta_3}{\partial x} + y\frac{\partial\beta_3}{\partial y} \equiv 2\beta_3$$

trarremo, per certe costanti $b_{s,t}$, b,

$$\beta_3 \equiv 3axy + y^2 \left\{ \sum b_{s,t} \int y^{c_s - 3} \log^t y dy + b \right\} .$$

Di qui risulta

$$\beta_3 \equiv 3\,axy + by^2\,,$$

salvo il caso in cui una delle c_s, p. es. la c_0, sia uguale a 2. Escluso per ora anche questo caso, alterniamo iteratamente le

$$x^2p + 2\,xyq + ayr\,,\; x^3p + 3\,x^2yq + [\,3\,axy + by^2\,]\,r\,.$$

Troviamo così il gruppo

$$[31\,,\mathrm{II}]_5 \qquad \left|\; \varphi(x)p + y\varphi'q + \left[\frac{1}{2}\,a\varphi'' + \frac{1}{3\,!}\,by\varphi'''\right]yr\,,\; \varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t yr \quad (s=0,1,\dots,h\;;\; t=0,1,\dots,n_s) \;\right|$$

Restano da esaminare i casi dianzi esclusi. — Se abbiamo

$$c_0 = 2$$

talchè la θ ammetta le determinazioni

$$\varphi_i(x)y^2\log^i y \qquad (i = 0\,,1\,,\dots,n)$$

risulta dalla (85)

$$\beta_3 \equiv 3\,axy + y^2\left\{\sum_t b_{0,t}\int y^{-1}\log^t y\,dy + b\right\}$$

e quindi (cfr. n. 93), ove si indichi con b_1 la costante $\dfrac{b_{0,n}}{n+1}$

$$\beta_3 \equiv 3\,axy + b_1y^2\log^{n+1} y\,;$$

talchè otteniamo il gruppo

$$[31\,,\mathrm{II}]_6 \qquad \left|\; \begin{array}{c} \varphi(x)p + y\varphi'q + \left[\dfrac{1}{2}\,ay\varphi'' + \dfrac{1}{3\,!}\,by^2\log^{n+1} y\varphi'''\right]r \\ \varphi_i(x)y^2\log^i yr\;,\; \varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t yr \\ (i=0,1,\dots,n\;;\; s=1,2,\dots,h\;;\; t=0,1,\dots,n_s) \end{array} \;\right|$$

Se invece abbiamo $c_0 = 1$, in guisa che il gruppo contenga le

$$\varphi_j(x)y\log^j yr \qquad (j = 0\,,1\,,\dots,m)$$

ricaveremo, analogamente dalla (84)

$$\beta_2 \equiv ay\log^{m+1} y$$

e

$$\beta_3 \equiv 3\,axy \log^{m+1} y + by^2 .$$

Avremo così il gruppo

$$[31, II]_7 \qquad \left| \begin{array}{c} \varphi(x)p + y\varphi' q + \left[\frac{1}{2}\, ay \log^{m+1} y\varphi'' + \frac{1}{3!}\, by^2\varphi''' \right] r \\ \varphi_j(x)y \log^j yr \;,\; \varphi_{s,t}(x)y^{c_s} \log^t yr \\ (j=0,1,\dots,m\;;\; s=1,2,\dots,h\;;\; t=0,1,\dots,n_s) \end{array} \right.$$

Infine, ammettendo verificate insieme le due ipotesi che ci hanno condotti ai gruppi $[31, II]_6$, $[31, II]_7$, otterremo:

$$[31, II]_8 \qquad \left| \begin{array}{c} \varphi(x)p + y\varphi' q + \left[\frac{1}{2}\, ay \log^{m+1} y\varphi'' + \frac{1}{3!}\, by^2 \log^{n+1} y\varphi''' \right] r \\ \varphi_j(x)y \log^j yr \;,\; \bar{\varphi}_i(x)y^2 \log^i yr \;,\; \varphi_{s,t}(x)y^{c_s} \log^t yr \\ (j=0,1,\dots,m\;;\; i=0,1,\dots,n\;;\; s=1,2,\dots,h\;;\; t=0,1,\dots,n_s) \end{array} \right.$$

202. — Passando al caso, in cui la $\theta(x, y)$ dipende da un numero finito di costanti arbitrarie, talchè il sottogruppo intransitivo sia del tipo

$$[III] \qquad \rho_i(x, y)r \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dovremo verificare, secondo che si tratterà di un gruppo della forma (61) o della forma (62), l'uno o l'altro dei seguenti sistemi di congruenze

$$\varphi \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + [y\varphi' + cy^3\varphi'''] \frac{\partial \rho_i}{\partial y} - \frac{1}{3!}\, ay^2\varphi'''\rho_i \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \rho_1, \dots, \rho_n]$$

$$\varphi \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + y\varphi' \frac{\partial \rho_i}{\partial y} - \left[\frac{1}{2}\, a\varphi'' + \frac{1}{3!}\, by\varphi''' \right] y\rho_i \equiv 0 \qquad [\text{modd. } \rho_1, \dots, \rho_n].$$

Di qui si ricava agevolmente nell'uno e nell'altro caso che le ρ_i debbono ridursi ad una sola e precisamente alla $\rho = \text{cost.}$; e di più nel primo caso deve essere $a = 0$. Siamo cioè condotti a considerare soltanto i gruppi della forma

$$\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + \zeta r , r$$

dove c può anche annullarsi.

Considerate le quattro trasformazioni infinitesime di ordine inferiore al 4.°:

$$p\,,\,xp+yq+\beta_1 r\,,\,x^2p+2xyq+\beta_2 r\,,\,x^3p+[3x^2y+6cy^3]q+\beta_3 r\,,$$

si trova, nel solito modo, a meno di costanti additive, le quali si possono riguardar nulle per la presenza della r nel gruppo,

$$\beta_1=0\ ,\ \beta_2=2ax+by\ ,\ \beta_3=3ax^2+3bxy\ ;$$

onde, alternando iteratamente, risulta successivamente per

$$\varphi=x^4\ ,\ x^5\ ,\ x^6\ ,\ \ldots$$

la trasformazione infinitesima

$$\varphi(x)p+[y\varphi'+cy^3\varphi''']q+\left[a\varphi'+\frac{1}{2}by\varphi''-\frac{1}{4}bcy^3\varphi^{(IV)}\right]r\,.$$

Ora alternando la trasformazione infinitesima precedente con un'altra di ugual forma, corrispondente ad una funzione qualsiasi $\varphi_1(x)$, troviamo che la proprietà gruppale è soddisfatta soltanto sotto l'ipotesi

$$bc=0\,;$$

talchè otteniamo i due gruppi

[31, III]$_1$ $\qquad \varphi(x)p+[y\varphi'+cy^3\varphi''']q+a\varphi'r\,,\,r$

[31, III]$_2$ $\qquad \varphi(x)p+y\varphi'q+\left[a\varphi'+\frac{1}{2}by\varphi''\right]r\,,\,r$

203. — Pei *gruppi di terza specie* il gruppo generatore è dato senz'altro dal gruppo [31, III]$_1$ o dal gruppo [31, III]$_2$, secondo che si suppone la costante c diversa da zero o nulla. Così, in base a considerazioni oramai troppe volte ripetute e mantenendo, nel caso $c=0$ e rispetto al sottogruppo intransitivo [V], l'ipotesi del n. 201, otteniamo i gruppi seguenti:

[31, IV] $\qquad \varphi(x)p+[y\varphi'+cy^3\varphi''']q\,,\,\psi_0(x,y)r\,,\,\psi_1(x,y)zr$

[31, V]$_1$ $$\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ \bar{\varphi}(x)zr$$

[31, V]$_2$ $$\varphi(x)p + y\varphi'q + \left[a\varphi' + \frac{1}{2}\,by\varphi''\right]zr\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ zr\,,\ \varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t yzr$$ $$(s=0,1,\ldots,h\ ;\ t=0,1,\ldots,n_s)$$

[31, VI]$_1$ $$\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + az\varphi'r\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ zr$$

[31, VI]$_2$ $$\varphi(x)p + y\varphi'q + \left[a\varphi' + \frac{1}{2}\,by\varphi''\right]zr\,,\ \psi(x\,,y)r\,,\ zr$$

[31, VII]$_1$ $$\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q\,,\ \varphi_0(x)r\,,\ \bar{\varphi}(x)zr$$

[31, VII]$_2$ $$\varphi(x)p + y\varphi'q\,,\ \varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t yr\,,\ \bar{\varphi}(x)zr$$ $$(s=0,1,\ldots,h\ ;\ t=0,1,\ldots,n_s)$$

[31, VIII]$_1$ $$\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q + az\varphi'r\,,\ \varphi_0(x)r\,,\ zr$$

[31 VIII]$_2$ $$\varphi(x)p + y\varphi'q + \left[a\varphi' + \frac{1}{2}\,by\varphi''\right]zr\,,\ \varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t yr\,,\ zr$$ $$(s=0,1,\ldots,h\ ;\ t=0,1,\ldots,n_s)$$

[31, IX] $$\varphi(x)p + [y\varphi' + cy^3\varphi''']q\,,\ r\,,\ zr$$

[32] Gruppo accorciato: $\varphi(x)p + y\varphi' q\,,\ yq$.

204. — Qui basterà manifestamente aggiungere una trasformazione infinitesima della forma

$$yq + \beta_1(x\,,y\,,z)r$$

ai gruppi corrispondenti al gruppo accorciato **[31]** (nn. 198-203) sotto l'ipotesi $c=0$; e ci limiteremo senz'altro ad enumerare i risultati.

[32]$_1$

$$\varphi(x)p+y\varphi'q+\frac{1}{2}ay\varphi''r\,,\;yq+zr$$

[32]$_2$

$$\varphi(x)p+y\varphi'q+\frac{1}{3!}y^2\varphi'''r\,,\;yq+2zr$$

[32, I]

$$\varphi(x)p+y\varphi'q\,,\;yq+czr\,,\;\psi(x,y)r$$

[32, II]$_1$

$$\varphi(x)p+y\varphi'q\,,\;yq+[cz+k]r\,,\;\varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
$$(s=0,1,\ldots,h\;;\;t=01n_s\;;\;ck=0)$$

[32, II]'$_1$

$$\varphi(x)p+y\varphi'q\,,\;yq+[cz+k\log^{n+1}y]r\,,\;\varphi_i(x)\log^i yr\,,$$
$$\varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
$$(i=0,1,\ldots,n\;;\;c=1,2,\ldots,h\;;\;t=0,1,\ldots,n_s)$$

[32, II]$_2$

$$\varphi(x)p+y\varphi'q+\frac{1}{2}ay\varphi''r\,,\;yq+zr\,,\;\varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
$$(s=0,1,\ldots,h\;;\;t=0,1,\ldots,\ldots,n_s)$$

[32, II]'$_2$

$$\varphi(x)p+y\varphi'q+\frac{1}{2}ay\varphi''r\,,\;yq+[z+k\log^{n+1}y]r\,,$$
$$\varphi_i(x)\log^i yr\,,\;\varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
$$(i=0,1,\ldots,n\;;\;s=0,1,\ldots,h\;;\;t=0,1,\ldots,n_s)$$

[32, II]$_3$

$$\varphi(x)p+y\varphi q+\frac{1}{3!}by^2\varphi'''r\,,\;yq+2zr\,,\;\varphi_{s\;t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
$$(s=0,1,\ldots,h,\;t=0,1,\ldots,n_s)$$

[32, II]'$_3$

$$\varphi(x)p+y\varphi'q+\frac{1}{3!}by^2\varphi'''r\,,\;yq+[2z+k\log^{n+1}y]r\,,$$
$$\varphi_i(x)\log^i yr\,,\;\varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t yr$$
$$(i=0,1,\ldots,n\;;\;s=0,1,\ldots,h\;;\;t=0,1,\ldots,n_s)$$

[32, II]$_4$

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi(x)p + y\varphi' q + \frac{1}{2} ay \log^{m+1} y\varphi'' r, \; yq + zr, \\ \varphi_j(x) y \log^j yr, \; \varphi_{s,t}(x) y^{c_s} \log^t yr \\ (j=0,1,\dots,m \; ; \; s=1,2,\dots,h \; ; \; t=0,1,\dots,n_s)\end{gathered}}$$

[32, II]$'_4$

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi(x)p + y\varphi' q + \frac{1}{2} ay \log^{m+1} y\varphi'' r, \; yq + [z + k \log^{n+1} y] r, \\ \varphi_i(x) \log^i yr, \; \bar{\varphi}_j(x) y \log^j yr, \; \varphi_{s,t}(x) y^{c_s} \log^t yr \\ (i=0,1,\dots,n \; ; \; j=0,1,\dots,m \; ; \; s=1,2,\dots,h \; ; \; t=0,1,\dots,n_s)\end{gathered}}$$

[32, II]$_5$

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi(x)p + y\varphi' q + \frac{1}{3!} by^2 \log^{m+1} y\varphi''' r, \; yq + 2zr, \\ \varphi_i(x) y^2 \log^i yr, \; \varphi_{s,t}(x) y^{c_s} \log^t yr \\ (i=0,1,\dots,m \; ; \; s=1,2,\dots,h \; ; \; t=0,1,\dots,n_s)\end{gathered}}$$

[32, II]$'_5$

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi(x)p + y\varphi' q + \frac{1}{3!} by^2 \log^{m+1} y\varphi''' r, \; yq + [2z + k \log^{n+1} y] r, \\ \varphi_j(x) \log^j yr, \; \varphi_i(x) y^2 \log^i yr, \; \varphi_{s,t}(x) y^{c_s} \log^t yr \\ (j=0,1,\dots,n \; ; \; i=0,1,\dots,m \; ; \; s=1,2,h \; ; \; t=0,1,n_s)\end{gathered}}$$

[32, III]$_1$

$$\boxed{\varphi(x)p + y\varphi' q, \; yq + czr, \; r}$$

[32, III]$_2$

$$\boxed{\varphi(x)p + y\varphi' q + \frac{1}{2} by\varphi'' r, \; yq + zr, \; r}$$

[32, III]$_3$

$$\boxed{\varphi(x)p + y\varphi' q + a\varphi' r, \; yq, \; r}$$

[32, IV]

$$\boxed{\varphi(x)p + y\varphi' q, \; yq, \; \psi_0(x, y) r, \; \psi_1(x, y) zr}$$

[32, V]

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi(x)p + y\varphi' q + a\varphi' zr, \; yq, \; \psi(x, y) r, \; zr, \; \varphi_{s,t}(x) y^{c_s} \log^t yr \\ (s=0,1,\dots,h \; ; \; t=0,1,\dots,r_s)\end{gathered}}$$

[32, VI] $$\varphi(x)p + y\varphi' q + a\varphi' zr \,,\; yq \,,\; \psi(x, y)r \,,\; zr$$

[32, VII] $$\varphi(x)p + y\varphi' q \,,\; yq \,,\; \varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t y r \,,\; \bar{\varphi}(x)zr$$
$$(s=0,1,\dots,h \;;\; t=0,1,\dots,n_s)$$

[32, VIII] $$\varphi(x)p + y\varphi' q + a\varphi' zr \,,\; yq \,,\; \varphi_{s,t}(x)y^{c_s}\log^t y r \,,\; zr$$
$$(s=0,1,\dots,h \;;\; t=0,1,\dots,n_s)$$

[32, IX] $$\varphi(x)p + y\varphi' q \,,\; yq \,,\; r \,,\; zr$$

[33] **Gruppo accorciato:** $\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q .$

205. — I *gruppi di prima specie* saranno della forma

$$\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + A(\varphi)r ,$$

dove A rappresenta una determinata forma differenziale lineare in φ.

Considerando al solito le tre trasformazioni infinitesime d'ordine inferiore al terzo

$$p + \dots \,,\; xp + yq + \dots \,,\; x^2p + [2xy + y^2]q + \dots$$

queste si possono sempre ridurre alla forma

a) $$p \,,\; xp + yq \,,\; x^2p + [2xy + y^2]q + yr$$

oppure alla forma

b) $$p \,,\; xp + yq \,,\; x^2p + [2xy + y^2]q .$$

Esaminando dapprima il caso a) e ponendo

$$A(\varphi) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \alpha_m(x, y, z)\varphi^{(m)}$$

avremo

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0 \;;\; \alpha_2 = y \;;$$

e la presenza della p implica la commutabilità di A e D_x, cioè l'indipendeza dei coefficienti α_m da x.

Inoltre combinando la $xp + yq$ con la $\varphi p + \dots$, troviamo (cfr. n. 198)

$$A' D_x(\varphi) = A(\varphi) + y D_y A(\varphi) \tag{86}$$

e quindi

$$\alpha_m = y^{m-1} \beta_m(z) \qquad (m = 3, 4, \dots, n) \tag{87}$$

dove le β_m non dipendono da x e y.

Inoltre dalla

$$\left(x^2 p + [2xy + y^2] q + yr, \varphi p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2 \varphi'' \right] q + A(\varphi) r \right) =$$

$$= [x^2\varphi' - 2x\varphi] p + [\dots] q + \left\{ x^2 D_x A(\varphi) + [2xy + y^2] D_y A(\varphi) + y D_z A(\varphi) - y\varphi' - \frac{1}{2} y^2 \varphi'' \right\} r$$

risulta, tenuto conto della (86)

$$A'' D_x(\varphi) = y^2 D_y A(\varphi) + 2A'(\varphi) + y D_z A(\varphi) - y\varphi' - \frac{1}{2} y^2 \varphi'' \tag{88}$$

e quindi, identificando i coefficienti,

$$(m-2)\, \alpha_{m+1} = y^2 \frac{\partial \alpha_m}{\partial y} + y \frac{\partial \alpha_m}{\partial z} \qquad (m = 3, 4, \dots, n) \tag{89}$$

ossia, per la (87),

$$(m-2) \beta_{m+1} = (m-1) \beta_m + \beta'_m \qquad (m = 3, 4, \dots, n) \tag{89'}$$

Infine dall' alternata

$$\left(x^3 p + [3x^2 y + 3xy^2] q + [3xy + \beta_3 y^2] r, \varphi p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2 \varphi'' \right] q + A(\varphi) r \right) =$$

$$= [x^3 \varphi' - 3x^2 \varphi] p + [\dots] q + \left\{ x^3 D_x A(\varphi) + [3x^2 y + 3xy^2] D_y A(\varphi) + \right.$$

$$\left. + [3xy + \beta_3 y^2] D_z A(\varphi) - [3x + 2\beta_3 y] \left[y\varphi' + \frac{1}{2} \varphi'' y^2 \right] - 3y\varphi \right\} r$$

ricaviamo, tenendo presenti le (86) (88), l'equazione funzionale

$$A''' D_x(\varphi) = 3A''(\varphi) + \beta_3 y^2 D_z A(\varphi) - 3y\varphi - 2\beta_3 y^2 \varphi' - \beta_3 y^3 \varphi'',$$

la quale implica

$$\alpha_4 = 2\beta_3 y^3, \quad \beta_3 \beta'_3 = 0 \tag{90}$$

e per $m > 3$ dà

$$(m-3)\, \alpha_{m+2} = \beta_3 y^2 \frac{\partial \alpha_m}{\partial z} \qquad (m = 4, 5, \dots, n). \tag{91}$$

Ma la (89) per $m = 3$ dà

$$\alpha_4 = 2\beta_3 y^3 + \beta'_3 y^3 ,$$

ossia in base alla prima delle (90)

$$\beta'_3 = 0 .$$

Posto $\beta_3 = b$, la (89) dà

$$\alpha_3 = by^2 , \ \alpha_4 = 2\,by^3 , \ \alpha_5 = 3\,by^4 ,$$

e dalla (91) discende

$$\alpha_6 = \alpha_7 = \dots = \alpha_n = 0 ,$$

talchè la A deve essere della forma

$$A(\varphi) = \frac{1}{2} y\varphi'' + \frac{1}{6} by^2\varphi''' + \frac{1}{12} by^3\varphi^{(IV)} + \frac{1}{40} by^4\varphi^{(V)} .$$

Ma combinando due trasf. inf. generiche si ottengono nel coefficiente di r due termini in y^5 che non possono scomparire se non è $b = 0$. Otteniamo quindi il gruppo del second' ordine

$$[33] \qquad \left| \varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + \frac{1}{2} y\varphi'' r \right|$$

206. — Resta da esaminare il caso b) del n. prec., cioè il caso, in cui il nostro gruppo contenga il sottogruppo

$$p , xp + yq , x^2p + (2xy + y^2) q .$$

Per la presenza delle prime due trasf. inf., varranno ancora le

$$(87) \qquad \alpha_m = y^{m-1} \beta_m(z) \qquad (m = 3 , 4 , \dots , n) ;$$

di più in base alla

$$\left(x^2p + [2xy + y^2] q , \varphi p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + A(\varphi) r \right) =$$

$$= [x^2\varphi' - 2x\varphi] p + [\dots] q + [x^2 D_x A(\varphi) + (2xy + y^2) D_y A(\varphi)] r$$

avremo

$$A'' D_x(\varphi) = y^2 D_y A(\varphi) + 2A'(\varphi)$$

ossia, per $m > 2$,

$$(m-2)\,\alpha_{m+1} = y^2 \frac{\partial \alpha_m}{\partial y} \qquad (m = 3, 4, \ldots, n), \tag{92}$$

e in particolare

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial y} = 0 .$$

Ma dalla (87) si ha in particolare

$$\alpha_n = y^{n-1}\beta_n(z)$$

cosicchè dobbiamo avere

$$\beta_n = 0$$

e allora, per via ricorrente, si conclude

$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} = \ldots = \alpha_3 = 0$$

e ricadiamo sul gruppo in due variabili [33].

207. — Passiamo ai *gruppi di seconda specie*, cioè ai gruppi della forma

$$\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + [zA(\varphi) + \zeta]\, r \,,\, \theta(x, y)\, r$$

dove A è una forma differenziale lineare a coefficienti indipendenti da z, e ζ e θ hanno il solito significato.

Anzitutto possiamo, per mezzo di una trasformazione della forma

$$z' = z\lambda(x, y) + \mu(x, y),$$

fare in modo che nel gruppo compaia la p e di più sia $A(x) = 0$: avremo così intanto che la A è a coefficienti indipendenti, oltre che da z, anche da x; e nel solito modo si trovano le tre equazioni funzionali

$$\begin{cases} A' D_x = y D_y A + A \\ A'' D_x = 2A' + y^2 D_y A - \alpha'_{\varphi} \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] \\ A''' D_x = 3A'' - 3a_2 y\varphi - 2a_3 y^2\varphi' - a_3 y^3\varphi'' \end{cases}$$

onde risulta anche qui

$$A(\varphi) = \frac{1}{2} a_2 y\varphi'' + \frac{1}{6} a_3 y^2\varphi''' + \frac{1}{12} a_3 y^3\varphi^{(IV)} + \frac{1}{40} a_3 y^4 \varphi^{(V)} .$$

Ma basta combinare due trasf. inf. generiche del gruppo per concluderne $a_3 = 0$; talchè, se θ è funzione arbitraria di x e y, otteniamo il gruppo

$$[33, I] \qquad \varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + \frac{1}{2} ayz\varphi'' r, \psi(x, y) r$$

208. — Passiamo al caso in cui la θ è definita da un sistema (S) di equazioni differenziali, e supponiamo dapprima che θ dipenda da infinite costanti arbitrarie.

Dalla alternata

$$\left(\varphi p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + \left[\frac{1}{2} ayz\varphi'' + \zeta \right] r, \theta(x, y) r \right) =$$
$$= \left[\varphi\theta_x + \left(y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right) \theta_y - \frac{1}{2} ay\varphi''\theta \right] r$$

risulta che l'insieme delle θ deve esser tale che ad esso appartenga, insieme con ogni determinazione particolare di θ, anche la

$$(93) \qquad \varphi\theta_x + \varphi' y \theta_y + \frac{1}{2} \varphi'' [y^2\theta_y - ay\theta],$$

qualunque sia la funzione $\varphi(x)$.

Sia

$$(94) \qquad F(\theta) = 0$$

una qualsiasi equazione del sistema (S). Essa, in quanto il gruppo contiene la p, sarà a coefficienti indipendenti da x, e inoltre sarà soddisfatta, per ogni determinazione di θ, dalla (93), talchè avremo

$$F\left(\varphi\theta_x + \varphi' y\theta_y + \frac{1}{2} \varphi'' [y^2\theta_y - ay\theta] \right) = 0 .$$

Sviluppando il primo membro di quest'equazione secondo la solita formola del D'Alembert, generalizzata dal Pincherle, e considerando i coefficienti di

$$y^2\varphi'', y^2\varphi''', y^2\varphi^{(IV)}, \ldots$$

i quali, per l'arbitrarietà della funzione φ, debbono singolarmente annullarsi, troviamo che ogni determinazione di θ deve pur soddisfare alle equazioni

$$F_{m,0} D_y(\theta) = 0 , \qquad (m = 1, 2, ..), \tag{95}$$

dove le $F_{m,0}$ sono le successive derivate funzionali parziali della forma F rispetto alla D_x. Poichè la F è una forma (d'ordine finito) la successione delle (95) avrà un termine; e l'ultima equazione (95) non identicamente nulla sarà della forma:

$$\sum_{l=1}^{h} \frac{1}{l!} \lambda_l(y) \frac{\partial^l \theta}{\partial y^l} = 0 , \tag{96}$$

cioè non conterrà nessuna derivazione rispetto ad x.

Poichè le (95) e in particolare la (96) debbono, in base a quanto si è veduto, essere contenute nel sistema (S) che definisce le θ, concludiamo che le θ saranno della forma

$$\mu_0(x) + \mu_1(x)\rho_1(y) + \mu_2(x)\rho_2(y) + \dots + \mu_{h-1}(x)\rho_{h-1}(y) \tag{97}$$

dove le ρ_i sono funzioni determinate, a meno di una sostituzione lineare, non omogenea; precisamente le

$$1 , \rho_1 , \rho_2 , \dots , \rho_{h-1}$$

debbono costituire un sistema fondamentale di soluzioni della (96), considerata come un'equazione differenziale (lineare) ordinaria in y. I coefficienti μ_i sono funzioni di x, ciascuna delle quali è variabile in un certo insieme lineare ad un numero di dimensioni infinito o finito (*) e a priori non si può escludere che fra codesti insiemi funzionali possano intercedere determinate corrispondenze lineari.

Per precisare la natura dell'insieme lineare delle θ è necessaria una discussione analoga a quella del n. 200.

Applicando la (93) alla (97) per $\varphi = 1$, x troviamo che dev'essere

$$\left.\begin{aligned} \mu'_0 + \sum_{i=1}^{h-1} \mu'_i \rho_i &= 0 \\ x\mu'_0 + \sum_{i=1}^{h-1} [x\mu'_i \rho_i + y \mu_i \rho'_i] &= 0, \end{aligned}\right\} \quad [\text{modd. } 1, \rho_1, \dots, \rho_{h-1}]$$

(*) Ben si comprende che qualcuno dei coefficienti μ_i può anche essere, per effetto delle altre equazioni di (S), identicamente nullo. Per evitare a priori questa eventualità basta considerare, fra le equazioni di (S) che hanno la forma (96), quella di ordine minimo.

onde si conclude senz'altro che le ρ_i sono della forma

$$y^{c_s} \log^t y \qquad (s=1,2,\dots,k\ ;\ t=0,1,\dots,n_t)$$

e avremo

$$\theta = \mu_0(x) + \sum_{s\,t} \mu_{st}(x) y^{c_s} \log^t y\,,$$

dove per le μ_{st} possono presentarsi gli stessi casi che pocanzi per le μ_i.

Tenendo ancora conto della (93), dovremo avere la congruenza

$$(98)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi\mu'_0 - \frac{1}{2} ay\varphi''\mu_0 + \sum_{s\,t} \Big\{ [\varphi\mu'_{st} + c_s\varphi'\mu_{st}] y^{c_s} \log^t y + \\ &+ t\varphi'\mu_{st} y^{c_s} \log^{t-1} y + \frac{1}{2} (c_s - a)\varphi''\mu_{st} y^{c_s+1} \log^t y + \\ &+ \frac{1}{2} t\varphi''\mu_{st} y^{c_s+1} \log^{t-1} y \Big\} \equiv 0 \end{aligned} \right. \qquad [\bmod.\ \theta];$$

dalla quale risulta che gli esponenti c_s debbono costituire una progressione aritmetica di differenza 1 e che se c_h è il maggiore esponente deve essere

$$a = c_h$$

e corrispondentemente deve mancare ogni termine logaritmico. Allora ponendo come al n. 200

$$z' = z\, y^{-c_h}$$

e indicando $-c_h$ con a, la trasf. inf. generica del gruppo diventa

$$\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + [az\varphi' + \zeta] r$$

e gli esponenti c_s assumeranno la forma

$$-n\,,\ -n+1\,,\ \dots\,,\ -2\,,\ -1\,,\ 0\,;$$

e dalla (98), siccome per l'esponente nullo mancano i termini logaritmici, risulta, ove si tenga conto del terzo termine della sommatoria, che debbono pur mancare i termini logaritmici relativi a tutti gli altri esponenti; cosicchè θ sarà della forma

$$\theta = \sum_{i=0}^{n} \mu_i(x) y^{-i}\,;$$

e la (98) diventerà

$$\sum_i \left\{ \varphi\mu'_i - (a+i)\varphi'\mu_i - \frac{1}{2}(i+1)\varphi''\mu_{i+1} \right\} y^{-i} \equiv 0 \qquad [\text{mod. } \theta]. \tag{98'}$$

In particolare si avrà

$$\left\{ \begin{aligned} \mu'_i &\equiv 0 \\ x\mu'_i - (a+i)\mu_i &\equiv 0 \\ x^2\mu'_i - 2(a+i)x\mu_i - (i+1)\mu_{i+1} &\equiv 0 \\ x^3\mu'_i - 3(a+i)x^2\mu_i - 3(i+1)x\mu_{i+1} &\equiv 0 \end{aligned} \right. \qquad [\text{mod. } \mu_i] \tag{99}$$

Dalle due prime congruenze risulta che se una μ_i è variabile in uno spazio ad un numero finito di dimensioni essa non può essere che un polinomio; e tale sarà allora anche ciascuna delle $\mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \dots, \mu_n$, come risulta dalla terza congruenza (cfr. il n. 200). Anzi da essa discende che, se m_i è il grado di μ_i, dev'essere

$$m_n - 2(a+n) = 0,$$

il che è contraddetto dalla quarta congruenza, per la quale dovrebbe essere

$$m_n - 3(a+n) = 0;$$

cosicchè si conclude che le μ_i sono altrettante funzioni arbitrarie; e resta solo da vedere se esse possano essere mutuamente legate da particolari corrispondenze.

Ma questa possibilità si esclude, ragionando in modo analogo a quello del n. 200. Se fra le μ_i intercedessero corrispondenze quali poco fa accennammo, esse sarebbero espresse da un sistema (S) di equazioni differenziali della forma

$$\sum_0^n F_i(\mu_i) = 0, \tag{100}$$

dove le F_i rappresentano altrettante forme differenziali lineari a coefficienti indipendenti non solo da y e z, ma anche da x, come risulta dalla prima delle (99).

Ora per la seconda delle (99), insieme con l'equazione (100) deve sussistere anche la

$$\sum_0^n F_i(x\mu'_i - i\mu_i) = 0$$

ossia, come risulta sviluppando il primo membro,

$$\sum_0^n \left\{ F'_i(\mu'_i) - i F_i(\mu_i) \right\} = 0 . \tag{101}$$

Posto

$$F_i(\mu_i) = \sum_j \frac{1}{j!} a_{ij} \mu_i^{(j)}$$

la (101) diventa

$$\sum_{i,j} \frac{1}{j!} (i-j) a_{i.j} \mu_i^{(j)} = 0 ; \tag{102}$$

e basta iterare il passaggio dalla (100) alla (101) per concludere che la (102) si spezza in tante equazioni, quanti sono in essa i gruppi di termini in cui è costante la differenza $i-j$. In altre parole le equazioni del sistema (S) debbono esser tutte riducibili alla forma

$$\sum_i \frac{1}{(i+k)!} a'_{i.k} \mu_i^{(i+k)} = 0 \tag{103}$$

dove k è un intero che può variare soltanto da equazione a equazione.

Ma per la terza delle congruenze (99), il sistema (S) deve contenere, accanto a ciascuna equazione (100), anche la

$$\sum_i \left\{ F''_i(\mu'_i) - 2(a+i) F'_i(\mu_i) - (i+1) F_i(\mu_{i+1}) \right\} = 0 ;$$

e quindi, accanto alla (103), la

$$\sum_i \frac{1}{(i+k-1)!} [2a+i+1-k] a'_{ik} \mu_i^{(i+k-1)} + \sum_i \frac{1}{(i+k)!} [i+1] a_{ik} \mu_{i+1}^{(i+k)} = 0 ,$$

la quale per l'osservazione di pocanzi si spezza in due e dà luogo in particolare all'equazione

$$\sum_i \frac{1}{(i+k-1)!} [2a+i+1-k] a'_{ik} \mu_i^{(i+k-1)} = 0 , \tag{104}$$

che è di ordine inferiore alla (103). Se la (103) è una delle equazioni d'ordine minimo del sistema (S), la (104) deve ridursi ad un'identità, talchè dovremo avere

$$(2a+i+1-k) a'_{ik} = 0 \qquad (i = 0, 1, \dots, n) ,$$

e poichè k è costante e varia soltanto i, dovranno esser nulli tutti

gli a'_{ik}, tranne uno al più. Ma se veramente un a'_{ik} fosse diverso da zero il sistema (S) conterrebbe un'equazione della forma

$$\frac{d^s \mu_i}{dx^s} = 0\,,$$

il che è impossibile in quanto, come si è visto dianzi, ciascuna μ_i è in sè arbitraria.

Concludiamo quindi che la (103) stessa deve ridursi ad una identità e le μ_i sono fra loro indipendenti, cosicchè abbiamo un gruppo della forma

$$\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + [az\varphi' + \zeta] r\,,\ \varphi_i(x) y^{-i} r \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Calcolando nel solito modo le trasf. inf. d'ordine inferiori al 4°, si trova nel caso generale il gruppo

$$[33, \mathrm{II}]_1 \qquad \boxed{\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + \left[az\varphi' + \frac{1}{2} b\varphi'' y^{a+1} \right] r\,,\ \varphi_i(x)^{-i} r \quad (i = 0, 1, \dots, n)}$$

e se a è uguale a -3

$$[33, \mathrm{II}]_2 \qquad \boxed{\begin{gathered} \varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + \\ + \left[\frac{1}{2} by^{-2}\varphi'' + \frac{1}{3!} b_1 y^{-1}\varphi''' - 3z\varphi' \right] r\,,\ \varphi_0(x) r \end{gathered}}$$

Se poi abbiamo

$$a = -(s+1)$$

dove s è un'intero compreso fra 0 ed n (compresi gli estremi) troviamo le trasf. inf.

$$\begin{gathered} x^2p + [2xy + y^2]q + [ay^{-s}\log y - 2(s+1)xz]r\,, \\ x^3p + [3x^2y + 3xy^2]q + [3axy^{-s}\log y - 3(s+1)x^2z]r\,, \end{gathered}$$

le quali combinate iteratamente danno luogo al gruppo

$$[33, \mathrm{II}]_3 \qquad \boxed{\begin{gathered} \varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + \\ + \left[\frac{1}{2} a\,\varphi'' y^{-s} \log y - (s+1)\varphi' z \right] r\,,\ \varphi_i(x) y^{-i} r \\ (i = 0, 1, 2, \dots, n \geq s) \end{gathered}}$$

209. — Resta infine il caso, in cui la θ ammette un numero finito di determinazioni linearmente indipendenti. In tal caso si trova agevolmente, tenendo conto della (93), che la θ deve ammettere l'unica determinazione $\theta = 1$, e di qui risulta immediatamente $a = 0$, cosicchè risulta un gruppo della forma

$$\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + \zeta r \,,\, r \,;$$

e basta calcolare la ζ per le solite trasf. inf. d'ordine inferiore al quarto per trovare, alternando iteratamente, il gruppo

[33, III] $$\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + \left[a\varphi' + \frac{1}{2} by\varphi'' \right] r \,,\, r$$

210. — Il gruppo [33, III] fornisce senz'altro il gruppo generatore dei *gruppi di terza specie*, i quali saranno dati da:

[33, IV] $$\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q \,,\, \psi_0(x, y)r \,,\, \psi_1(x, y)zr$$

[33, V] $$\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + \frac{1}{2} byz\varphi'' r \,,\, \psi(x, y)r \,,\, \varphi_i(x)y^{-i}zr \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

[33, VI] $$\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + \left[a\varphi' + \frac{1}{2} y\varphi'' \right] zr \,,\, \psi(x, y)r \,,\, zr$$

[33, VII] $$\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q \,,\, \varphi_0(x)r \,,\, \varphi_1(x)zr$$

[33, VIII] $$\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q + az\varphi' r \,,\, \varphi_0(x)r \,,\, zr$$

[33, IX] $$\varphi(x)p + \left[y\varphi' + \frac{1}{2} y^2\varphi'' \right] q \,,\, r \,,\, zr$$

INDICE

SERIE III, VOL. X (Sezione Scienze).

PARTE PRIMA.

Gruppi che ammettono una schiera invariante di ∞^1 superficie.

SERIE III, VOL. X (Supplemento).

PARTE SECONDA.

Gruppi che ammettono una schiera invariante di ∞^2 curve.

ERRATA-CORRIGE

INDICAZIONI	ERRATA	CORRIGE
Pag. 117, linea 28	$\mu_{s,t}$	$\mu_{s,t}$ sia una funzione arbitraria indipendente,
» 121, » 2	$x^2p + 2xyq + a\log^{n+1} yr$	$x^2p + 2xyq + ay\log^{n+1} yr$
» » » 5	$x^2p + 2xyq + [ax + b\log^{n+1} y]r$	$x^2p + 2xyq + [ax + by\log^{n+1} y]r$
» 137, » 18	$q, xq, \ldots, x^sq$	$x^iq + \frac{i}{i+1} ax^{i+1}r \; (i=0,1,\ldots,s)$.

OSSERVAZIONI INTORNO ALLE PROPRIETÀ MORFOLOGICHE

DEL VIRUS DEL TIFO ESSUDATIVO

NOTA I. (*)

del socio Prof. ARNALDO MAGGIORA e del Dott. GIULIO GAROFANI
DIRETTORE AIUTO
DELL' ISTITUTO DI IGIENE DELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

Nell' ultima riunione della Società italiana di Patologia, tenutasi in Modena, nel Settembre dell' anno 1909, noi dimostrammo alcuni preparati di cervello di oche, morte per la forma nervosa acuta del tifo essudativo o peste dei gallinacei (1). Il benevolo accoglimento che quella dimostrazione ebbe per parte degli illustri cultori delle discipline patologiche, convenuti nella detta riunione, ci ha spinti a riferire anche oggi brevemente a questa insigne Accademia su lo stesso argomento, col sussidio di qualche maggior particolare e di qualche nuova indagine e nell' intendimento di pubblicare alcuni fedeli disegni dei nostri preparati.

* * *

È noto che talune proprietà biologiche del virus del tifo essudativo — come la sua tendenza a localizzarsi nel sistema nervoso, dimostrata per i primi da A. Maggiora e G. L. Valenti (2) e da F. K. Kleine (3) e successivamente da altri confermata, il suo passare attraverso taluni filtri atti a trattenere i batteri, il suo modo di

(*) Comunicata alla R. Accademia nell' adunanza del 29 giugno 1910.

(1) A. Maggiora e G. Garofani. *Di un notevole reperto microscopico riscontrato nel tifo essudativo.* « Atti della Società Italiana di Patologia », VI Riunione, Modena Società tipografica modenese 1909, pag. 143.

(2) Comunicazione fatta alla R. Accad. di Scienze, Lettere ed Arti di Modena nella adunanza del 27 giugno 1905. *Memorie della R. Accademia*, Serie III Vol. VI, pag. XXXII.

(3) F. K. Kleine, *Neue Beobachtungen zur Hühnerpest,* « Zeitschrift. f. Hygiene », Bd LI, 1905, p. 177.

comportarsi di fronte a sostanze, le quali, come la ricina, l'abrina, la saponina (Russ (1), Landsteiner (2)) in date concentrazioni, sono capaci di determinare rapidamente la morte dei protozoi e non dei batteri, ecc. — depongono a favore della natura protozoaria di questo virus. Ma su la sua struttura morfologica, sebbene siano stati pubblicati importanti lavori, si hanno tuttavia cognizioni alquanto incerte ed incomplete; nè la cosa deve recare meraviglia, ove si pensi alle gravi difficoltà di vario genere inerenti a questo studio.

Nel 1905 F. K. Kleine (3), esaminando sezioni di cervello di oche morte della forma nervosa di questa malattia, vi scorse dei corpiccioli rotondi, a contorno ben delineato, di grossezza varia come quella dei nuclei delle cellule nervose, i quali col metodo del Mann si coloravano dal rosso al rosso-violetto, e che, a suo avviso, presentavano una certa analogia con i corpi del Negri. Detti corpi si riscontravano per lo più nelle cellule nervose, ma anche fuori di queste. Il Kleine aggiunge che forse si tratta di nuclei di cellule, che, in causa dei processi patologici subìti, avevano perduto le loro normali proprietà d'assumere le colorazioni.

Nel 1906 W. Rosenthal (4) esaminando il cervello di polli inoculati con virus attenuato del tifo essudativo e morti della forma nervosa, dopo un periodo di incubazione di più giorni ed un decorso prolungato della malattia, vi riscontrò notevoli alterazioni e segnatamente accumuli perivascolari, disposti a focolai, di cellule rotonde e polimorfe, per lo più a grosso nucleo formato da un fine reticolo di cromatina, che interpretò come una infiltrazione degli spazi linfatici che circondano le vene ed i capillari.

In questi focolai osservò, nell'interno delle cellule, dei corpiccioli, che, con le sostanze coloranti nucleari si colorano intensamente e in ispecie con la colorazione alla safranina ed all'acido picrico e successiva energica decolorazione, restano quasi soli colorati. Essi sono di differente grandezza, dal diametro di circa 3 μ, corrispondente al

(1) V. Russ, *Beobachtungen über das Virus der Hühnerpest.* « Archiv f. Hygiene », Bd LI, 1906, p. 286.

(2) K. Landsteiner, *Beobachtungen über das Virus der Hühnerpest.* « Centralbl. f. Bakter ». Bd. XXXVIII, Orig. 1906, p. 540.

(3) *L. cit.*, p. 182.

(4) W. Rosenthal, *Ueber Beziehungen zwischen Hühnerpest und Lyssa.* « Centralbl. f. Bakter ». Bd. XL, Orig. 1906, p. 204.

diametro trasverso del nucleo di un eritrocito di pollo, e anche molto più piccoli, sino ad essere appena riconoscibili; in quest'ultimo caso si scorgono gli uni vicini agli altri in maggior numero: tutti hanno un contorno ben delineato, netto e liscio, per lo più sono quasi regolarmente rotondi, ma fra i più grandi ve ne sono anche di quelli in forma di semiluna. Questi corpuscoli, secondo il Rosenthal, si possono considerare come nuclei alterati in picnosi ed in disfacimento, parecchi anzi non si differenziano dalle sezioni trasverse dei nuclei degli eritrociti oppure dai grossi nucleoli contenuti nei nuclei, altrimenti scoloriti, delle cellule endoteliali e della nevroglia; ma non è da escludere che in parte possano essere dei nuclei di protozoî.

Pure nel 1906, Schiffmann (1), nel cervello di oche morte per infezione prodotta con l'inoculazione intramuscolare d'emulsione di cervello d'uccelli morti per tifo essudativo, riscontrò, in seguito a fissazione in alcool ed in liquido di Zenker, la presenza di particolari corpuscoli, che descrive di forma ovoide e contorno ben delineato, delle dimensioni di 15-20 μ, formati d'una sostanza omogenea, ialina, che col triacido di Ehrlich appare di un rosso brillante, e col metodo di Mann si colora dal rosso al violetto. Nell'interno di queste formazioni, che presentano un contorno ben delineato, si scorgono dei minuti corpiccioli arrotondati od anelli, i quali ora sono in numero di uno, ora di più ed in questo caso disposti a catena od a rosetta; essi sono molto delicati e col metodo di Pappenheim si colorano in azzurro scuro.

Questi corpi si riscontrano nelle cellule nervose, nelle quali allora solo in pochi casi si riesce a vedere il nucleo; molte volte sono liberi nel tessuto del cervello e talvolta negli accumuli cellulari, che qua e là circondano molti vasi. Nel cervelletto e nel midollo spinale Schiffmann non ne ebbe a riscontrare. Del pari tali corpi mancano nell'oca normale.

In un successivo lavoro, pubblicato nel 1908 (2), nel quale studiò diligentemente l'istologia patologica della peste aviaria, lo

(1) J. Schiffmann, *Zur Histologie der Hünherpest*, « Wiener Klin. Wochenschrift ». XIX Iahrgang 1906 p. 1347 riassunto in « Centralbl. f. Bakter. Referate ». Bd. XL, 1907, pag. 801.

(2) J. Schiffmann, *Zur Histologie der Hühmerpest*, « Centralbl. f. Bakter Orig. » Bd. XLV 1908, pag. 293.

Schiffmann descrisse con maggiori particolari i corpuscoli di che sopra.

Egli si servì, fra altri metodi di colorazione, specialmente di quello alla pironina ed al verde di metile insieme uniti nella proporzione di 1 gr. per ciascuno su 100 di acqua di condotta, applicando la colorazione per non meno di 10 minuti col liquido non filtrato, successivo rapido lavaggio in alcool e rischiaramento in xilolo.

Primieramente lo Schiffmann praticò le sue indagini sul sistema nervoso centrale di oche morte in seguito alla inoculazione intramuscolare del virus.

Per ciò che si riferisce alla descrizione dei corpuscoli, confermando ed ampliando quanto aveva precedentemente osservato, egli rilevò che la loro forma è ora ovale, ora rotonda, ora poligonale; prevale però la forma ovale. La loro grandezza raggiunge di rado 20 μ, in media è di 8-12 μ. Nell'interno della loro massa omogenea, ialina, si scorgono i già descritti minuti corpiccioli di cui la forma più semplice è un punto, che, colla colorazione alla pironina ed al verde di metile, risulta colorato in azzurro scuro; una seconda forma è quella anulare. Il diametro degli anelli è per lo più di 1-2 μ; la loro forma non è sempre esattamente rotonda, ma spesso è ovale oppure schiacciata a mo' di pera; il contorno non è egualmente sottile ma in alcuni punti appare come ispessito e qua e là si scorgono come delle piccolissime granulazioni. Spesso si hanno in uno stesso corpo parecchi di questi anelli diversamente disposti e si riscontrano anche forme a rosetta, specialmente nei corpuscoli più grossi.

Questi corpuscoli, dice lo Schiffmann, sono affatto diversi dai nuclei delle cellule nervose normali, sia per il modo di comportarsi di fronte alle sostanze coloranti, sia dal punto di vista morfologico. Una certa somiglianza superficiale si riscontra fra i piccoli corpiccioli contenenti semplici anelli ed i nuclei cellulari verosimilmente appartenenti alle cellule della nevroglia, che nella loro sostanza si colorano profondamente in violetto e presentano uno o due nucleoli in forma di anello o di punto. Tuttavia, osservando attentamente, si scorgono notevoli differenze. La massa fondamentale dei corpuscoli è omogenea, quella dei nuclei delle cellule finamente granulosa ed anche per ciò che si riferisce alla forma vi è qualche differenza; i minuti corpiccioli o formazioni interne dei corpuscoli in discorso non hanno sempre contorno perfettamente rotondo, mentre i nucleoli sono rotondi

e regolari. Per contro i corpuscoli più grandi con le loro formazioni interne più complicate non si possono scambiare con questi nuclei cellulari.

Quanto alla sede dei corpuscoli lo Schiffmann li riscontrò nel cervello, corteccia e nuclei centrali, e questa volta anche nel cervelletto e nel midollo allungato. Nel midollo spinale non li potè peranco osservare nei due casi nei quali portò la sua attenzione anche su questo organo. La loro distribuzione nelle sezioni, non è regolare ma per focolai. Nel cervello li trovò in maggior numero nella porzione orbitale; nel cervelletto li riscontrò più radi nello strato granuloso, più frequenti nelle cellule di Purkinje e più numerosi sopratutto nelle parti povere di cellule nervose.

Nel midollo allungato non rilevò alcuna speciale localizzazione.

Anch' egli osservò, al pari di Rosenthal, un certo rapporto, se non del tutto costante, fra le alterazioni vasali e la presenza dei corpuscoli, inquantochè questi sono, in prossimità di dette alterazioni, talvolta straordinariamente numerosi. Diguisachè nei preparati nei quali detti corpuscoli non erano numerosi, spesso bastava osservare a debole ingrandimento un vaso circondato da un focolaio di infiltrazione cellulare per ivi trovare, nello stesso punto, con sicurezza, a forte ingrandimento, i caratteristici corpuscoli.

Per ciò che si riferisce alla posizione dei corpuscoli in rapporto con le cellule nervose, reperti abbastanza convincenti, relativi al cervelletto e al midollo allungato, mostrarono che una parte dei corpuscoli, nel cervelletto, si trova nel protoplasma delle cellule ganglionari ed anche in quello delle cellule di Purkinje, e che una parte, tanto in quest' organo quanto nel midollo allungato, si trova libera nel tessuto. Notevole era il fatto che nei casi di sicura inclusione intracellulare dei corpuscoli il protoplasma delle cellule ganglionari non appariva evidentemente alterato, che in prossimità del corpuscolo non si riscontrava la presenza del nucleo o di resti del nucleo e che in ogni cellula sempre si trovava un solo corpuscolo. Osservò inoltre che i corpuscoli situati nelle cellule erano più resistenti alla decolorazione con alcool che quelli extracellulari.

Oltre a questi corpuscoli, che sono senza dubbio collocati rispettivamente nell' interno delle cellule o al di fuori di esse, Schiffmann vide un gran numero di altri corpiccioli i quali sembrano aderire ad una massa protoplasmatica, ma in modo che non

si può ben stabilire se essi siano liberi nel tessuto o in un protoplasma degenerato ed in via di disfacimento.

In un'altra serie di esperimenti, fatti allo scopo di studiare la genesi di questi corpuscoli, lo Schiffmann esaminò il sistema nervoso di alcune oche inoculate fra i muscoli (con virus tolto da polli) ed uccise rispettivamente dopo 54, 72, 96, 120, 144 ore e di una uccisa dopo 10 giorni di malattia. Nè il sistema nervoso nè il sangue di quest'ultima risultarono virulenti, e all'esame istologico non si riscontrò nessuna lesione del cervello.

Il sangue delle oche sacrificate rispettivamente dopo 54, 72, 96 ore risultò infettante, non così il loro cervello, nel quale lo Schiffmann non potè riscontrare alcuna alterazione istologica, nè corpuscoli, nè focolai d'infiltrazione cellulare attorno ai vasi. Per contro nelle oche uccise dopo 120 e 144 ore, il cui cervello, iniettato in emulsione fra i muscoli, risultò infettante per i polli, potè riconoscere lesioni istologiche del sistema nervoso centrale.

Già a debole ingrandimento si scorgevano nel cervello e nel cervelletto evidenti infiltrazioni cellulari attorno a parecchi vasi e specialmente attorno ai capillari. In questi ammassi di cellule colpiscono specialmente dei corpiccioli di forma per lo più rotonda e prevalentemente del diametro di 5-6 μ, sebbene non ne manchino dei più grossi e dei più piccoli. Essi con la pironina ed il verde di metile si colorano in rosso chiaro, talvolta con una leggiera intonazione violetta e ciò in modo perfettamente uniforme e senza granulazioni. La colorazione è generalmente assai debole. In questo fondo rosso-chiaro risaltano talvolta dei punti di diversa grossezza, bene delineati, a contorni netti, intensamente colorati in azzurro scuro. Di essi alcuni hanno la grossezza di un nucleo di eritrocito e stanno solo in numero di uno o due nella massa colorata in rosso, la quale, in questo caso, spesso appare solo in forma di un piccolo orlo debolmente colorato in rosso pallido attorno al punto azzurro, e, allorquando la colorazione è insufficiente, non si riesce a determinare. Altre volte i punti sono molto più piccoli e si trovano in parecchi o ai margini, o alla periferia, o nel mezzo della massa rossa, che in questi casi si vede chiaramente.

La forma dei punti azzurri è per lo più rotonda, ma si hanno pure delle forme semilunari, molto raramente delle forme anulari. Questi anelli diversificano dalle formazioni interne dei corpuscoli più

sviluppati, descritti di sopra, perchè più ampî. I punti si differenziano dalle sezioni dei nuclei dei corpuscoli rossi per il loro colore oscuro, per la mancanza di struttura, che, nelle sezioni dei nuclei, allorquando la colorazione è riuscita, appare sempre evidente, inoltre perchè il protoplasma dei corpuscoli rossi col miscuglio di pironina e verde di metile non si colora.

Le dette formazioni si trovano in grande numero negli accumuli cellulari e, in vicinanza di questi, si possono anche trovare nel tessuto cerebrale normale; a notevole distanza dai vasi colpiti lo Schiffmann li riscontrò solo di rado.

Probabilmente questi corpiccioli sono gli stessi che il Rosenthal trovò nelle sezioni di cervello di polli morti in seguito a decorso prolungato della malattia, e dei quali fu detto di sopra.

J. Schiffmann ripetè questi esperimenti su oche giovani venute a morte in seguito all'iniezione intramuscolare e trovò, oltre ai corpuscoli descritti da prima, anche quelli riscontrati nelle oche uccise dopo 120 e 144 ore di malattia. Questi ultimi erano però in numero minore che non nelle dette oche uccise, ed anche relativamente ai corpuscoli più sviluppati erano in numero minore.

Esaminò poi ancora il sistema nervoso centrale di un' oca la quale, sette giorni dopo l'iniezione intramuscolare di virus della peste aviaria, manifestò gravi sintomi come cecità e paralisi, poscia si ristabilì ed al 14.° giorno dopo l'infezione, quando non manifestava più fenomeni patologici, venne uccisa per dissanguamento.

L'emulsione del cervello di quest'oca, iniettata fra i muscoli di un pollo, non risultò virulenta. Il cervello di quest'oca presentò gravi lesioni patologiche come accumuli cellulari attorno ai vasi, simili a quelli riscontrati negli animali morti di peste aviaria e poi altri focolai cellulari molto più notevoli, nei quali non sempre si poteva scorgere con sicurezza un vaso centrale e che si estendevano a più grosse porzioni del cervello.

Dai vasi infiltrati della pia si dipartono qua e là, in forma radiata, delle briglie di un tessuto a larghe maglie simile al giovane tessuto di nevroglia, le quali si protendono nel tessuto nervoso cerebrale.

In queste briglie si scorgono sia dei capillari circondati da cellule, sia delle formazioni rotonde grosse quanto una cellula nervosa, regolarmente e finamente granulose nelle quali qua e là si

possono trovare ancora i resti del nucleo e che evidentemente sembrano essere delle cellule nervose degenerate. Non potè riscontrare nè corpi specifici, nè corpi con le formazioni puntiformi interne.

Nelle oche adulte, morte in seguito ad inoculazioni sottodurale del virus e nelle quali il decorso della malattia risultò di soli 3-4 giorni, le alterazioni istologiche nel cervello sono molto limitate; più spesso mancano affatto gli accumuli cellulari ed i corpuscoli attorno ai vasi; in alcuni casi si riscontrano solo i primi principi di accumuli cellulari intorno ai vasi e qualche rarissimo corpuscolo piccolo e con formazione interna per lo più puntiforme od anulare.

Infine lo Schiffmann portò la sua attenzione su di una serie di polli morti dopo 3-4 giorni dall'iniezione intramuscolare del virus. In questi osservò, quasi senza eccezione, alterazioni patologiche nel sistema nervoso centrale; in un certo numero di essi riscontrò dei focolai cellulari come nelle oche morte di peste e alterazioni che ritenne, di natura necrotica.

Per lo studio di queste alterazioni il metodo di colorazione con la pironina ed il verde di metile non è ben adatto perchè il fondo si colora in un tono soverchiamente pallido. Danno migliore risultato la colorazione con l'emallume e l'eosina ed anche il metodo di Mann.

Già a debole ingrandimento si vedono dei punti abbastanza circoscritti i quali appaiono meno colorati del contorno; a forte ingrandimento il tessuto in questi punti appare alterato per zone e, contrariamente a quanto si scorge nelle zone vicine in cui le cellule sono ben conservate, quivi le cellule sono evidentemente alterate. In mezzo a queste zone alterate si scorgono numerosi granuli intensamente colorati con le sostanze coloranti nucleari e di diversa grossezza, cioè quanto un nucleo di eritrocito ed anche meno, i quali sono liberi nel tessuto e si possono ritenere come prodotto di distruzione nucleare.

Lo Schiffmann rileva che questi reperti, necrosi e granuli liberi, si differenziano da quelli di Rosenthal, il quale non riscontrò necrosi ma focolai cellulari con corpiccioli posti nell'interno delle cellule. D'altra parte il virus impiegato da Schiffmann, come egli osserva, era assai più virulento e ciò spiega la quasi completa mancanza di reazione attorno a questi focolai. Le necrosi si riscontrano prevalentemente nel cervello; in una serie di sezioni del cervelletto gli

occorse solo una volta di trovare un focolaio necrotico nello strato granuloso.

In questi polli, morti dopo tre o quattro giorni, non potè osservare nè i grossi corpuscoli, nè quelli più piccoli con formazioni puntiformi interne sopradescritte. Solo in un pollo, che era stato ucciso in capo a 48^h dall'iniezione, notò alterazioni attorno ai vasi, in forma di focolai, che erano lo stato prodromico, per così dire, di una necrosi, mentre il cervello di un pollo, ucciso 24^h dopo l'iniezione, non presentò veruna alterazione.

Riassumendo i fatti principali che emergono dalle interessanti ricerche del Dott. Schiffmann sul sistema nervoso centrale degli animali morti di peste aviaria od uccisi nel corso della malattia, si hanno:

1.° Corpuscoli a completo sviluppo, contenenti anelli, rosette, ecc.

2.° Focolai d'infiltrazione cellulare e con questi anche i corpuscoli con formazioni interne puntiformi che lo Schiffmann riterrebbe come forme più giovani dei precedenti corpuscoli.

3.° Focolai necrotici.

Accanto a queste lesioni si hanno tuttavia anche reperti negativi, vale a dire animali i quali non presentano apprezzabili alterazioni nel sistema nervoso centrale.

I corpuscoli della peste si trovano in grande quantità solamente nelle giovani oche infettate per la via intramuscolare, in quantità straordinariamente piccola nelle oche adulte infettate per la via subdurale ed in queste possono anche mancare del tutto. Le necrosi si trovano quasi costantemente nei polli trattati con l'iniezione intramuscolare e morti dopo tre o quattro giorni. In essi lo Schiffmann non riscontrò nessun corpuscolo della peste.

I focolai cellulari si riscontrano nei polli e nelle oche infettate per la via muscolare. In assai scarsa misura si riscontrano nelle oche adulte iniettate per la via subdurale; in queste possono anche mancare del tutto.

Corpuscoli con formazioni puntiformi interne vennero riscontrati in oche uccise dopo 120-144 ore di malattia e che erano state iniettate per la via intramuscolare.

Le necrosi si possono forse fino ad un certo punto spiegare col decorso rapido della malattia nei polli dovuto alla grande virulenza

che per questi animali presenta il virus; deve però osservarsi che nelle oche iniettate sotto la dura e morte dopo tre o quattro giorni di malattia non si riscontrarono focolai necrotici.

Pure nel medesimo anno 1908, S. von Prowazek (1) pubblicò il risultato di una serie di indagini da lui fatte sul cervello di polli morti di tifo essudativo, in seguito all'iniezione di un virus che ne determinava la morte per lo più in due giorni.

Nelle sezioni del cervello non riscontrò i corpuscoli specifici di Kleine e Schiffmann; osservò solamente le alterazioni perivascolari rilevate da Rosenthal e Schiffmann, inoltre vide nelle cellule gangliouari numerosi canalicoli di Holmgren, notevolmente sviluppati, il quale fatto egli ritiene stia in rapporto con la speciale sonnolenza degli animali nel secondo giorno dell'infezione. Per contro nei preparati per impressione del cervello anteriore e del cervelletto, colorati secondo Giemsa, ritrovò in ogni caso, dopo più o meno lunga ricerca, dei corpiccioli ovali o rotondi della grossezza di di 1 — 1,5 μ, ben delineati, talvolta in più punti leggermente depressi, ora isolati ora in piccoli ammassi, i quali si coloravano in rosa giallognolo e nell'interno ospitano un corpicciolo rotondo o oblungo simile ad un batterio e di color rosso scuro. Questi corpuscoli si presentano talvolta in forma di manubrio e secondo il Prowazek si moltiplicano per semplice scissione. Molte volte il corpicciolo interno presenta un appendice simile ad una gemma, talvolta nei preparati per impressione i corpuscoli aderiscono ai globuli del sangue.

Inoltre nei preparati vide pure delle grosse cellule di natura endoteliale con inclusioni fortemente colorabili.

*
* *

Abbiamo creduto opportuno di dare un largo riassunto degli interessanti lavori degli autori sopra indicati, perchè bene emerga la differenza dei risultati dai medesimi ottenuti in confronto con quelli che noi esponiamo.

Noi praticammo indagini per riscontrare la presenza dei corpi di Schiffmann e di quelli del Prowazek nel sistema nervoso degli

(1) S. Prowazek, *Zur Aetiologie der Hühnerpest.* « Münch. Mediz. Wochenschr » 1908. I, Hälfte, S. 165.

animali morti di tifo essudativo, e se non siamo riusciti a porre in evidenza i corpuscoli più grandi dello Schiffmann contenenti anelli, rosette, ecc., abbiamo tuttavia ripetutamente riscontrato i corpuscoli con formazioni interne puntiformi dal medesimo descritti e i corpuscoli del Prowazek.

Abbiamo pure rilevato la presenza di focolai di infiltrazione cellulare e le altre alterazioni anatomo-patologiche diligentemente descritte da Schiffmann.

Ma su la specificità dei corpuscoli con formazione interna puntiforme, ecc. di Schiffmann e rispettivamente dei corpuscoli di Prowazek noi non ci esprimiamo per ora, poichè non è di questa parte delle nostre ricerche che intendiamo occuparci nella presente nota, bensì degli esperimenti, di che in appresso.

*
* *

Quattro oche dell'età di circa sette mesi e della stessa covata, furono da noi inoculate fra i muscoli del petto con virus di tifo essudativo (sangue di pollo) a virulenza completa, capace, vale a dire, di uccidere un pollo in 30-40 ore.

Di esse una, dopo alcuni giorni di malattia con sintomi prevalentemente tifoidei, si riebbe e guarì completamente, risultando poscia immunizzata di fronte all'iniezione di maggiori quantità di virus; una seconda, dopo aver presentato la forma nervosa acuta, tipica della malattia passò allo stato nervoso cronico ed ancor oggi, dopo oltre 18 mesi, è viva.

Le altre due, colpite pure dalla forma nervosa, in capo a cinque giorni e mezzo dall'inoculazione morirono. Con il cervello di questi due animali furono fatti numerosi preparati, fra i quali presentarono particolare interesse quelli per impressione o per schiacciamento.

Piccole quantità della polpa tagliata in varii punti della massa cerebrale erano riportate sopra i vetrini e fatte strisciare sopra di essi; oppure si sezionavano le varie parti dell'encefalo e con queste sezioni nette si facevano impressioni ripetute in tutta la superficie dei porta-oggetti od in parte di quella dei copri-oggetti. Questi preparati venivano tosto, prima cioè che avessero subito un notevole essiccamento, fissati in alcool assoluto per 2'-3' oppure nel miscuglio

di alcool ed etere per altrettanto tempo, colorati con una soluzione di pironina e verde di metile Grübler ana gr. 0,50-0,75 in 100 gr. di acqua di pozzo sterilizzata per 10'-15', sottoposti quindi a lavaggio in acqua, disidratazione in alcool assoluto, trattamento allo xilolo e successiva fissazione in balsamo.

Nella polpa cerebrale così trattata, si riscontrarono, per lo più in prossimità dei vasi, ma al di fuori di questi, talvolta anche libere nel tessuto, delle capsule parassitarie, di forma rotonda od ovoide, ricolme di sporozoiti (Tavola 1).

Le capsule, a parete molto sottile e delicata, ma chiaramente visibile ove si osservi con l'apocromatico 2 mm. Ap. 140 Zeiss e oculare comp. 4-6, hanno un contorno ben delineato; quelle di forma rotonda hanno un diametro di 40-45 μ; quelle ovali hanno diametri massimi di 50-70 μ, e rispettivamente, diametri minimi di 40-62 μ.

Nell'interno di queste capsule si riesce a contare da 200 a 350 sporozoiti, per lo più di forma nettamente fusata, altre volte così foggiati come se del fuso mancasse un'estremità, generalmente più o meno incurvati in uno o in due sensi.

Questi sporozoiti sono lunghi 5-6 μ, presentano nella loro parte centrale una larghezza massima di 2 μ, e sono estremamente delicati e sottili. Contengono un nucleo piuttosto grosso, che occupa, cioè, quasi intieramente la parte mediana dello sporozoito ed è costituito di un numero considerevole di minutissimi blocchetti di cromatina, ravvicinati fra di loro in modo da formare nell'insieme un ammasso di forma ovale, a contorni abbastanza regolari, risultando un limite di divisione piuttosto netta dallo scarso protoplasma circostante, il quale, in prossimità del nucleo, appare finamente granuloso.

Con questa colorazione la capsula parassitaria rimane incolora o si colora in rosa pallido, mentre gli sporozoiti si colorano in rosso-viola ed il loro nucleo in verde scuro, con qualche puntolino chiaro: il protoplasma delle cellule nervose si colora in rosso chiaro, i nuclei in rosso più o meno tendente al violetto, i nucleoli in un brillante scarlatto; i nuclei delle cellule della nevroglia in azzurro e presentano qualche granulazione rossa; i nuclei dei corpuscoli rossi si colorano in azzurro o verde azzurro, l'emoglobina conserva il suo colore normale o si presenta più intensamente colorata in rosso aranciato; i corpuscoli bianchi si colorano in rosso chiaro ed

i loro nuclei e granulazioni in azzurro; i nuclei delle piastrine pure in azzurro, mentre il loro protoplasma resta per lo più incoloro.

Potemmo accertare la presenza delle dette capsule parassitarie anche impiegando il processo di colorazione all'eosina e azzurro di metilene, proposto dal Baschieri (1) per la rapida dimostrazione dei corpuscoli del Negri, ma i preparati riuscirono meno dimostrativi. Ci fallirono completamente altri processi di colorazione, fra i quali quello del Mann.

Le capsule vennero da noi riscontrate nei soli preparati per impressione e per schiacciamento ed unicamente nella polpa cerebrale, non nel cervelletto, non nel midollo allungato, nè nello spinale, e nemmeno nei grossi tronchi nervosi.

Nelle sezioni di cervello colorate con la pironina ed il verde di metile, alla stessa maniera che i preparati per schiacciamento, non ci venne fatto di vedere le capsule sopra descritte. È probabile che i maltrattamenti subiti per l'indurimento e per l'inclusione le abbiano distrutte. È noto, del resto, come anche per taluni altri protozoi parassiti accada di vederli nel sangue, nei succhi dei tessuti e non nelle sezioni degli organi in cui essi pur si trovano indubbiamente.

Queste formazioni parassitarie nel cervello di una delle due oche si riscontrarono numerose, anche 3-6 in un vetrino di 18 mm. di lato, spalmato con poca sostanza cerebrale; nell'altra risultarono meno frequenti di guisa che bisognava allestire parecchi preparati per vederne qualcuna.

Il cervello di ambedue questi animali risultò egualmente virulento per i polli; inoculato in piccola quantità, dopo emulsione in soluzione fisiologica, nei muscoli pettorali di questi animali li conduceva a morte in meno di due giorni.

Con lunghe e pazienti serie di preparati, fatti nel modo sopradescritto, abbiamo ricercato la eventuale presenza delle anzidette capsule nella polpa dei diversi lobi cerebrali di 22 oche normali, per la maggior parte provenienti dallo stesso luogo donde venivano i due animali sopracitati, cioè da Carpi in questa provincia, in parte anche provenienti da altri punti della pianura modenese. Ma le nostre ricerche sugli animali sani diedero un risultato negativo.

(1) A. Baschieri, *Sulla diagnosi rapida della rabbia.* « Bullettino delle Scienze Mediche » Bologna, A. LXXVII, Ser. VIII, Vol. VI.

Riguardo all'interpretazione da dare a queste capsule parassitarie, le quali evidentemente rappresentano lo stadio finale di moltiplicazione anfigonica di un protozoo e si potrebbero paragonare agli zigoti descritti dal Prof. G. B Grassi, per il parassita della febbre malarica nel corpo della zanzara, noi ci asteniamo da affermazioni che le nostre osservazioni, finora troppo limitate per numero, non ci possono consentire.

Con altre indagini, ora in corso, ci proponiamo di stabilire se le capsule parassitarie sopra descritte rappresentano il virus del tifo essudativo o peste aviaria, che noi avremmo avuto la fortuna di sorprendere in tale stadio da non potersi più sollevare dubbio nè sulla sua struttura morfologica, nè sulla sua natura di protozoo.

Non possiamo tuttavia tacere che le nostre indagini urtano contro gravi difficoltà. Oltrechè non è sempre facile il procurarsi animali dell'età di circa sette mesi, il nostro virus possiede ora un grado di virulenza pressochè fisso e molte volte determina in questi palmipedi la morte senza provocare la forma nervosa caratteristica della malattia, nella quale sola forse si può, a nostro avviso, sperare di proseguire le presenti ricerche con qualche frutto; oppure, se si tratta di animali più vecchi o più resistenti, questi, inoculati per la via intramuscolare, o passano a forma cronica o guariscono dopo aver reagito in modo più o meno lieve.

D'altra parte i polli per questa speciale ricerca non possono servire. Invero noi abbiamo esaminato, con numerosi preparati, sia seguendo esattamente la tecntca sopraindicata, sia con altri metodi di colorazione particolarmente utili per porre in evidenza i protozoi, il cervello di 40 polli, tutti morti in capo ad un periodo di tempo minore di due giorni, in seguito ad inoculazione sperimentale del nostro virus, e in nessuno di questi ci fu mai dato di riscontrare una delle sopradescritte capsule parassitarie; nè alcunchè di consimile venne riscontrato nel cervello dei polli dagli osservatori che già affrontarono questo studio (Centanni, Maggiora e Valenti, F. K. Kleine, Rosenthal, Schiffmann, von Prowazeck ed altri).

Comunque, anche se a noi toccherà di lasciare insoluta l'accennata questione o se dovremo conchiudere che il reperto, oggetto di questa breve nota, è indipendente dall'infezione del tifo essudativo, riteniamo che si tratti di un fatto non privo di interesse scientifico. Invero, se la presenza di protozoi parassiti anche in grande numero

nei vasi cerebrali è un fatto di conoscenza ormai antica (1), è questa, per quanto noi sappiamo, la prima volta che viene riscontrato un protozoo nello stato di moltiplicazione anfigonica nella polpa cerebrale di un animale a sangue caldo.

(1) A. LAVERAN, *Traité des fiévres palustres avec la description du microbes du paludisme*. Paris, O. Doin éditeur 1884, pag. 83.

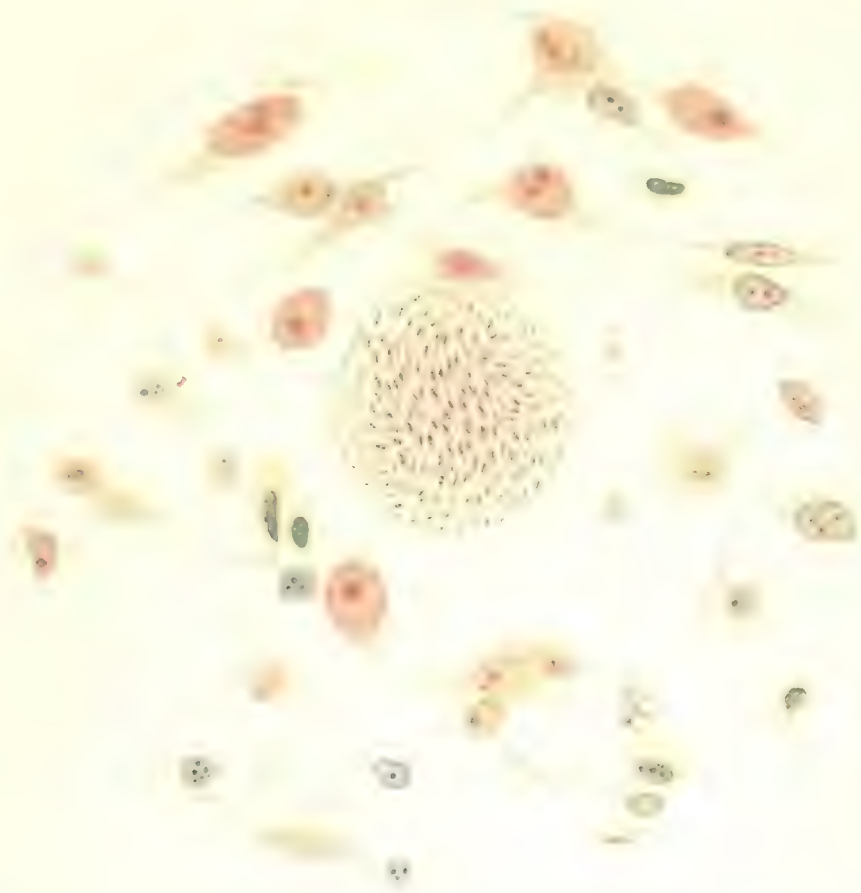
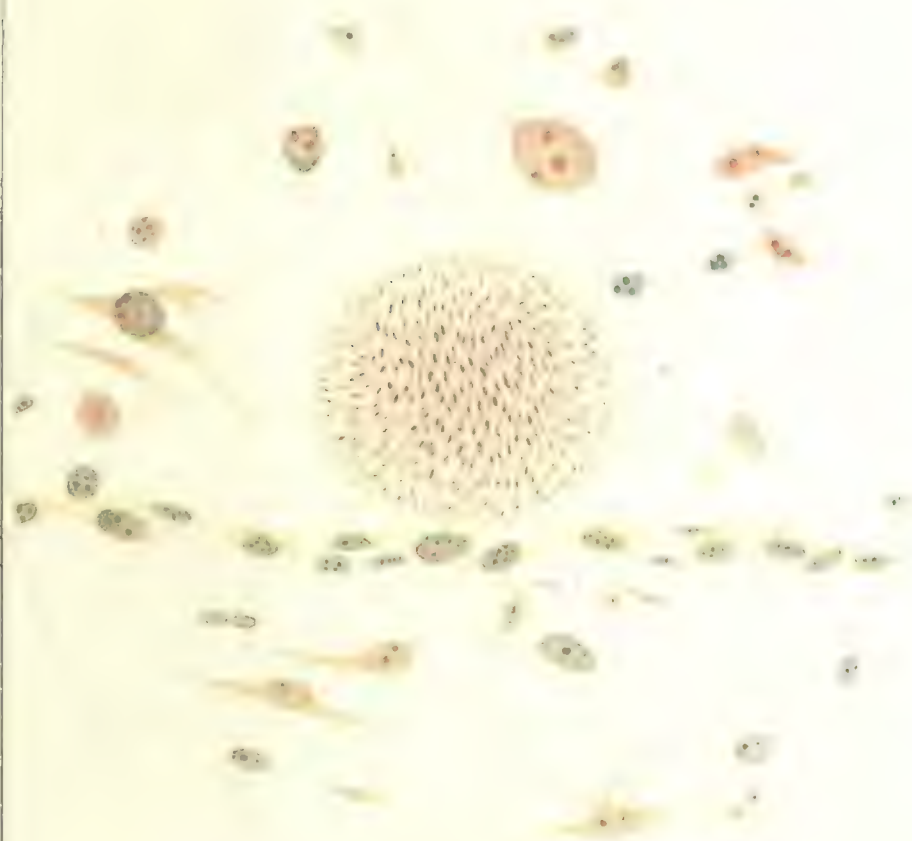
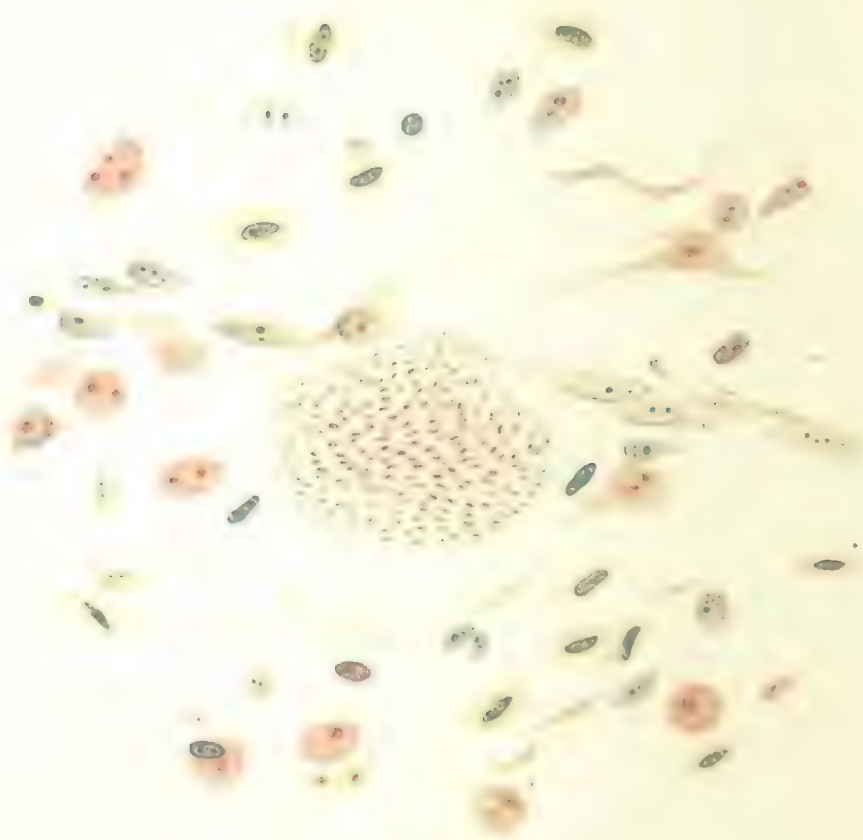
SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Polpa cerebrale di oche morte di forma nervosa sperimentale del tifo essudativo dei gallinacei — Cervello anteriore.

In ciascuna figura si scorge una capsula parassitaria ricolma di sporozoiti; nella fig. 1 la capsula è libera nel tessuto, nella fig. 2 sta in prossimità di un capillare, nella fig. 3 la capsula è spezzata nella sua parte superiore.

(Obbiett. Apocrom. Zeiss 2 mm. aper. 1,40. Immersione omogenea. Oculare 6 compensatore.

S. Manzi dis. Lit. Tacchinardi e Ferrari Pavia

ISTITUTO DI ANATOMIA UMANA NORMALE DELLA R. UNIVERSITÁ DI MODENA

SULLA OSSIFICAZIONE BILATERALE DEL *LIGAMENTUM SACRO-TUBEROSUM* E RELATIVO *PROCESSUS FALCIFORMIS,* DEL *LIG. SACRO-SPINOSUM,* DEL *LIG. TRANSVERSUM ACETABULI* E DEL *LIG. SACRO-ILIACUM ANTERIUS* IN UN ADULTO

Dott. GIUSEPPE SPERINO
Professore ordinario e Direttore dell'istituto

Dott. RUGGERO BALLI
Aiuto e Libero docente

L'ossificazione completa od incompleta, uni o bilaterale dei *ligamenta sacro-tuberosum*, e corrispondente *processus falciformis, sacro-spinosum*, *transversum acetabuli* e *sacro-iliacum anterius* è, a parer nostro e di alcuni anatomici che abbiamo interpellato al riguardo, un fatto abbastanza raro per quanto, fra i classici, Poirier (1) affermi di aver riscontrato un certo numero di volte l'ossificazione del *ligamentum sacro-tuberosum* in individui di età avanzata, dei quali alcuni bacini figurano nel Museo Anatomico di Parigi.

Comunque sia, noi crediamo interessante descrivere il caso da noi riscontrato, anche perchè siamo in grado di aggiungere ai dati anatomici alcuni dati radiografici.

Trattasi del bacino di certo Jankowski Vincenzo (N.° 11 della collezione di delinquenti del Prof. Sperino) del fu Giorgio nato ad Augustow, provincia di Varsavia (Russia) il 22 Gennaio 1822, celibe, domiciliato ad Intra, provincia di Novara, di religione ortodossa, di condizione nullatenente, indoratore, condannato alla reclusione per anni 8, mesi 6, per falsificazione di titoli russi; il quale subì già altra condanna per lo stesso reato. Morì il 23 Marzo 1900 in seguito ad anemia perniciosa progressiva, emoraggia cerebrale con successiva emiplegia destra, nella casa di pena di Castelfranco Emilia.

All'autopsia del cadavere venne notato nel cervello, in corrispondenza dell'*insula del Reil,* a sinistra, un focolaio di rammollimento molto esteso.

---

(1) P. POIRIER, *Traitè d'Anatomie humaine.* Tome premier, pag. 710, Paris 1899.

Alla successiva dissezione non venne riscontrato nulla degno di nota.

Il bacino, che è oggetto della presente descrizione, nella sua conformazione generale si presenta costituito di ossa molto robuste e spesse; il suo peso, allo stato secco, è di gr. 580 e le superfici che servono di attacco agli elementi muscolari sono marcatissime; del resto uno sguardo a tutto il rimanente scheletro ci mostra ripetuto questo fatto, il quale coincide col grande sviluppo del sistema muscolare presentato da questo individuo.

Riferiamo ora le misure del bacino secco.

Misure del grande bacino.

Tra le due spine iliache anterior-superiori	mm.	235
Distanza massima fra le due creste iliache, labbro interno	»	265
Tra le due spine iliache anterior-inferiori	»	190

Misure del piccolo bacino.

Stretto superiore

Coniugata anatomica	mm.	116
Diametro trasverso	»	122
Diametri obbliqui	»	135
Distanza sacro-cotiloidea	»	94
Circonferenza	»	400

Stretto inferiore

Diametro antero-posteriore o cocci sotto-pubico	mm.	92
Diametro trasverso bisischiatico	»	75
Diametri obliqui	»	86

Escavazione

Diametro retto	mm.	117
Diametro trasverso	»	104
Diametri obliqui	»	116
Altezza della parete posteriore (tra il promontorio e l'apice del coccige)	mm.	124
Altezza del bacino (dalla tuberosità ischiatica alla cresta iliaca)	»	213
Altezza della sinfisi pubica	»	35

Lig. sacro-tuberosum (Fig. I) *l. s. t.* Questo legamento da alcuni autori, MACALISTER, ALBRECHT, ecc., viene considerato come la porzione superiore dei *M. M. biceps femoris*, e *semitendinosus* divenuta fibrosa per atrofia, l'inserzione dei quali in alcuni mammiferi risale fino al sacro ed alla tuberosità iliaca.

Nel caso nostro il *lig. sacro-tuberosum* è, da ambo i lati, in gran parte ossificato. È assai probabile che questo legamento, non si presenti nella sua interezza, causa le manipolazioni inerenti alla macerazione; tuttavia riferiamo i dati che offre alla sua osservazione.

A destra trovasi ossificato per una lunghezza di 40 mm.; in rapporto della sua inserzione al *tuber ischiadicum* misura mm. 18, lo spessore è di mm. 5. La distanza fra l'apice della porzione ossificata di questo legamento ed il corrispondente margine del *sacrum* è di 26 mm.

Il *processus falciformis* di questo legamento è completamente ossificato ed appare con maggior evidenza il solco per il decorso dei vasi e nervo pudendi.

A sinistra l'ossificazione del *lig. sacro-tuberosum* è più estesa misurando essa mm. 51, con una larghezza, al suo punto d'impianto, di mm. 18 ed uno spessore di mm. 6. La distanza fra l'apice della porzione ossificata di questo legamento ed il corrispondente margine del *sacrum* è di mm. 11.

Il *processus falciformis* di questo legamento presenta le stesse particolarità di quello del lato opposto.

Nella ossificazione del *lig. sacro-tuberosum* è da notarsi che è perfettamente riprodotta, come è logico, la disposizione crociata dei fasci legamentosi per modo che i tratti ossei, i quali rappresentano i fasci fibrosi, che partono dalla faccia esterna del *tuber ischiadicum* volgono verso il margine interno del legamento e quelli che si distaccano dalla faccia interna si dirigono sul margine esterno di esso.

Lig. sacro spinosum. (fig. I) *l. s. s.* Da ambo i lati l'ossificazione di questi legamenti appare appena iniziata misurando sia in lunghezza sia in larghezza mm. 10.

Del *lig. sacro-tuberosum* e del *lig. sacro-spinosum* (fig. III) abbiamo cercato di ottenere anche l'immagine radiografica. Per avere tale imagine chiara e non deformata è stato necessario disporre il bacino in modo che sulla lastra, nel caso nostro di formato 13×18, venissero ad applicarsi direttamente i legamenti ossificati colle parti limitrofe, inclinato, cioè, in basso e lateralmente evitando nello stesso tempo che la superficie ossea anteriore del bacino avesse ad essere compresa nella linea di direzione dei raggi.

Con tale procedimento il *lig. sacro-tuberosum* si presenta sotto forma di una benderella ossea la cui impalcatura trabecolare di

tessuto spugnoso ha una direzione che va dal basso all'alto, dall'esterno all'interno, partendo dall'estremità inferiore delle trabecole che formano il tessuto spugnoso del *tuber ischiadicum*, le quali sono dirette verticalmente; il *lig. sacro-spinosum* appare costituito da tessuto spugnoso il quale si continua, senza linea di demarcazione, col tessuto proprio della *spina ischiadica.*

Lig. transversum acetabuli (fig. II, *l. t. a.*). A destra l'ossificazione di questo legamento è meno pronunciata che a sinistra. La sua lunghezza, misurata dal lato della *fossa acetabuli*, tra le due corna, è di 22 mm. Non ha l'aspetto di una lamina ossea uniforme, ma in corrispondenza del suo margine libero, che continua quello del *labium glenoidale*, si presenta interotta nella sua metà inferiore da una incisura lunga 11 mm. e profonda 7 mm., mentre nella sua metà superiore continua il *labium glenoidale* pure ossificato, presentandosi sotto forma di una dentellatura composta di due denti, dei quali uno laterale coll'apice in basso, l'altro mediale coll'apice in alto, disposti in modo da circoscrivere due fessure la prima delle quali è lunga 13 mm., la seconda 9 mm. soltanto e la loro ampiezza 1 mm. Data questa disposizione la circonferenza formata dal margine libero del *labium glenoidale* e del *lig. transversum acetabuli* resta interrotta dalla incisura sopra descritta.

Lo spessore del *lig. transversum acetabuli*, misurato in corrispondenza della base, è di 6 mm.

L'orifizio ischio-pubico si presenta sotto forma di una fessura ovalare lunga 24 mm. e larga, nella sua parte mediana, 5 mm.

A sinistra il *lig. transversum acetabuli* è completamente ossificato ed il suo margine libero si continua senza alcuna interruzione direttamente col margine libero del *labium glenoidale*, il quale, anche da questo lato, è ossificato. La larghezza del *lig. transversum acetabuli* è di 17 mm. e lo spessore, in corrispondenza della sua base, di mm. 7.

Verso la parte media della base di questo legamento ed a 4 m.m. di distanza dal foro ischio-pubico notasi un orifizio ovalare lungo, nel suo maggior diametro, mm. 6 e largo 2 mm. Esso era attraversato, assai probabilmente, da elementi vascolari.

Il foro ischio-pubico, ovalare, è poco più ampio di quello di destra: misura 30 mm. in altezza e 8 mm. di larghezza nella sua parte media.

Data l'ossificazione del *lig. transversum acetabuli* ai due lati, l'incisura acetabuli è convertita in un foro completamente osseo, il foro ischio-pubico.

Come abbiamo accennato il *labium glenoidale* è completamente ossificato da ambo i lati; però, mentre a destra il suo margine libero è manifestamente regolare, a sinistra, in rapporto delle due incisure ileo-pubica ed ileo-ischiatica, notasi, a spese del *labium glenoidale* stesso, un accenno di tali incisure.

Nulla di notevote nella *facies lunata*, nella *fossa acetabuli* dell'*acetabulum* in ambo i lati.

Lig. sacroiliacum anterius. Questo legamento, ai due lati, si presenta parzialmente ossificato; cioè, sono solo ben ossificati i fasci raggiati che dalle ali del sacro si portano alla corrispondente fossa iliaca (1).

Dopo questa descrizione è naturale la domanda, se l'ossificazione dei legamenti sopra ricordati sia un fatto puramente anomalo, oppure rientri nel campo patologico, ad esempio si tratti di accenni di miosite ossificante. Per stabilire ciò non abbiamo dati sufficienti, ci mancano pure i dati anamnestici i quali potrebbero portare molta luce per un giusto apprezzamento. Però, se noi poniamo mente che dalla diligente e completa dissezione del cadavere non risultò nulla di patologico all'infuori della lesione cerebrale; che dall'esame fatto delle superfici articolari, queste si presentavano perfettamente integre; che l'ossificazione dei legamenti descritta è bilaterale; che lo scheletro ci offre un tutto armonico per ciò che riguarda la robustezza dell'impronte muscolari e legamentose, siamo indotti a pensare più ad una condizione anomala, che ad un fatto patologico.

---

(1) Nel procedere all'esame dei bacini della stessa collezione di delinquenti sopra ricordata, in numero di 300, ci venne dato di riscontrare ancora un caso di ossificazione parziale, unilaterale, del *lig. sacro-tuberosum* e relativo *processus falciformis*.

Ciò fu nel bacino di Maino Luigi (N.° 69 della collezione) di Alessandria, di anni 56, celibe, condannato ad anni 5, mesi 2, giorni 12 per furti, morto il 6 Maggio 1902 in seguito ad enterocolite cronica, nel reclusorio di Castelfranco Emilia.

In questo bacino, a destra, la porzione ossificata del *lig. sacro-tuberosum* misura in lunghezza mm. 14, in larghezza, al suo punto d'impianto, mm. 17 ed in spessore mm. 4; pure da questo lato è iniziata l'ossificazione del *processus falciformis*.

Anche in questo bacino, come nelle rimanenti parti dello scheletro, le impronte muscolari e legamentose sono ben marcate.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Fig. I. — **Bacino visto dorsalmente.**

l. s. t. = *ligamentum sacro-tuberosum.*

l. s. s. = *ligamentum sacro-spinosum.*

» II. — **Porzione di bacino visto ventralmente.**

l. t. a. = *ligamentum transversum acetabuli.*

» III. — **Radiogramma dei** ***ligamenta sacro-tuberosum*** **e** ***sacro-spinosum*** **del lato sinistro**

Fig. 1

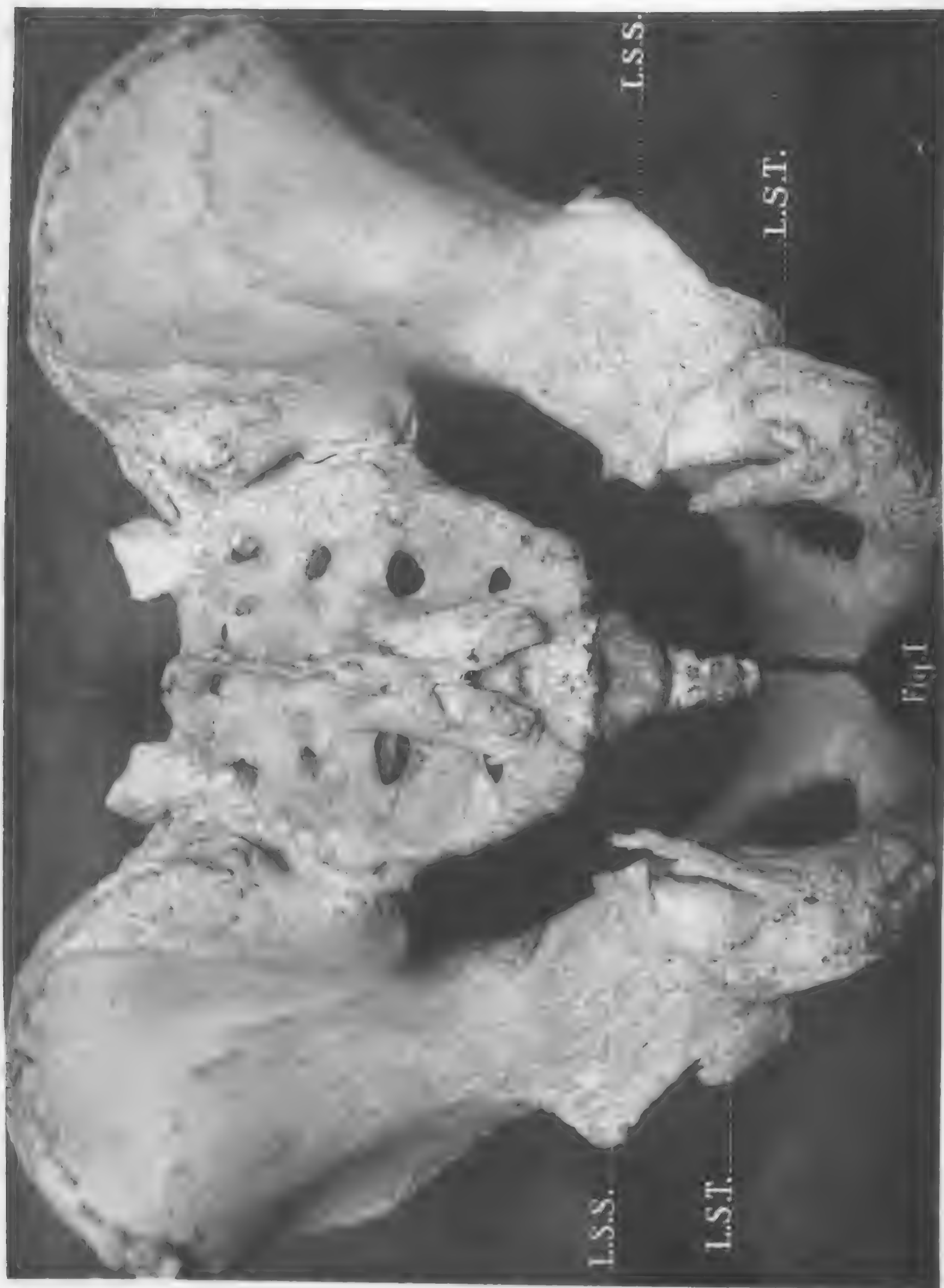



Fig. II

Fig. III

INTORNO ALLA PRETESA COLORAZIONE DEGLI JONI

Nota di G. MAGNANINI

Circa 20 anni fa il Prof. Ostwald introdusse nella scienza una nuova ipotesi: la ipotesi degli joni colorati, la quale ebbe molta fortuna, essendo accolta come dottrina dalla maggior parte dei chimici che si sono occupati dell'argomento (1), in modo da costituire fondamento alla teoria degli indicatori, accettata nei testi di tutto il mondo e nell'insegnamento pubblico. Più degli altri il Prof. Abegg nel suo trattato fece uso con molta frequenza, benchè con poca utilità, della ipotesi di Ostwald.

Dicianove anni fa, e successivamente, anche io mi sono occupato di tale argomento, presentando esso particolare interesse per la conoscenza della natura della dissociazione elettrolitica, e con inconfutabili esperienze (2) fui condotto alla conclusione che la ipotesi della colorazione degli ioni non era sostenibile e non doveva accogliersi come regola, come pretendevano i suoi numerosi propugnatori. La discussione sopra l'argomento mi portò alla conclusione: che se pure la ipotesi non poteva essere accettata vi erano casi particolari, da me stesso bene constatati: acido violurico, acido dimetilviolurico, isonitrosodiketohydrindene ed etere dell'acido diclorochinondimalonico, ed altri casi ancora di sostanze aventi funzione da indicatore; per i quali la ipotesi di Ostwald si prestava veramente bene a spiegare i fatti osservati: ma tali casi particolari si presentavano in modo da doversi *piuttosto considerare come eccezione che come conferma della regola riguardante la colorazione degli elettroliti.* Perciò

(1) Es.: I. H. van:t Hoff Acht Vortraege Ueber Phys. *Chemie.* Pag. 26 e 27. Vedi più particolarmente in proposito: Rudorf Die Lichtabsorption in Losungen 1904, per le anteriori notizie; A. Thiel der Stand der Indikatorenfrage, per le notizie più recenti, 1911.

(2) *Gazzetta Chimica*, 1893. Esperienze con Bentivoglio e seguenti.

differentemente dalla grande maggioranza degli altri chimici, non ho mancato nell' insegnamento durante questi anni di fare presente agli studenti il poco fondamento di verità della ipotesi degli joni colorati, richiamando l' attenzione di essi sul caso particolare degli indicatori, i quali formano apparentemente una importante eccezione alla regola da me stabilita che: la parte dissociata negli elettroliti ha la medesima colorazione della parte non dissociata.

Da quel tempo essendomi proposto per molteplici ragioni di non compiere, o quasi, ricerche scientifiche in questa sede di Modena, non mi sono quasi più occupato dell' argomento; non potendosi chiamare col nome di propria ricerca la breve nota da me presentata alla R. Accademia (1) dopo che erano comparsi i primi studi del Prof. Hantzsch (2) sulla tautomerie e sulle desmotropie, nella quale memoria io chiaramente da allora esprimevo l' opinione che, dalle ricerche di questo illustre chimico, sarebbe scaturita probabilmente la spiegazione delle eccezioni presentate da una intera classe di corpi alla regola da me stabilita.

I successivi lavori del Prof. Hantzsch e di altri, anche in Italia (3), hanno portato oggi tale contribnto di conoscenze, da convincere anche gli avversari nel ritenere dimostrata la verità delle affermazioni da me sostenute (4) e mi esimono dal compiere ulteriori ricerche sopra l' argomento; potendosi solo eccettuare lo studio non ancora fatto intorno alle condizioni *precise* di esistenza dell' acido violurico, per il quale i nuovi studi permettono di ritenere possibile l' esistenza di due forme differenti, quella comune che è colorata, e quella incolora *da me intraveduta nel 1893*.

Ma poichè qualcuno ha erroneamente affermato che io stesso nei successivi lavori accettai l' ipotesi degli joni colorati, riporto in-

(1) Vedi Memorie della R. Accademia di Scienze ed Arti di Modena. Serie III, Vol. III.

(2) Berliner Berichte, 1899, pag. 575.

(3) Vedi Poma. *Gazzetta Chimica*, 1909.

(4) In una recentissima memoria (Berl. Berichte 1911, fascicolo di luglio a pag. 1787) l' illustre Prof. Hantzsch così si esprime:

« Bei dieser Gelegenheit sei gern anerkannt, was in meinen früheren Arbeiten über die Unabhängigkeit der Absorption von der Jonisation nicht erwahnt worden ist, dass als erster Magnanini schon 1892 ausgesprochen ùnd nachgewiesen hat, dass Veränderungen des Dissoziationsgrades ohne Veränderungen der Farbe erfolgen (z. B. G. 22, I 131; 23, II, 44; und 25, II. 373), und dass er von da an die scheinbaren Ausnahmen gleich mir chemisch (z. B. bei den Violuraten durch Umlagerung) erklärt hat ».

tegralmente brani delle passate ricerche, i quali dimostrano invece la costanza delle mie opinioni:

Nel 1892 (1) io scrivevo: « la colorazione in soluzione acquosa è indipendente dalla dissociazione elettrolitica ».

Nel 1893 (2) io scrivevo:

« I cromossalati alcalini anche in soluzione concentratissima presentano l'identico spettro: l'assorbimento luminoso di questi sali è assolutamente indipendente dal grado della dissociazione elettrolitica ».

Nel 1894 (3) io scrivevo:

« L'ipotesi che il colore delle soluzioni saline sia essenzialmente determinato da quello degli ioni che vi sono contenuti è in contraddizione coi fatti » e più oltre a pag. 56:

« Se i permanganati presentano lo stesso spettro; se i sali di rame, di cobalto, di ferro e di altri metalli; se i cromati presentano il medesimo colore, ciò non dipende dal fatto che queste sostanze contengono lo stesso jone, quanto dal fatto più generale che i sali di un medesimo metallo, aventi il medesimo grado di ossidazione si assomigliano. Se i sali ferrosi e i sali ferrici hanno colorazione differente, ciò non dipende dal diverso colore degli joni F_e'' F_e''', ma invece da un'influenza *più complessa, per la quale il passaggio da un grado di ossidazione ad un altro* induce sempre un *cambiamento* nella colorazione.

« Questa indipendenza del potere assorbente non è però argomento contrario alla ipotesi della dissociazione elettrolitica. Solamente, come avviene anche per altre proprietà, la colorazione non risente l'influenza di questa forma speciale di dissociazione, la quale è tanto differente dalla dissociazione ordinaria, e la cui vera essenza è per ora sconosciuta completamente ».

Nel 1895 (4) in uno studio fatto sopra i cromosolfocianati:

« Nei sali colorati la colorazione . . . . . si può spiegare colla ipotesi del colore degli joni, ma per i casi da me osservati essa si mantiene ancora proprietà additiva dove a spiegare tale comportamento tale ipotesi non può più essere invocata ». E più oltre:

(1) *Gazzetta chimica*, XXII, I, pag. 139.

(2) *Gazzetta chimica*, XXIII, II, pag. 451.

(3) *Gazzetta chimica*, XXV. I, 55.

(4) *Gazzetta chimica*, XXV, II, pag. 374.

« Questi risultati sono una conferma della legge di Gladstone e Ostwald che la colorazione negli elettroliti è una proprietà additiva. Però essi non si possono spiegare *unicamente colla ipotesi della colorazione degli ioni.* Le differenze di *indole costitutiva* che dovrebbero verificarsi non si verificano, o per lo meno, non sono tali che si possa concludere che per la parte non dissociata la colorazione sia una proprietà costitutiva ».

Nel 1896 (1) mi sono occupato di quei casi particolari sopra ricordati (2) nei quali i cambiamenti di colore non si sapevano allora altrimenti spiegare che ricorrendo alla ipotesi della colorazione degli joni, ed io scrivevo:

« Per questi casi che sono per *ora assai pochi* l'ipotesi di Ostwald si presta veramente bene; si può dire che è per questi casi che essa acquista un forte grado di probabilità; sembra invece *che in generale il colore degli joni non sia sensibilmente differente dal colore della parte non dissociata* ».

Ed oggi che nella scienza si è pervenuti finalmente ad una idea chiara intorno all'argomento, devo ripetere un'osservazione già fatta sul principiare della controversia, osservazione riguardante la profonda differenza che dal punto di vista della colorazione presenta la dissociazione elettrolitica in confronto alla dissociazione ordinaria. Se la parte non dissociata ha la medesima colorazione della parte dissociata, viene fatto di chiedere, in che risieda nella natura sua intima e sconosciuta il fenomeno della dissociazione elettrolitica; e grave sorge il dubbio se si debba ritenere, il che io ritengo, nei riguardi di tale dissociazione, come vera: piuttosto l'utilità dello schema di essa, che la sua realtà.

E riferendomi a quanto io ho osservato poco fa (3) intorno al problema della reale esistenza degli atomi e delle molecole, e ricordando in quale forte misura l'assorbimento luminoso si risente di regola dei fatti di disgregamento molecolare, (come si osserva per esempio nella dissociazione ordinaria dei gas) e quali differenze si producano in tali casi nello spettro delle sostanze: facilmente nasce la convinzione: che se poco probabile esistenza reale hanno gli atomi

(1) *Gazzetta chimica*, XXVI, II, pag. 92 e seguenti.

(2) A. Violurico, dimetilviolurico, ... in generale: corpi assimilabili agli indicatori.

(3) Vedi *Gazzetta chimica*, anno corrente.

e le molecole ***assai minore è il grado di probabilità della reale esistenza degli joni.***

Per conseguenza mi è nata curiosità di esaminare quale influenza abbia la dissociazione elettrolitica sopra altre proprietà fisiche in modo particolare sopra il potere rotatorio, per il quale le ricerche non sono abbastanza estese e le opinioni non bene dimostrate; ed ho incaricato il Dott. Bongiovanni di compiere ricerche in proposito, con procedimento logicamente consimile a quello che a me servì per dimostrare la mancata influenza della dissociazione elettrolitica sulla colorazione. Il Dott. Bongiovanni comunicherà separatamente i risultati delle sue ricerche quando saranno compiute; appare però fino da ora il fatto importante che per i casi considerati, ***il potere rotatorio dei sali attivi non è influenzato dal grado della loro dissociazione elettrolitica.***

Modena. Laboratorio di Chimica Generale

Giugno 1911.

Os Cuneiforme I perfecte et imperfecte bipartitum

Dati di Anatomia sistematica e radiografica.

La divisione completa o parziale dell' *Os cuneiforme I* non è certo molto frequente, tuttavia la letteratura ne registra parecchi casi e, fra i varî autori, alcuni ne riferiscono puramente i dati anatomici, altri non solo ne danno dettagliate descrizioni, ma cercano di indagarne anche il valore morfologico.

Morel nel 1763 aveva osservato, in un artistico scheletro di un uomo di 24 anni, otto ossa al tarso del piede sinistro; vi erano cioè *quattro cuneiformi*. A destra la divisione del *cuneiforme I* non era completa.

Fr. Blandin nel 1834 riscontrò due volte sul cadavere *quattro ossa cuneiformi*.

Wenzel Gruber nel 1862 trovò, al piede destro di un uomo, il *cuneiforme I* perfettamente bipartito; nel 1863, in una donna, trovò quest' osso imperfettamente diviso in entrambi i piedi. Dal 1863 al 1876 ne riscontrò quindici casi (14 uomini ed uno di sesso ignoto) distribuiti nel seguente modo; cioè: cinque bilaterali, di cui due perfettamente bipartiti, due imperfettamente bipartiti ed uno perfettamente bipartito a sinistra ed imperfettamente a destra; tre a sinistra, di cui due perfettamente bipartiti ed uno imperfettamente; due a destra perfettamente bipartiti. Egli dà una percentuale del 0,35 di perfetta divisione del *cuneiforme I*. Il Gruber nel suo classico lavoro descrive minutamente i casi da lui osservati, corredandoli di figure illustrative.

VINCENZO MARCHESANO nel 1864 riferisce al Prof. RANDACCIO di Palermo di aver riscontrato nei piedi di un cadavere di alta statura la duplicità del *cuneiforme I.*

JONES SYDNEY descrisse nel 1864 un caso di *cuneiforme internum bipartitum*, al piede sinistro di un uomo dell' età di 25 anni.

THOMAS SMITH nel 1866 riporta un caso di *cuneiforme internum bipartitum,* riscontrato in entrambi i piedi di un soggetto di cui non dice il sesso. Cita inoltre altri due casi (4 piedi) nei quali il *cuneiforme I* alla sua faccia anteriore, articolare, era diviso da un solco in due segmenti.

J. BANKART, P. H. SMITH and J. PHILIPPS nel 1869 pubblicarono un osservazione di un ossicino soprannumerario *cuneiforme* a base in alto tra il cuneiforme I ed il secondo metatarsale (segmentazione sagittale del cuneiforme I? *Rapporto* di G. ANTONELLI).

LUDWIG STIEDA nel 1869 notò la divisione completa del *cuneiforme I* in un uomo al piede sinistro sopra 60 cadaveri.

WILLIAMS TURNER nel 1869 aveva veduto nel piede destro di una donna il *cuneiforme I* perfettamente bipartito.

LE DENTÙ nel 1869 presentò alla *Societè Anatomique de Paris* due casi di *cuneiforme I bipartitum*.

A. FRIEDLOWSKI nel 1870 descrisse dettagliatamente, nel piede sinistro di un uomo, il *cuneiforme I*, *bipartitum*, e riferisce alcuni dati di Anatomia comparata riportandosi a quanto il MECKEL asserisce in proposito.

MAX FLESCH nel 1876 ha descritto un caso di *cuneiforme I* perfettamente bipartito nel piede destro di un uomo, similmente un altro caso di divisione imperfetta.

ANGELO INCORONATO nel 1880 cita un caso di completa bipartizione del *cuneiforme I* riscontrato dai Dottori Militari Maggiore

RICCARDI e Capitano SFORZA in un giovinetto all' incirca quindicenne. Le due ossa risultanti dalla completa divisione del cuneiforme I sono sopra poste l' una all' altra e le indica col nome di *primo cuneiforme dorsale* e *primo cuneiforme plantare*. Riferisce poi di averne egli stesso riscontrato due casi. In questi, però, la divisione non era così ben distinta ed in uno dei due si verificava solo al lato destro.

HARTMANN et MORDRET nel 1889 istituirono delle ricerche sopra il *cuneiforme I* e dall' esame di 300 piedi riscontrarono nel 20 % che la faccetta anteriore o distale di quest' osso era nettamente divisa in due, da un solco largo alle due estremità ed assai ristretto nella parte mediana; nel 2 % dei casi trovarono la completa divisione del *cuneiforme I*, nel qual caso le due ossa erano connesse fra loro per artrodia, come già accennarono DELMAS, FRIEDLOWSKI, LE DENTÙ. Aggiunsero inoltre alcuni dati anatomici intorno al comportamento delle ossa adiacenti nei casi di completa divisione del *cuneiforme I*.

W. PFITZNER (1891) sopra 750 piedi trovò quattro volte la perfetta divisione del *cuneiforme I* e sei volte la divisione incompleta. Egli riferisce una percentuale del 0,33 di perfetta divisione.

MICHELE TITONE nel 1893 notò, in uno scheletro di statura elevata, i due piedi aventi ciascuno *quattro cuneiformi* invece di tre; egli dice che molto raramente si è osservata tale anomalia.

A. BLACK nel maggio 1894 presentò alla Società Anatomica della Gran Brettagna ed Irlanda un caso di divisione del *cuneiforme I*.

G. D. THANE nel maggio 1894 presentò alla stessa Società Anatomica sopra ricordata alcuni esemplari del *cuneiforme I* diviso.

STANISLAO BIANCHI nel 1904 riscontrò un caso di perfetta divisione del *cuneiforme I* in ambo i piedi di un adulto.

ARTURO BANCHI nel 1905 trovò, nel piede sinistro di un uomo adulto, la divisione completa del *cuneiforme I*; in quello di destra la divisione era incompleta.

Nel passare in rassegna il materiale scheletrico preparato durante l' anno scolastico, ci è occorso di incontrare un caso di divisione completa, bilaterale, dell' *os cuneiforme I* in un uomo adulto, ed avendo avuto a nostra disposizione i mezzi per eseguire la radiografia dell' esemplare, abbiamo creduto non del tutto inutile farne oggetto di descrizione.

I dati che verremo esponendo si riferiscono tanto al cuneiforme I destro quanto al sinistro essendo le loro disposizioni perfettamente identiche.

Come è noto l' *os cuneiforme I perfecte bipartitum* è sempre diviso nella direzione di un piano orizzontale leggermente inclinato in avanti, quasi nella stessa direzione di quella depressione che notasi più o meno marcata sulla faccia mediale del cuneiforme I normale, la quale dall' angolo posteriore riesce all' angolo anterior-inferiore ed in cui decorre il tendine del *m. tibialis anterior.* Per tale disposizione ne risultano due cuneiformi secondari, che per la loro posizione superiore ed inferiore sono chiamati *cuneiforme I secundarium dorsale* e *cuneiforme I secundarium plantare.*

Nel caso nostro, da ambo i lati, la linea di divisione interna scorre lievemente ondulata, così pure quella che decorre sulla faccia esterna, l' anteriore è rettilinea, la posteriore curva colla concavità dorsale.

Gruber avrebbe notato, nei suoi casi, per lo più la linea interna curva colla concavità in alto, talvolta retta; quella esterna ora retta, ora curva: solo in un caso trovò la linea interna angolosa e la esterna a zig-zag; la linea anteriore ora retta, ora curva, verso l' alto o verso il basso, ora sotto forma di S italica; la linea posteriore raramente retta, per lo più curva colla concavità verso l' alto.

Il nostro *cuneiforme I perfecte bipartitum,* bilaterale, rispecchia la identica forma del *cuneiforme I normale,* malgrado che in alcuni casi descritti da altri autori la faccia laterale si presenti più concava che nel cuneiforme I normale.

Il diametro verticale del *cuneiforme I perfecte bipartitum* è, in avanti, mm. 39, all' indietro, mm. 27; il diametro obbliquo massimo mm. 45.

Os cuneiforme I secundarium dorsale.

Quest' osso rassomiglia ad una piramide triangolare disposta orizzontalmente colla base volta in avanti o distalmente ed il vertice smusso in dietro o prossimalmente. Le tre faccie sono rivolte, rispettivamente, medialmente, lateralmente e plantarmente ed i tre margini, in alto, in basso e medialmente, in basso e lateralmente.

L' apice (Fig. I *a*) di questa piramide, che costituisce pure una faccetta articolare, è smusso e rivolto prossimalmente, ma anche alquanto obliquamente in basso; ha la forma di un piccolo triangolo a base inferiore, la quale si continua ad angolo smusso colla superficie articolare della faccia inferiore di quest' osso, che si mette in rapporto con una superficie similare posta sulla faccia superiore del *cuneiforme I secundarium plantare*, come vedremo. Il maggior diametro di questo triangolo, che corrisponde alla sua base, misura 10 mm., il lato mediale, convesso mm. 8, quello laterale, arrotondato mm. 11, che si continua con una piccola faccetta articolare posta sulla faccia laterale dell' osso per il cuneiforme II. Gruber avrebbe notato l' apice di questa piramide sotto forma di un quarto di cerchio, o di un ovale disposto obliquamente, o verticalmente, o trasversalmente; o di forma triangolare, ma colla base laterale ed il diametro trasverso maggiore; assai raramente di forma romboidale con angolo inferiore ottuso.

La base (Fig. II *b*), che è una superficie articolare in tutta la sua estensione, volge distalmente ed è di figura triangolare coll' apice arrotondato rivolto in alto; il lato mediale è convesso ed il più lungo e misura 20 mm., quello laterale è rettilineo ed il più breve, misura 17 mm., quello inferiore convesso misura 19 mm. Non di rado la base di questa piramide ha la forma di un ovale disposto più o meno obliquamente, col polo superiore laterale, col polo inferiore mediale (Gruber).

La faccia mediale (Fig. III, *f. m*) di questa piramide è di forma irregolarmente semiovale e di aspetto rugoso. Essa è convessa in senso verticale e concava in senso antero-posteriore e cosparsa di numerosi forellini di varia grandezza. Questa faccia è limitata anteriormente da una scanalatura verticale che serve all' inserzione della capsula articolare per l' articolazione del *cuneiforme I* col *I me-*

tatarsale. Un altra scanalatura o doccia assai più ampia ed obliqua in basso notasi sulla parte mediana di questa faccia mediale e serve al decorso del *m. tibialis anterior.*

La faccia laterale del nostro *cuneiforme I secundarium dorsale* (Fig. IV, *f. l.*) possiede, nella sua metà superiore, tre faccette articolari ben distinte l'una dall'altra per mezzo di due scanalature verticali e rugose: una faccetta anteriore, rotondeggiante (Fig. IV, II *m*), la quale si articola con una faccetta similare dell'estremità prossimale del II metatarsale: essa misura mm. 7 tanto nel suo diametro verticale quanto in quello trasversale; una faccetta media, ovalare, a grand'asse antero posteriore (Fig. IV, II *c*), che si articola col II cuneiforme; questa misura 10 mm. in senso verticale e 13 mm. in senso antero-posteriore; ed una faccetta-posteriore, infine, semiovale (Fig. IV, II *c*), la quale si articola pure col II cuneiforme e si continua all'apice dell'osso colla faccetta articolare or ora descritta a proposito di questo apice. Questa terza faccetta misura 7 mm. nel diametro verticale e 5 mm. nel suo diametro trasverso. Per ordine di grandezza la media è la maggiore, poi viene la anteriore e da ultimo la faccetta posteriore. Nella metà inferiore la faccia laterale del *cuneiforme I secundarium dorsale* è rugosa, con numerosi fori di varie dimensioni, incavata nel senso antero-posteriore e giunge fino alla faccetta articolare posteriore ora descritta.

La faccia plantare od inferiore (Fig. V) è di aspetto triangolare allungata in senso antero-posteriore con vertice prossimale smusso; il lato laterale è il più lungo e misura 24 mm., gli segue, per ordine di lunghezza, il lato mediale, mm. 21, poscia quello anteriore, mm. 19, che volge obliquamente in fuori ed in avanti, infine quello posteriore, mm. 10, alquanto obliquo in fuori ed in dietro. La faccia plantare è divisa in due segmenti uno mediale articolare, l'altro laterale rugoso. Il segmento mediale, articolare (Fig. V, *m*) è di aspetto falciforme, nel terzo posteriore interessa tutta la faccia plantare continuandosi senza limite netto colla faccetta articolare che costituisce l'apice di questo cuneiforme dorsale; nei due terzi anteriori abbraccia il segmento laterale rugoso, ed è diviso dalla faccia anteriore o distale dell'osso mediante un solco ben evidente. Il segmento laterale, rugoso (Fig. V, *l*) è di aspetto ovalare allungato, pianeggiante, poroso. GRUBER avrebbe notato che il segmento articolare mediale può anche presentarsi triangolare, cuneiforme ripiegato,

linguiforme, ovale, unciniforme, a forma di parallelogramma o di S italica o di biscotto; e che il segmento laterale rugoso può essere, inoltre, triangolare o quadrangolare.

Il margine superiore del *cuneiforme I secundarium dorsale*, che è oggetto del nostro studio, misura mm. 31 e nel suo terzo anteriore, che corrisponde al II metatarsale, è smusso e diretto distalmente; nei suoi due terzi posteriori, corrispondenti al II cuneiforme, è tagliente, nel complesso è quindi foggiato esattamente come il margine omologo del cuneiforme I normale. Gli altri due margini infero-mediale ed infero-laterale sono leggermente ondulati.

Os cuneiforme I secundarium plantare.

Quest' osso offre una forma di cilindro, tronco alle due estremità e disposto nel piano orizzontale; presenta a considerare sei faccie una anteriore o distale, una posteriore o prossimale, una superiore o dorsale, una inferiore o plantare, una mediale ed una laterale; e quattro margini due superiori e due inferiori.

La faccia anteriore o distale (Fig. 1, *a'*) è tutta articolare; misura, nel suo diametro verticale mm. 16, nel suo diametro trasverso mm. 19. Essa è irregolarmente quadrilatera, concava nel senso verticale, convessa trasversalmente. Il lato superiore di questo quadrilatero è rettilineo, gli altri tre sono abbastanza regolarmente convessi e gli angoli sono arrotondati. Può anche presentarsi di figura ovalare o di elisse o triangolare (GRUBER).

La faccia posteriore o prossimale, completamente articolare (Fig. II, *b'*) misura nel suo diametro verticale 16 mm. e mm. 18 nel suo diametro trasverso; essa è di forma ovalare diretta nel piano verticale, il polo più piccolo di questo ovale è rivolto in alto ed è tronco e, mediante un angolo smusso, si continua con una faccetta articolare, che descriveremo a proposito della faccia superiore di quest' osso. Questa faccia posteriore si continua lateralmente per mezzo pure di un angolo smusso con un altra faccetta semicircolare, di cui diremo a proposito della faccia laterale di questo segmento osseo. Nel suo complesso la faccia posteriore è concava e dal suo centro partono due doccie dirette l' una verso la faccia laterale dell' osso, l' altra verso la sua faccia plantare. Per questa disposizione notansi alla periferia dell' ovale cinque angoli più o meno arrotondati.

La faccia superiore o dorsale (Fig. V), quella cioè che corrisponde alla faccia inferiore del *cuneiforme I secundarium dorsale* sopra descritto, misura nel diametro antero-posteriore 23 mm., è quadrangolare, allungata nel senso antero-posteriore, va restringendosi prossimalmente, e nel suo complesso è pianeggiante. Si presenta divisa in due porzioni, l' una mediale, articolare, l'altra laterale, rugosa. La superficie mediale (Fig. V, *m'*) è falciforme a concavità laterale, abbracciante nei suoi due terzi anteriori la porzione laterale non articolare e rugosa; mentre nel suo terzo posteriore occupa trasversalmente tutta la larghezza di questa faccia, foggiandosi a doccia. La sua estremità anteriore si continua ad angolo retto colla superficie articolare della faccia distale od anteriore. La sua estremità posteriore si continua ad angolo smusso e concavo superiormente colla faccetta articolare distale di quest' osso. La porzione laterale (Fig. V, *l'*) non articolare è ovale, rugosa e porosa analogamente a quanto abbiamo riscontrato sulla corrispondente faccia inferiore del *cuneiforme I secundarium dorsale*. Essa è limitata in avanti dall' estremità anteriore della porzione falciforme sopra descritta ed, all' indietro, da una piccola porzione triangolare e liscia, che si continua colla porzione falciforme articolare La forma delle due porzioni mediale e laterale della faccia superiore del *cuneiforme I secundarium plantare*, da noi descritta, può presentarsi sotto diverse modalità, la mediale od articolare può essere cioè triangolare, con la base in avanti a forma di corno convesso medialmente, ovale con la base in dietro, linguiforme col vertice arrotondato in avanti, quadrangolare allungata, a forma di biscotto ecc. ecc.; la porzione laterale, rugosa, non articolare, può essere triangolare, quadrata od ovale (Gruber).

La faccia inferiore o plantare (Fig. VI), che misura nel suo diametro antero-posteriore 29 mm., è perfettamente identica alla faccia plantare del cuneiforme I normale.

La faccia mediale del nostro *cuneiforme I secundarium plantare* (Fig. III, *f' m'*), che misura nel suo diametro antero-posteriore mm. 25, non si differenzia dalla metà inferiore della faccia omologa del cuneiforme I normale. Infatti, essa presenta, in avanti ed in basso, una superficie liscia rotondeggiante per l' inserzione del tendine del *m. tibialis anterior* ed, in dietro, una docciatura nella quale, come è noto, decorre il tendine di detto muscolo mediante una borsa muccosa.

La faccia laterale (Fig. IV, *f' l'*), che misura nel suo diametro antero-posteriore mm. 25, rassomiglia alla metà inferiore di quella del cuneiforme I normale; essa è leggermente concava ed alla sua estremità prossimale presenta una faccetta articolare, semicircolare colla convessità in avanti, leggermente incavata che si mette in rapporto con una faccetta similare esistente sulla faccia mediale del II cuneiforme. Essa, col lato retto, si continua colla faccia articolare prossimale già descritta ed in alto raggiunge la porzione mediale articolare falciforme della faccia superiore dell' osso. Il diametro di questa faccetta semicircolare è di 11 mm. ed il diametro trasverso massimo di mm. 5,5. Secondo Gruber tale faccetta può essere ovale, semiovale, triangolare, quadrata ecc. ecc.; può o non congiungersi colla faccetta articolare della faccia superiore dell' osso il suo diametro verticale oscilla tra 8 e 12 mm. ed il trasverso massimo tra 5 e 8 mm. Nella parte anteriore della faccia laterale del *cuneiforme I secundarium plantare* si nota l'impronta per l'inserzione del *m. peronaeus longus*.

Dei quattro margini del *cuneiforme I secundarium plantare*, i due superiori sono acuti, specialmente il mediale, mentre il laterale è pure acuto ma irregolare nel suo decorso; i due inferiori sono come i corrispondenti nell' osso normale.

Le particolarità che abbiamo ora descritto intorno al caso di *cuneiforme I perfecte bipartitum*, bilaterale, determinano sulle ossa adiacenti altre particolarità nella disposizione delle loro superficî articolari.

Le ossa interessate sono il *cuneiforme II*, il *naviculare*, ed il *metatarsale I*.

Il *cuneiforme II* (Fig. XI), nella sua configurazione esterna generale, non differisce dallo stesso cuneiforme di un piede normale. Alla sua faccia mediale invece della solita faccetta articolare per il cuneiforme I, notansi tre faccette articolari delle quali, due *a*, *b* situate subito al disotto del margine supero-mediale di quest' osso e disposte nel piano orizzontale, divise da un solco verticale ben evidente; la terza *c* è situata inferiormente ed al disopra dell'angolo posterior-inferiore di questa faccia dell' osso.

Delle due faccette superiori, l'anteriore *a* irregolarmente quadrilatera, alta 10 mm., lunga 11 mm., si articola colla faccetta media ovalare descritta sulla faccia laterale del *cuneiforme I secundarium dorsale;* la faccetta posteriore *b*, piccola, semicircolare, alta 6 mm., larga 5 mm., si articola colla faccetta posteriore, *b*, semiovale descritta sulla faccia laterale dello stesso *cuneiforme I secundarium dorsale.*

La faccetta inferiore *c* semicircolare alta 10 mm. e larga 5 mm., si articola colla faccetta corrispondente notata sulla faccia laterale del *cuneiforme I secundarium plantare.*

L'*os naviculare* (Fig. XII) ha forma normale. Nella sua superficie distale od anteriore invece di tre faccette articolari ne presenta quattro *a*, *b*, *c*, *d*, in seguito alla divisione della faccetta interna in due faccette secondarie, una superiore-interna, l'altra inferiore-interna. La superiore-interna, *c*, più piccola, incavata, che corrisponde all'apice della faccetta interna dell'*os naviculare* normale, è di forma triangolare a base dorsale coi lati ben spiccati e si articola colla faccetta pure triangolare, descritta sull'apice dell'*os cuneiforme I secundarium dorsale.* Essa misura in altezza 9 mm. ed in larghezza, in corrispondenza della base, 12 mm. La inferiore-interna, *d*, molto più estesa, irregolarmente triangolare a margini curvilinei, misura in altezza 19 mm. e 18 mm. nella sua maggior larghezza, e si articola colla superficie prossimale del *cuneiforme I secundarium plantare.*

Nel nostro caso non appare lateralmente sull'*os naviculare* la faccetta articolare per l'*os cuboideum*, come si verifica a volte anche nelle condizioni normali. Gruber avrebbe notato tale faccetta articolare sull'*os naviculare* nella maggior parte dei casi di *cuneiforme I perfecte bipartitum* da lui descritti. Lo stesso A. avrebbe osservato varietà di forma della faccetta articolare supero-interna della superficie distale dell'*os naviculare,* presentandosi cioè ovalare, semiovale, semielittica, arrotondata ecc. ecc.

L'*os metatarsale I*, (Fig. XIII) alla sua base od estremità prossimale, nella sua conformazione esterna non differisce dalla norma, però la sua superficie articolare corrispondente a quella distale del *cuneiforme I perfecte bipartitum*, per la perfetta divisione di questo osso, si presenta divisa in due faccette *a, b*, una superiore, l'altra inferiore, da una piccola cresta trasversale, la quale non si estende per

tutta l'ampiezza della base dell' osso, ma alle sue estremità forma, col contorno delle faccette articolari, due piccole intaccature concave, l'una medialmente, l'altra lateralmente. La faccetta superiore, *a*, ovale, è concava e corrisponde alla base del *cuneiforme I secundarium dorsale*. La faccetta inferiore, *b*, ovalare, selliforme, corrisponde alla faccia anteriore o distale del *cuneiforme I secundarium plantare*.

A complemento del nostro studio abbiamo proceduto alla radiografia non solo dei cuneiformi anomali, ma anche di due cuneiformi I normali destro e sinistro e ciò per poter meglio stabilire le eventuali disposizioni delle trabecole nei cuneiformi anomali.

Nel *cuneiforme I normale* (Fig. VII) le trabecole ossee sono disposte in due ordini: le une, cioè, in senso antero posteriore, rettilinee e ben evidenti, le altre dirette frontalmente, curvilinee a concavità prossimale, sono più stipate verso l' estremità dell' osso; queste, portandosi verso la base o faccia plantare dell' osso si rendono più nette, convergendo al tubercolo che serve di attacco al tendine del *m. tibialis posterior*. Nel loro complesso questi due ordini di trabecole formano un reticolato a maglie disuguali.

Nel *cuneiforme I anomalo* di ambo i lati (Fig. VIII) la disposizione trabecolare offre caratteristiche speciali nei due segmenti dorsale e plantare dell' osso.

Nel *cuneiforme I secundarium dorsale* (Fig. VIII, *a*) le trabecole, dirette in senso antero-posteriore, si irradiano a ventaglio dalla estremità distale, ove formano un fascio ben distinto e compatto, verso l' estremità prossimale.

Nel *cuneiforme I secundarium plantare* (Fig. VIII, *b*) le trabecole, dirette in senso antero-posteriore, si comportano come nella metà inferiore del cuneiforme normale.

Le trabecole dirette frontalmente, curvilinee a concavità prossimale si continuano dal *cuneiforme I secundarium dorsale* al *cuneiforme I secundarium plantare*, comportandosi esattamente come nel cuneiforme I normale.

Era naturale che, disponendo di un numero piuttotso considerevole di piedi (600) appartenenti agli scheletri di delinquenti che formano la raccolta di uno di noi (Sperino), intraprendessimo delle ricerche per vedere se altri esemplari del genere si fossero rinvenuti e stabilire quindi una percentuale.

Infatti nello scheletro di Buti Guido (N. 67 della collezione) da Firenze, di anni 26, celibe, condannato ad anni 2 e mesi 11 di reclusione, per furto qualificato continuato, morto per tubercolosi nel reclusorio di Castelfranco Emilia il 3 Marzo 1902, il *cuneiforme I di destra è perfettamente bipartito* e presenta le stesse caratteristiche del caso sopra descritto; il *cuneiforme I di sinistra,* invece, *è imperfettamente bipartito* (Figg. IX e X). E così si ha una percentuale del 0,16 tanto di perfetta quanto di imperfetta divisione.

Questo *Cuneiforme I di sinistra* è identico nei suoi due segmenti, parzialmente disgiunti, per forma e per volume ai segmenti dorsale e plantare del cuneiforme I perfettamente bipartito.

La imperfetta divisione del nostro cuneiforme I notasi evidente sulla superficie anteriore o distale e su quella posteriore o prossimale.

Infatti la superficie anteriore o distale è divisa in due faccette articolari, da un solco trasversale appena marcato, una superiore ovalare col maggior diametro diretto verticalmente, l' altra inferiore col maggior diametro diretto obliquamente dall' alto in basso e dall' esterno all' interno.

La superficie posteriore o prossimale presenta un solco (Fig. IX *s.*) diretto trasversalmente, profondo 6 mm. e largo 1 mm., per cui tale superficie rimane anch' essa divisa in due faccette articolari, l' una superiore, piccola, triangolare, l' altra inferiore, concava, irregolarmente quadrata. Entrambe le faccette articolari si continuano rispettivamente sulla superficie laterale del *cuneiforme I imperfecte bipartitum* con due faccette articolari, le quali, come è noto, si articolano colle corrispondenti faccette del cuneiforme II.

La superficie mediale offre ben marcata la doccia per il decorso del tendine del *m. tibialis anterior* ed una incisura lunga 5 mm., continuazione del solco descritto sulla superficie prossimale di quest' osso.

La superficie laterale, nel suo segmento dorsale, in luogo di tre faccette articolari, come abbiamo descritto nel *cuneiforme I secundarium dorsale* del *cuneiforme I perfecte bipartitum*, presenta una unica faccetta ovalare, diretta in senso antero-posteriore, di cui i due terzi posteriori si articolano col cuneiforme II, ed il terzo anteriore, diviso dal rimanente della stessa faccetta mediante una cresta smussa e verticale, si articola col II metatarsale.

Nel resto il *cuneiforme I imperfecte bipartitum* non si differenzia dal cuneiforme I normale.

Anche di questo ***cuneiforme I imperfecte bipartitum*** abbiamo ottenuto alcune immagini radiografiche. Dall'esame di queste (Fig. X), nella disposizione delle trabecole nulla appare di diverso da quanto si osserva nel cuneiforme normale, solo è degno di nota il fatto della presenza di una sottile striscia di tessuto compatto in corrispondenza del limite di divisione fra i due segmenti dorsale e plantare di questo cuneiforme I.

Il significato morfologico dell'anomalia che abbiamo descritto non è ancora ben chiarito.

GRUBER ammette che nello stadio cartilagineo esistano preformati due cuneiformi I distinti, i quali si ossificano indipendentemente l'uno dall'altro e, o restano divisi per tutta la vita e riuniti per anchilosi in diversa estensione; oppure si presentino accidentalmente due punti di ossificazione nell'unico cuneiforme I preformato in cartilagine, invece di un unico punto, i quali col procedere dell'ossificazione formino due ossa distinte, che possono fondersi parzialmente, o non fondersi affatto, o riunirsi per sincondrosi e formare in seguito due ossa distinte.

MARCHESANO ritiene che tale variazione dell' *os cuneiforme I* dipenda dal fatto che, in questo caso, l'osso si sviluppi da due punti di ossificazione, anzichè da uno come nelle condizioni normali.

Così LE DENTÙ spiega l'anomalia ammettendo che i cuneiformi si sviluppino per due punti di ossificazione, che si fondono all'età di 4 anni.

HARTMANN et MORDRET, GEGENBAUR, TESTUT, POIRIER, QUAIN, DEBIERRE, RAMBAUD et RENAULT, SAPPEY, ROMITI, CHIARUGI, MERKEL, ecc. ecc. affermano l'esistenza nel cuneiforme I, di un unico punto di ossificazione che compare tra il secondo ed il quarto anno di vita.

INCORONATO cerca la ragione di questa varietà del *cuneiforme I* nell'azione muscolare determinata dal *m. tibialis anterior* e dal *m. peronaeus longus*, i quali si inseriscono, rispettivamente, il primo sulla faccia dorsale ed il secondo sulla faccia plantare di quest'osso.

KRAUSE risalendo al periodo precartilagineo e cartilagineo dell'abbozzo del *cuneiforme I* ritiene che quest'osso, a completo sviluppo, contenga in sè due elementi morfologici distinti, due tarsali,

dei quali il mediale o plantare rappresenta il tarsale del prealluce ed il laterale o dorsale quello dell' alluce. Anche il Banchi si associa a questo modo di vedere.

Dal punto di vista dell' anatomia comparata ricorderemo come Pfitzner abbia trovato in alcuni mammiferi, orso, tigre, martora, faina, cane, ecc., non costantemente però, alla parte tibiale del *cuneiforme I* un osso *precuneiforme* o *paracuneiforme* o *parasfenoidale*. Egli ammette che il *cuneiforme I secundarium dorsale,* nell' uomo, corrisponda al cuneiforme I degli altri mammiferi e che il *cuneiforme I secundarium plantare* corrisponda al precuneiforme.

Fra le varie teorie sopra ricordate riguardanti il significato morfologico di questa varietà, quella che pare a noi più razionale è quella sostenuta dal Bardeleben e seguita dal Banchi, il quale, allo scopo di giungere a conclusioni più sicure, giustamente avvisa ad allargare le ricerche sistematiche intorno agli stadî precartilaginei dello scheletro degli arti nel campo dell' Anatomia comparata.

LETTERATURA

MOREL. — *Diversités anatomiques*, « Recueil périodique d' observations de Medecine, chirurgie, pharmacie etc. », Tom. VII, Paris, 8° min., Decembre, pag. 432 (pag. 433, N. 3) 1757. — Ed in: « Sammlung auserlesener Wahrnehmungen », Bd. VII, 8°-pag. 463, Strassburg, 1763; anche A. v. HALLER, *Opera minora*, Tom. III, Lausannae, 1768, 4°-pag. 28.

FR. BLANDIN. — *Traité d' anatomie topographique*, 2.ª edit., Paris, 1834, p. 661.

WENZEL GRUBER. — *Vorläufige Mittheilung über die secundären Fusswurzelknochen des Menschen*, « Archiv fur Anat. Phys. u. wissensch. Medicin. », Leipzig, 1864, p. 289.

MARCHESANO VINCENZO. — *Su di una anomalia delle ossa cuneiformi.* Lettera al Prof. Randaccio di Palermo. « L' osservatore » Giornale siciliano, serie II, vol. IV, fasc. 3.°, Nov. Dic., pag. 273-275 con una tavola. Anno XI, 1864.

JONES SYDNEY. — *Right foot showing two internal cuneiform bones*, « Transactions of the pathol. society of London », Vol. XV, 1864, pag. 189-190.

SMITH THOMAS. — *A foot having four cuneiform bones*, « Transactions of the pathol. society of London », Vol. XVII, 1866, pag. 222-223.

BANKART, I. P. H. SMITH and J. J. PHILIPPS. — *Notes on abnormalities observée in the dissecting room during the winter sessions of 1866-1867-1868.* « Guys hospital Reparts », Vol. XIV, pag. 436, 1869.

STIEDA LUDWIG. — *Ueber secundäre Fusswurzelknochen*, « Archiv f. Anat. Phys. u. wissensch. Medicin. » Leipzig, pag. 108, 1869.

TURNER WILLIAM. — *The Journal of Anatomy and Physiology*, Vol. III, Cambridge e London pag. 448, 1869.

LE DENTÙ. — *Anomalie du squelette du pied, cunéiforme supplementaire*, « Bull. de la Société Anatomique de Paris », pag. 13, 1869. — Ibid. *Cunéiforme surnuméraire.* pag. 546, 1869.

A. FRIEDLOWSKY. — *Ueber Vermehrung der Handwurzelknochen durch ein carpale intermedium, und über secundäre Fusswurzelknochen*, « Sitzungsberichte der math. naturwiss. Classe d. Kais. Akad. d. Wiss. », Bd. LXI, Abth. 1. Wien, 1870, pag. 588-594. 1 Tafel. fig. 3, (pag. 8 dell' estratto).

PH. C. SAPPEY. — *Traité d' Anatomie descriptive.* Troisiéme édition, Tom. I, pag. 461, Paris, 1876.

FLESCH MAX. — *Zerfall des ersten Keilbeins in zwei Tarsalknochen*, « Verhandlungen der physic. medic. Gesellschaft zu Würzburg Neue Folge », Bd. X, 1876-7, pag. 53-56, Taf. I, figg. 5-6.

GRUBER WENZEL. — *Monographie über das zweigetheilte erste Keilbein der Fusswurzel — Os cuneiforme I bipartitum tarsi — beim Menschen*, « Memoires de l' Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg », VII Serie, Tom. XXIV, N. 11 et dernier. St. Petersbourg, 1877, Taf. I e II.

ID. *Varietäten - Beobachtungen aus dem Präparirsaal zu Würzburg*, Ibid., Bd. XIII, 1879, pag. 241.

ID. *Beobacktungen aus der menschlichen und vergleichenden Anatomie.* Heft I, 4.°, Berlin, 1879, pag. 15-18.

INCORONATO ANGELO. — *Di una segmentazione orizzontale anomala del I cuneiforme.* « Resoconto delle adunanze e dei lavori della R. Accademia Medico-Chirurgica di Napoli », Tomo XXXIV, fasc. 4.°, Ottobre-Nov.-Dic., pag. 183, 1880.

ANTONELLI G. — *Rapporto su di una comunicazione del Prof. Angelo Incoronato relativa ad un anomalia delle ossa del tarso.* Ibid.

A. RAMBAUD et CH. RENAULT. — *Origine et dèveloppement des os*, avec Atlas, Paris, 1884.

CHAUVEL et PAULET (DELMAS). — *Dict. encycl. des sc. med.*, 2.ª Serie, Tom. XXV, pag. 16, Art. Pied., Paris 1886.

HARTMANN et MORDRET.— *Sur un point de l' anatomie du premier cunéiforme,* « Bull. de la Sociétè anatomique de Paris », pag. 71-74, 1889.

CH. DEBIERRE. — *Ossification des os du carpe et du tarse*, « Journal de l' Anatomie », T. XXII, Paris 1886; e *Traité élémentaire d' Anatomie de l' homme,* Tom. I, pag. 177, Paris 1890.

PFITZNER W. — *Beiträge zur kenntniss des menschlichen Extremitätenskelets.* « VII Die Variationen im Aufbau des Fusskelets. — Morphologischen Arbeiten. » G. Schwalbe, Bd. VI, pag 444-451, Taf. XII, (1891).

TITONE MICHELE. — *Anomalie Anatomiche — Osservazione prima, Cuneiformi soprannumerari* (1864), pag. 5, Palermo, Tip. editr. G. Bondi e C., 1893.

BLACK A. — *A Specimen of a divided internal cuneiform bone.* Proceedings of the Anat. soc. of. Gr. Brit. and Irl. « Journal of Anat. and Phys. », Vol. XXVIII, 1894, pag. XX.

THANE G. D. — *Some Specimens of divided internal cuneiform bone* ecc. Proc. anat. soc. Gr. Brit. and Irel, 21 April 1894. In « Journal of. anat. and phys. », Vol. XXVIII, p. XX.

KARL VON BARDELEBEN. *Hand and Fuss. Vehandl. d. Anat.*, Gessellsch. Jahrg. 8, 1894, « Anatomischer Anzeiger », 1894.

C. GEGENBAUR. — *Lehrbuch der Anatomie des Menschen*, Bd. I, pag. 312. Leipzig, 1895.

P. POIRIER. — *Traité d' Anatomie humaine*, Tom. I, pag. 261 e 265, Paris 1899.

FR. MERKEL — J. HENLE. — *Grundriss der Anatomie des Menschen*, pag. 97. Braunschweig, 1901.

L. TESTUT. — *Trattato di anatomia umana.* Traduzione italiana, 2.ª ed., del Prof. G. Sperino. Vol. I, pag. 369, Torino, U. T. E., 1901.

G. CHIARUGI. — *Istituzioni di Anatomia dell' uomo*, Vol I, pag. 472. Milano, Società editrice libraria, 1904.

G. ROMITI. — *Trattato di anatomia dell' uomo.* Vol. I, pag. 382 e 384. Milano, Casa editrice Dott. Francesco Vallardi.

BIANCHI STANISLAO. — *Sopra un caso di divisione bilaterale del primo osso cuneiforme in adulto.* « Atti della R. Accademia dei Fisiocritici in Siena », Vol. XVI, Serie IV, pag. 32, 1904.

BANCHI ARTURO. — *Cuneiforme I bipartito. Il primo cuneiforme comprende il tarsale distale del prealluce?* « Monitore zoologico italiano », Anno XVI, N. 3, 1905.

W. KRAUSE. — KARL VON BARDELEBEN *Handbuch der Anatomie des Menschen, Skelet der oberen und unteren extremität,* pagg. 93, 164, 165, Jena, 1909.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Os cuneiforme I perfecte bipartitum.

FIG. I. — a = apice dell' *os cuneiforme I secundarium dorsale.*
a' = faccia anteriore dell' *os cuneiforme I secundarium plantare.*

FIG. II. — b = base dell' *os cuneiforme I secundarium dorsale.*
b' = faccia posteriore dell' *os cuneiforme I secundarium plantare.*

FIG. III. – $f\ m$ = faccia mediale dell' *os cuneiforme I secundarium dorsale.*
$f'\ m'$ faccia mediale dell' *os cuneiforme I secundarium plantare.*

FIG. IV. — $f.\ l$ = faccia laterale dell' *os cuneiforme I secundarium dorsale.*
$f'\ l'$ = faccia laterale dell' *os cuneiforme I secundarium plantare.*

FIG. V. — m = segmento mediale della faccia plantare dell' *os cuneiforme I secundarium dorsale.*
l = segmento laterale della faccia plantare dell' *os cuneiforme I secundarium dorsale.*
m' = segmento mediale della faccia dorsale dell' *os cuneiforme I secundarium plantare.*
l' = segmento laterale della faccia dorsale dell' *os cuneiforme I secundarium plantare.*

FIG. VI. — Faccia plantare dell' *os cuneiforme I secundarium plantare.*

FIG. VII. — Radiogramma dell' *os cuneiforme I normale.*

FIG. VIII. — Radiogramma dell' *os cuneiforme I perfecte bipartitum.*
a = segmento dorsale.
b = segmento plantare.

FIG. IX. — *Os cuneiforme I imperfecte bipartitum* con s solco di divisione.

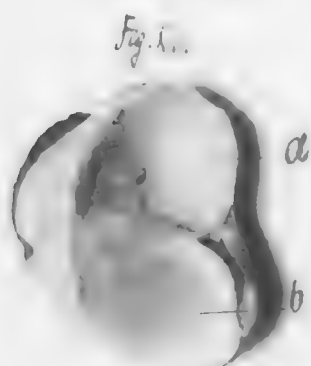
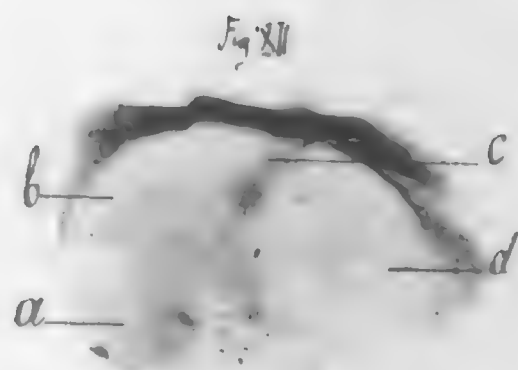
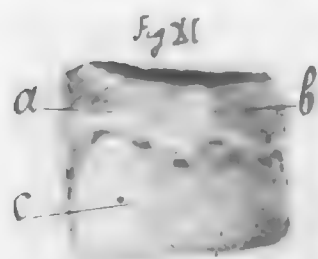
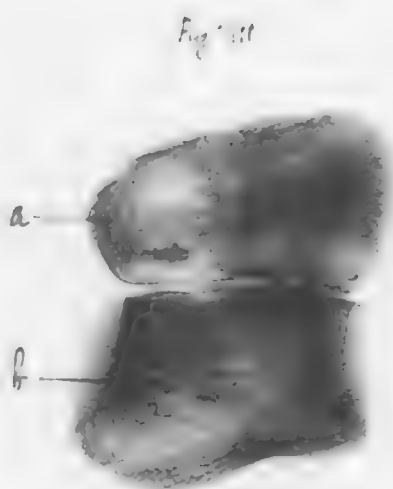
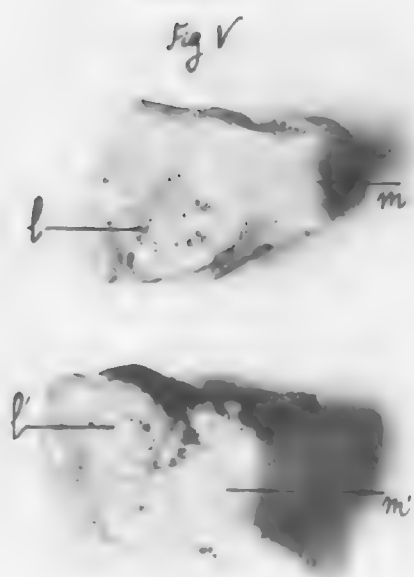
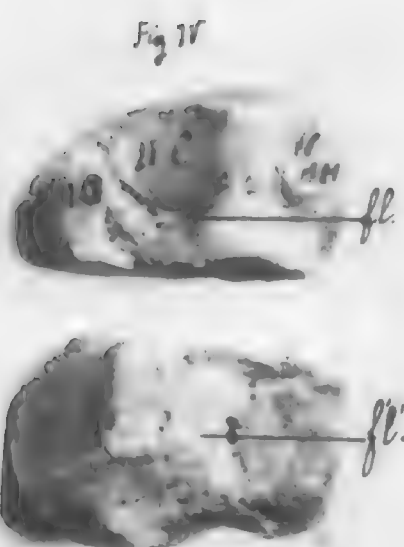
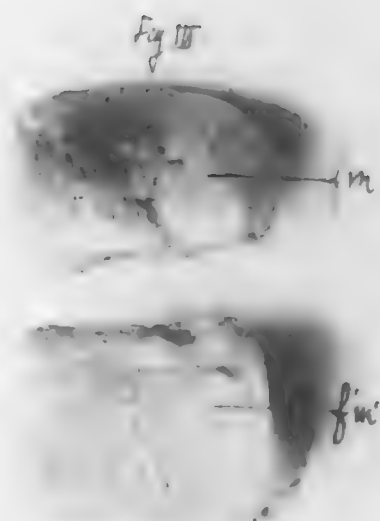
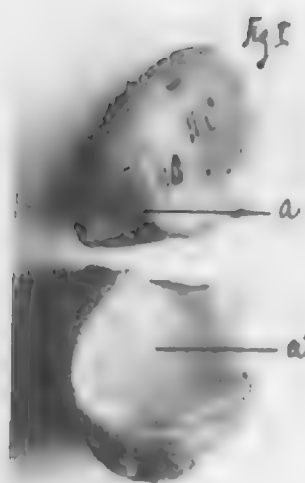
FIG. X. — Radiogramma dell' *os cuneiforme I imperfecte bipartitum.*

FIG. XI. — Faccia mediale dell' *os cuneiforme II* colle tre faccette a, b, c.

FIG. XII. — Superficie distale dell' *os naviculare* colle quattro faccette a, b, c, d.

FIG. XIII. — Estremità prossimale dell' *os metatarsale I* colle due faccette a, b.

Fig. II
b
b'
m
fl.
fl'.
l
l'
m
m'
a
b
s
a
b
c
c
d
a
a
b

A. DEL RE

Sulle reti di curve algebriche ad intersezioni variabili allineate e sui sistemi lineari ∞^3 di superficie algebriche ad intersezioni variabili complanari

La questione di determinare le reti di curve algebriche ad intersezioni variabili collineari, ed i sistemi lineari ∞^3 di superficie algebriche segantisi per terne in punti variabili complanari, io l' ho già, sostanzialmente trattata in diversi lavori, e specialmente nell' articolo *Escursioni Matematiche diverse,* inserito nel Giornale di Battaglini dell' anno 1890, e nella memoria *Sulle caustiche per riflessione e sui punti brillanti delle superficie algebriche*, inserita negli Atti della R. Accademia di Modena, per l' anno 1895. Mi propongo ora di trattare la stessa questione in una maniera più diretta e più ampia, senza ricorrere all' aiuto di una curva, o superficie fondamentale, siccome dapprima facevo, ma introducendo una corrispondenza reciproca ordinaria, o addirittura un connesso piano punto-punto, o spaziale punto-retta; coi quali enti avrò occasione, oltre che di dare maggiore generalità alla questione, altresì quella di insistere sopra alcuni particolari relativi all' argomento che erano stati soltanto accennati, o sostanzialmente trasandati.

§ I.

1. Siano, in un piano σ, 2 connessi, l'uno punto-punto di equazione (in notazione simbolica):

$$\theta_y a_x^n = \theta_y b_x^n = \theta_y c_x^n = \dots = 0 , \tag{1}$$

l' altro retta-retta di equazione:

$$u_\beta^r v_r^s = u_\gamma^r v^s = u_\delta^r v^s = \dots = 0 ; \tag{2}$$

sicchè sia il primo degli *ordini* 1, n ed il secondo delle *classi* r, s. Le u_i, v_i ($i = 1, 2, 3$) rappresentano coordinate di rette, e le x_i, y_i ($i = 1, 2, 3$) coordinate di punti. Una curva covariante simultanea

dei connessi (1), (2) può essere definita come segue. Si prenda, nel piano σ, un punto arbitrario (ξ_1, ξ_2, ξ_3) che sarà tenuto fisso, e poi un punto variabile (z_1, z_2, z_3); a questo punto corrisponderà, per mezzo di (1), la retta di equazione:

$$a_z^n \theta_y = b_z^n \theta_y = c_z^n \theta_y = \dots = 0, \qquad (1')$$

e per mezzo di (2) alla retta ξy corrisponderà la curva-inviluppo;

$$(\xi z \tau)^s u_\beta = 0 \qquad (2')$$

Esprimiamo che la retta (1′) è tangente alla curva (2′); avremo l'equazione della curva covariante domandata nella forma:

$$(\xi z \tau)^s a_z^n b_z^n \dots l_z^n \beta_\theta \gamma_\theta \dots \lambda_\theta = 0 \qquad (3)$$

ove $b, c, \dots, l$ sono simboli equivalenti ai simboli a, e $\gamma, \delta, \dots, \lambda$ sono simboli equivalenti ai simboli β, i primi in numero di $r-1$, e così pure i secondi.

Questa equazione rappresenta, evidentemente, una curva dell'ordine:

$$\nu = s + rn,$$

che ci converrà chiamare *curva polare congiunta* del punto ξ, che diremo *polo congiunto* della curva rispetto ad (1), (2).

[N. B. — Le curve polari congiunte piane, quali rispondono alla definizione che già demmo altrove (Cfr., p. es., *Sulle reciprocità birazionali nulle del piano*, Red. Acc., Napoli 1888, e la memoria *Sulle caustiche ecc.*, già citata) si ottengono, col processo precedente da equazioni della forma:

$$a_y u_x^{n-1} = 0, \quad u_\beta^r v_r^s = 0,$$

supponendo essere $a_x^n = 0$ l'equazione di una curva denominata *fondamentale*. Tali curve hanno perciò l'equazione:

$$(\xi z \tau)^s a_x^{n-1} b_x^{n-1} \dots l_2^{n-1} \beta_\alpha \gamma_\alpha \dots \lambda_\alpha = 0,$$

da me considerata specialmente in quel caso particolare che mi servì a mostrare come *la sviluppata, in un piano a curvatura costante, di una curva dotata di sole singolarità ordinarie è, a meno di una*

correlazione arbitraria, una curva dotata di soli punti doppi; il qual caso particolare io l'ottenevo corrispondentemente alla ipotesi $r = s = 1$ ed alla supposizione che $u_\beta v_\tau = o$ fosse simmetrica (*).

Del resto, la questione potrebbe anche essere considerata da un punto di vista più generale del precedente, sostituendo alla equazione (1) la equazione $\theta_y^m a_x^n = o$, e cercando la condizione di contatto fra la curva-luogo $a_x^n \theta_y^m = o$, e la curva inviluppo $(\xi z r)^s u_r^\beta = o$, ma non è questo caso più generale che presentemente interessa al nostro scopo].

2. Studiamo il sistema delle curve (3). Esso è evidentemente lineare soltanto se $s = 1$, poichè i parametri da cui esso dipende sono i numeri ξ_i $(i = 1, 2, 3)$.

Ogni curva di detto sistema ha, nel proprio polo ξ, un punto multiplo secondo s, perchè il 1.° membro della (3) si annulla al grado s nel punto ξ, e l'equazione complessiva delle s tangenti in questo punto, è precisamente ciò che diventa la (3) quando al posto delle ξ si pongono le z, e viceversa. Questo gruppo di tangenti converrà dirlo ***gruppo delle rette polari congiunte*** del punto ξ; e si ha la proposizione, evidente alla ispezione della (3), che dice ***il gruppo delle rette polari congiunte di un punto è il luogo dei punti le cui curve polari congiunte passano pel punto***, e pure l'altra: ***la curva polare congiunta di un punto è il luogo dei punti di cui qualcuna delle rette polari congiunte passa pel punto;*** proposizioni queste che hanno perfetto riscontro con le analoghe date nei summentovati lavori, e pure negli altri: ***Sulle superficie polari congiunte rispetto ad un connesso di piani e di rette ecc.*** (Rend. Acc., Napoli 1887), ***Sulle curve polari congiunte rispetto ad una coincidenza di piani e di rette*** (Tip. della R. Accad. di Napoli, 1888).

Consideriamo il caso di $s = 1$; in esso il gruppo delle rette polari congiunte si riduce ad una retta sola, ed il sistema delle curve diventa (parametri le ξ) quello di equazione:

$$(\xi z \tau)\, a_z^n\, b_z^n \dots l_z^n\, \theta_\beta\, \theta_\gamma \dots \theta_\lambda = 0 \tag{3'}$$

(*) In questo caso particolare io chiamavo *polari normali* le curve in quistione: ed è notevole la circostanza come, per mezzo della rete di tali curve e di un cambiamento per una trasformazione correlativa non degenere qualunque, si arrivi ***a trasformare uni-determinativamente, in una sol volta, una curva ridotta ad avere solo singolarità ordinarie*** (punti multipli a tangenti distinte) ***in un' altra dotata di soli punti doppi.***

Questo sistema è precisamente *una rete di curve ad intersezioni variabili allineate.* Rispetto a questa rete, *la retta la quale contiene i punti del gruppo d' intersezione variabile di due curve della rete è polare congiunta di ognuno di questi, ciascuno dei quali ha per curva polare congiunta quella curva del fascio della rete da essi determinata, la quale tocca nel punto la retta.* Infatti, presa una retta arbitraria m, un punto P percorra m; la curva f_P polare congiunta di P, descriverà un fascio; il quale, poichè f_P è dell' ordine $1+pn$ avrà $(1+pn)^2$ punti base, dei quali alcuni soltanto potranno essere allineati. Prendiamone uno Q; la retta polare congiunta di Q dovrà passare per tutte le posizioni di P, epperò o sarà indeterminata, o si confonderà con m. Dunque i punti basi di un fascio della rete (3') sono di due specie; dell' una sono quelli che hanno una stessa retta polare congiunta, nell' altra quelli che hanno una retta polare congiunta indeterminata. Questi ultimi punti appartengono a tutti i fasci della rete, epperò sono punti base della rete stessa; quei primi sono soli punti base del fascio e costituiscono le intersezioni variabili delle curve di questa. Dunque come si è enunciato, *la rete è ad intersezioni variabili allineate, e la retta che contiene queste intersezioni è polare congiunta di ognuna di esse.* Quante sono queste intersezioni variabili? La curva f_P taglia m, oltre che in P, in altri pn punti semplici; se Q è uno di questi, dovendo la f_Q, passare per Q, sarà Q uno dei punti base del fascio delle curve pol. cong. dei punti di m. Questi punti base sono, dunque, i pn punti suddetti; epperò *esistono nella rete* $(1+pn)^2-pn=1+pn+p^2n^2$ *punti comuni a tutte le curve della rete medesima.* Ne possiamo subito cercare il significato geometrico.

3. Una retta polare congiunta può riuscire indeterminata, o se è indeterminata la retta (1'), il che richiede che si abbia identicamente:

$$a_z^n \theta_1=0 \ , \ a_z^n \theta_2=0 \ , \ a_z^n \theta_3=0 \ , \tag{4}$$

o se l' inviluppo (2') degenera in modo da abbracciare tutte le rette del piano, cioè se, per qualche sistema di valori delle v_i $(i=1, 2, 3)$, si abbia identicamente:

$$v_\tau^r \beta_1=0 \ , \ v_\tau^r \beta_2=0 \ , \ v_\tau^r \beta_3=0 \ ; \tag{5}$$

ma non soltanto nell' uno o nell' altro di questi due casi, poichè potendosi non soddisfare nè alle (4) nè alle (5), nè potendo i punti

base di un fascio della rete essere tutti allineati, in qualche altra guisa bisognerà che riesca indeterminata la retta polare congiunta di un punto. Osserviamo che, per mezzo della equazione $a_x^n\theta_y = 0$ ... (1''), corrisponde ad ogni punto x, una retta X di cordinate $X_i \equiv a_x^n\theta_i$ $(i = 1, 2, 3)$; e, ad ogni retta X corrisponde per mezzo dell'equazione $u_\beta^r v_\tau = o$ ... (2'') il punto x' di cordinate $x'_i = X_\beta^r \tau_i$ $(i = 1, 2, 3)$; quindi, *la retta polare congiunta del punto* ξ *diventa la retta che unisce* ξ *al punto* x', epperciò una siffatta retta è indeterminata se

$$\rho\xi_i = a_\xi^n b_\xi^n \dots l_\xi^n \theta_\beta \theta_\gamma \dots \theta_\lambda \tau_i \qquad (6)$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

poichè allora si possono considerare, come rette polari congiunte del punto ξ tutte le rette del fascio (ξ). Eliminando fra queste equazioni, omogenee nelle ξ, le medesime ξ, si ottiene un'equazione in ρ, le cui radici ci permettono di trovare quelle terne di valori delle ξ che rappresentano punti in quistione. Se le (4) e (5) non sono soddisfatte, il numero delle soluzioni di dette equazioni è appunto $1 + rn + r^2n^2$. Supponiamo $r = 1$, e supponiamo che le (4) siano soddisfatte in modo che le curve corrispondenti abbiano uno stesso punto multiplo secondo i nel punto ζ; allora, prendendo le successive polari di un punto arbitrario h_i $(i = 1, 2, 3)$ rispetto alla

$$(\xi z \tau) a_z^n \theta_\beta = 0 \qquad (7)$$

si troverà che per $z_i = \zeta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ la prima di esse che non si annulla è la i^{ma}. Dunque, *ogni punto multiplo secondo* i *per le curve della rete* $a_z^n\theta_y = 0$, *è pure multiplo secondo* i *per le curve della rete* (7); epperò, detti $i_1, i_2, \dots i_t$ i gradi di multiplicità dei diversi punti comuni alle (4), troviamo che *il numero dei punti che hanno un fascio di rette polari congiunte è*

$$\nu = n^2 + n + 1 - \sum_{m=1}^{m=t} i_m^2 . \qquad (\varepsilon)$$

Questo numero, giova notarlo, *rappresenta pure quello dei punti che hanno una stessa retta corrispondente rispetto alla trasformazione reciproca, cremoniana o non, data dalle formule* $\rho u_i = a_x^n\theta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ *e ad una correlazione arbitraria* $\rho u_i = v_\beta \tau_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

4. Se supponiamo che le curve (4) facciano parte di una rete cremoniana, il numero delle intersezioni assorbite dei punti base è

$n^2 - 1$. Questo numero rappresenta pure altrettante intersezioni assorbite dai punti base della rete (7); epperò ne rimangono ulteriormente:

$$n^2 + n + 1 - (n^2 - 1) = n + 2,$$

la cui provenienza risponde appunto all'ultimo dei modi sopra indicati, giacchè, supponendo essere r', r'' simboli equivalenti ai simboli r', e β', β'' simboli equivalenti ai simboli β, non è, in generale,

$$\begin{vmatrix} \tau_1 \beta_1 & \tau_2 \beta'_1 & \tau_3 \beta''_1 \\ \tau'_1 \beta_2 & \tau'_2 \beta'_2 & \tau' \beta''_2 \\ \tau''_1 \beta_3 & \tau''_2 \beta'_3 & \tau''_3 \beta''_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Nel caso in esame, essendo le espressioni $\beta_k \tau_k$ dei numeri arbitrarii, possiamo scrivere le (6) nella seguente forma effettiva:

$$\left. \begin{array}{c} \rho \zeta_i = \alpha_{i1} \varphi_1 + a_{i2} \varphi_2 + a_{i3} \varphi_3 \\ (i = 1, 2, 3) \end{array} \right\} \qquad (8)$$

ove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono forme cremoniane del grado n, e dire che *il numero delle soluzioni comuni alle equazioni* (8) è $n + 2$, ovvero che *in una corrispondenza cremoniana del grado* n *esistono* n + 2 *punti uniti se non esiste una curva di siffatti punti.* Questa prop. fu data dal Cremona nel 1863, ed io stesso vi sono giunto con considerazioni di altro genere pure nella mia Nota: *Sui sistemi di rette cremoniani,* inserita nei Rend. dell'Acc. dei Lincei per l'anno 1893, pag. 456, § II, n.° 4 in fine; ma è notevole il modo come vi si giunge ora. Anzi, dall'avvicinare questo risultato coi precedenti si ha la proposizione: *I punti fondamentali di una trasformazione birazionale del grado* n, *ed i punti uniti sono punti base di una rete di curve dell' ordine* n + 1 *ad intersezioni variabili allineate;* proposizione che può essere estesa ad una trasformazione uni-razionale qualsiasi di un piano in se stesso.

5. Si domanda: Tutte le reti di curve i cui gruppi di punti variabili appartengono ad altrettante rette, hanno la genesi precedente? Se ci limitiamo a quelle reti che contengono per ogni retta un sol gruppo di punti, e che potrebbero chiamarsi di 1.ª classe, il metodo della enumerazione delle costanti dice di sì; però si sa che questo metodo può qualche volta condurre a delle conseguenze erronee. Assicuriamoci della risposta affermativa in altra guisa.

Diciamo:

$$f = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0 \qquad (9)$$

una rete di curve della specie che consideriamo, essendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i parametri variabili con le curve della rete, e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ funzioni omogenee di uno stesso grado n nelle coordinate di un punto. È evidente che i gruppi variabili di punti d'intersezione non possono contenere ciascuno più di $n-1$ punti; perchè, per ogni punto della retta che contiene il gruppo deve passare una sol curva che contiene il gruppo stesso; nè ve ne possono essere un numero $m < n-1$. Infatti, immaginiamo eseguito un cambiamento del piano π_x dei punti x nel piano π_y dei punti y per mezzo delle formule:

$$\rho y_1 = \varphi_1(x) \ , \ \rho y_2 = \varphi_2(x) \ , \ \rho y_3 = \varphi_3(x) ; \qquad (10)$$

allora, ad ogni retta $v_y = o$ del piano π_y corrisponderà in π_x la curva della rete suddetta che ha per equazione $\Sigma v_i \varphi_i = o$ ... (11); e, ad ogni retta $u_x = o$ del piano π_x corrisponderà in π_y quella curva la cui equazione si ottiene eliminando le x fra le (10) e la $v_x = o$. Diremo $F = o$ questa eliminata; essa rappresenterà una curva dell'ordine n, poichè i punti comuni in π_x ad una retta, e ad una curva della (9) che è pur una curva (11), hanno appunto per corrispondenti i punti comuni alla $F = o$ corrispondente della retta in π_x ed alla retta in π_y corrispondente della curva in π_x. La retta in π_x, essendo stata presa arbitrariamente, non passa, in generale, per niuno dei punti base della rete (9), ed inoltre, non avendo punti multipli, ed essendo razionale, avrà per curva corrispondente $F = o$, una curva i cui punti multipli non proverranno altro che dal fatto di trovarsi sulla retta più punti per tutti i quali passano curve della rete. La $F = o$, essendo dell'ordine n e razionale, ha dei punti multipli i quali debbono equivalere $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ punti doppi; epperò detti $r_1, r_2, \dots r_s$ i loro gradi di moltiplicità, si dovrà avere:

$$r_1(r_1-1) + r_2(r_2-1) + \dots + r_s(r_s-1) = (n-1)(n-2) .$$

Ne segue che sulla retta vi dovranno essere gruppi di $r_1, r_2, \dots, r_s$ punti per ciascuno dei quali passano fasci della rete; ma, stante la ipotesi che questa è a gruppi di m punti variabili, dovrà essere $r_1 = r_2 = \dots = r_s = m$, epperò pure $sm(m-1) = (n-1)(n-2)$. Sic-

come poi abbiamo supposto pure che la rete debba essere di 1.ª classe ($s = 1$), sarà finalmente:

$$m(m-1) = (n-1)(n-2), \text{ e quindi } m = n-1.$$

Dunque, una rete di curve d' ordine n *la quale contenga gruppi di punti variabili per modo che la retta di uno dei detti gruppi non sia pure retta di un altro è una rete di curve ad* n — 1 *intersezioni variabili.* Sono quindi, p. e., escluse dalle nostre considerazioni quelle reti di curve che diano origine ad involuzioni di classe (cfr. il N. B. secondo alinea, in fine della Memoria) maggiore di 1.

Prendiamo un punto P nel piano della rete, e consideriamo il fascio delle curve di questa che passano per P; è allora determinata la retta p che contiene P, e gli altri $n-2$ punti che, insieme a P, costituiscono gli $n-1$ punti base del fascio, variabili col fascio stesso. Viceversa, data arbitrariamente una retta p, è individuato siccome risulta dal ragionamento precedente, il gruppo degli $n-1$ punti che sono (sulla retta) base di un fascio della rete, e ciascuno di questi individua, a sua volta, la retta. Dunque, una corrispondenza $(1, n-1)$ si trova posta per mezzo della supposta rete, fra i punti e le rette del piano; noi diremo che il punto P e la retta p sono *corrispondenti* quando si deducono l' uno dall' altro nel modo anzidetto. Quale è la curva generata dai corrispondenti dei punti di una stessa retta r, allorchè questo passa per un punto fisso P? La curva passa evidentemente per P, ed è inoltre dell' ordine n perchè oltre a P vi sono altri $n-1$ punti della curva su r. Di più, la curva passa tante volte per ogni punto $i^{plo} A_i$, base della rete, quanti sono i punti del gruppo di $n-1$ punti giacenti sulla PA_i che si raccolgono in A_i, cioè appunto i. Dunque, la curva in quistione ha in comune con quella curva della rete che tocca p in P tutti i punti multipli ciascuno col suo grado di multiplicità, ed altri $n-1$ punti, uno dei quali è P dove ha la medesima tangente. Quest' ultima curva si confonde dunque con quella prima, e noi la diremo curva corrispondente del punto P; e vediamo così che « la curva corrispondente di un punto è il luogo dei punti le cui rette corrispondenti passano pel punto, e che la retta corrispondente di un punto è il luogo dei punti le cui curve corrispondenti passano pel punto » precisamente nella maniera stessa che per le curve e le rette polari congiunte.

La corrispondenza fra i punti $P\ (x_1, x_2, x_3)$ e le rette $p\ (u_1, u_2, u_3)$ sia posta dalle relazioni:

$$u_1 : u_2 : u_3 = \varphi_1(x) : \varphi_2(x) : \varphi_3(x) \tag{11}$$

ove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono funzioni omogenee del grado n nelle x_1, x_2, x_3. Si dovrà avere identicamente:

$$x_1\varphi_1(x) + x_2\varphi_2(x) + x_3\varphi_3(x) = 0\,; \tag{12}$$

epperò pure:

$$\varphi_i(x) + x_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + x_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + x_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_i} = 0\,. \qquad (i=1,2,3)$$

Ma è per l'omogeneità:

$$n\varphi_i(x) = x_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_3}\,;$$

dunque, sottraendo:

$$(n+1)\,\varphi_i(x) = x_k \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right) + x_l \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} - \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}\right) \tag{13}$$
$$(i, k, l, = 1,2,3\ ;\ 2,3,1\ ;\ 3,1,2)$$

Ne concludiamo che, indicando con f_{12}, f_{13}, f_{23} 3 funzioni razionali omogenee del grado $n-1$ qualunque, la forma più generale delle φ_i è la seguente:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &\equiv x_2 f_{12} + x_3 f_{13} \\ \varphi_2 &\equiv x_1 f_{21} + x_3 f_{23} \\ \varphi_3 &\equiv x_1 f_{31} + x_2 f_{32} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

con $f_{12} = -f_{21}\,, f_{13} = -f_{31}\,, f_{23} = -f_{32}\,.$

Per l'arbitrarietà delle f_{ik} si può supporre che detti $A_i, B_i\,, C_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ dei numeri arbitrarii tali che sia $(ABC) \gtrless$ o si abbia

$$\begin{aligned} f_{12} &= A_1 f_1 + B_1 f_2 + C_1 f_3 = f_A \\ f_{23} &= A_2 f_1 + B_2 f_2 + C_2 f_3 = f_B \\ f_{31} &= A_3 f_1 + B_3 f_2 + C_3 f_3 = f_C\,, \end{aligned}$$

ove f_1, f_2, f_3 sono tre altre funzioni omogenee di grado $n-1$ nelle x_1, x_2, x_3; allora le (14) diventano

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= x_2 f_C - x_3 f_B \\ \varphi_2 &= x_3 f_A - x_1 f_C \\ \varphi_3 &= x_1 f_B - x_2 f_A \end{aligned}$$

e la rete delle φ prende la forma:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f_A & f_B & f_C \end{vmatrix} = 0;$$

ovvero quest'altra:

$$(\lambda x A) f_1 + (\lambda x B) f_2 + (\lambda x C) f_3 = 0, \tag{15}$$

dalla quale apparisce che la rete è rete di curve polari congiunte rispetto alla correlazione:

$$v_1 u_A + v_2 u_B + v_3 u_C = 0 \tag{16}$$

ed al connesso:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0,$$

quando si considerino le $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, come coordinate di un punto.

6. Fra le reti che stiamo considerando quella delle polari normali rispetto ad una curva algebrica $f = o$ dell' ordine n, si ottiene ponendo nella (15):

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \; f_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \; f_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Un' altra rete notevole è quella che si ottiene da quest' ultima supponendo $f = o$ ridotta ad un ennilatero piano; vale a dire supponendo $f = a_x b_x \dots l_x$, ove $a_x, b_x, \dots, l_x$ sono forme lineari in numero di n. La retta polare congiunta di un punto è definita dall' essere la congiungente del punto a quello che corrisponde alla polare del punto stesso rispetto all' n — latero, nella correlazione (16). I punti-base sono in numero di $\frac{n(n-1)}{2}$ provenienti dai vertici dell' n — latero; i punti di un gruppo di poli congiunti sono in numero di $n-1$; dunque, *esistono* $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$ *punti che hanno la stessa* (retta come) *polare rispetto ad un* n — *latero e ad una conica* (e come corrispondente in una correlazione), *all' infuori dei vertici dell'* n — *latero;* proposizione nota del resto per altra via, come caso particolare di quella che riguarda il numero dei punti che hanno la stessa polare lineare rispetto a due date curve algeqriche. (Cfr., p. es.: CLEBSCH, *Leçons sur la Géométrie*, t. II, pag. 112),

e come caso particolare di quella cui si riferisce la formula (ε) data precedentemente in fine del n.° 3. [In questa formula bisognerà limitatamente al caso presente sostituire $n-1$ ad n, e porre $\frac{n(n-1)}{2}$ per $\sum_{m=1}^{m=t} i_m$].

Giova rilevare, tenendo presente la (15), che se si considera la trasformazione:

$$y_1 : y_2 : y_3 = f_A : f_B : f_C$$

razionale in un senso nel caso generale, e tenendo fisso il punto $\lambda\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, la curva polare congiunta di λ si presenta come curva isologica rispetto a siffatta trasformazione, il centro di isologia essendo il punto λ. Dunque *lo studio delle reti di curve ad intersezioni variabili allineate è pure lo studio delle curve isologiche d' una trasformazione* (*uni* — o *bi* —) *razionale.*

§ II.

7. Per trattare nello spazio la questione analoga relativa ai sistemi lineari ∞^3 di superficie algebriche, dobbiamo formare un covariante simultaneo delle equazioni:

$$\theta_y a_x^n = \theta_y b_x^n = \theta_y c_x^n = \dots = 0 \tag{17}$$

$$s_p^m u_\alpha^r = s_p'^m u_{\alpha'}^r = \qquad \dots = 0, \tag{18}$$

ove la prima è del grado n nelle coordinate $x_i\,(i = 1, \dots, 4)$ di un punto e di 1.° grado nelle coordinate y_i di un altro, e la seconda dei gradi m, r rispettivamente nelle coordinate $p_{ik}\,(ik = 12, \dots, 34)$ di una retta e nelle coordinate u_i di un piano. Siffatto covariante, uguagliato a zero, dà una superficie che vien definita come segue. Preso un punto arbitrario $\xi_i\,(i = 1, \dots, 4)$ si cerca di un punto x_i il piano corrispondente per mezzo della (17), indi si esprime che la retta ξx e questo piano appartengono al connesso (18). Supposto che si abbia:

$$s_p = \sum (\tau\tau')_{ik}\, p_{lm}$$

l' equazione della superficie si presenta nella forma:

$$(\tau\tau'\zeta x)^m a^n{}_x\, b^n{}_y \;\dots\; \theta_\alpha\, \theta_{\alpha'} \dots = 0 \tag{19}$$

che è lineare nelle ξ soltanto per $m=1$. In quest' ultimo caso, tenendo variabile le ξ si ha un sistema ∞^3 di superficie algebriche dell' ordine $rn+1$, che, per terne, sono ad intersezioni variabili complanari.

Se la (17) è la prima polare di y rispetto alla superficie $f=a_x^{n+1}$; ed inoltre il connesso (18) è lineo-lineare, allora l' equazione (18) prende la forma:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial \xi} \sum a_{ik,g}(\xi_i y_k - \xi_k y_i) = 0, \tag{20}$$

che è stata già da me considerata nell' art. cit.: ***Escursioni matematiche diverse***, § VIII, n. 22.

Chiamando ***sup. polare congiunta*** del punto ξ la (20) e ***piano polare congiunto*** di ξ il piano dato dalla stessa (20) quando al posto delle x si pongono le ξ e viceversa, e si tengono fisse le ξ, fra i piani e le sup. polari congiunte intercedono relazioni analoghe a quelle che si sono viste fra i punti e le rette polari congiunte. Viceversa, se $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sono funzioni omogenee dello stesso grado nelle coordinate di un punto tali che si abbia:

$$x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3 + x_4\varphi_4 = o,$$

ragionando come in fine del numero 5, si trova che le φ (data la loro razionalità ed omogeneità) possono essere assunte nella forma:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= f_{12}x_2 + f_{13}x_3 + f_{14}x_4 \\
\varphi_2 &= f_{21}x_1 + f_{23}x_3 + f_{24}x_4 \\
\varphi_3 &= f_{31}x_1 + f_{32}x_2 + f_{34}x_4 \\
\varphi_4 &= f_{41}x_1 + f_{4\ }x_2 + f_{43}x_3,
\end{aligned}$$

con $f_{ik} = -f_{ki}$ per tutti i valori di i, k da 1 a 4, e dove le f_{ik} sono funzioni omogenee razionali intiere e di un grado di una unità inferiore a quello delle φ; cosicchè il sistema:

$$\zeta_1\varphi_1 + \zeta_2\varphi_2 + \zeta_3\varphi_3 + \zeta_4\varphi_4 = 0$$

si cambia nel sistema,

$$\sum f_{ik}(\zeta_i x_k - \zeta_k x_i) = 0, \tag{21}$$

il quale è precisamente della forma (20).

Questa questione può essere estesa ad un n — spazio.

8. Se si suppone essere $f=0$ un poliedro di n facce, le superficie rappresentate dalla (20) passeranno tutte per gli spigoli di questo poliedro, avendo un punto doppio in ogni suo vertice; superficie che possono essere dette *poliedrali*. Si incontrano così p. es. dei sistemi lineari ∞^3 di superficie del 4.° ordine con 4 punti doppi, e che passano per gli spigoli del tetraedro di questi punti doppi; dei sistemi ∞^3 di superficie del 5.° ordine con 10 punti doppi ecc., con la proprietà, tanto per le une che per le altre, di essere tre a tre con intersezioni variabili complanari.

N. B. — La presente memoria doveva essere stampata negli Atti di questa Accademia nell'anno 1900. — Il bollo dell'Accademia pel passaggio della Memoria alla stamperia, è accompagnato dalla data *12 Settembre 1900* segnata sul margine superiore della 1.ª pagina del manoscritto dal Segret. Gener. dell'Accad. stessa Conte Ferrari Moreni. — Rimase, non rammento più come, nelle mie mani ed andò smarrita. Avendola rinvenuta se ne fa ora la stampa senza aggiunte, o cambiamenti di sorta.

Le curve d'ordine $n+1$ considerate al n.° 26, ed ai numeri 28, 29 della memoria del Cremona « *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* » (Nota II; Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna) sono della specie che qui si studia, (Cfr. il n.° 6 di questo lavoro). — Sono altresì della stessa specie le curve Ω considerate dal Caporali nel n.° 7 e seguenti della Sua memoria: *Sulle trasformazioni univoche piane involutorie* (cfr. Memorie di Geometria, pag. 116; ovvero: Rend. Acc. Napoli, 1879). Le curve Ω, completate con la curva unita dànno la rete di curve ad intersezioni variabili collineari dell'ordine $n+1$ che proviene dalla trasformazione involutoria generatrice delle Ω secondo l'enunciato dato in fine del n.° 6. Però le Ω da sè sole, come si è detto, costituiscono una rete della specie in discorso. Ogni gruppo è costituito da ν coppie di quella trasformazione birazionale involutoria. Una trasformazione siffatta (rivoluzione di *classe* ν secondo la definizione del Caporali) figura qui come un'involuzione di 1.ª *classe* a gruppi di 2ν punti).

Anche nel n.° 3 della Nota « *Su una famiglia di superficie omoloidiche* » (Rend. Circ. Matematico di Palermo, 1888) del prof.

Montesano si incontra una rete di curve d'ordine n, i cui fasci contengono $n-1$ punti base variabili allineati. — Una Nota del prof. Amodeo venne poi scritta apposta per formare, procedendo per gradi ($n \geq 3$, $n \geq 4$, $n \geq 5$, $n \geq 6, \ldots$!), delle reti di curve, a punti base semplici, della specie in quistione (Rend. Accad. Napoli, Marzo 1896).

Prof. DOMENICO MAZZOTTO

STUDI TERMICI

SULLA

TRASFORMAZIONE ALLO STATO SOLIDO DELLE LEGHE FUSIBILI

(Ricerche preliminari).

Introduzione.

§ 1. — Fino dal 1875 lo Spring (1) scoperse che le leghe fusibili quaternarie di Lipowitz e di Wood (*Pb* + *Sn* + *Cd* + *Bi*) presentavano una recalescenza dopo la loro perfetta solidificazione, e nel 1884 io riconobbi (2):

1.° che uno sviluppo termico, benchè meno accentuato, si aveva anche in leghe binarie, quali le leghe di *Pb Sn* di *Sn Bi* e forse anche nelle leghe di *Sn Zn*, ma in tal caso a tal vicinanza della temperatura di solidificazione da non poterlo differenziare dal calore di solidificazione;

2.° che il fenomeno era reversibile, avendosi nel riscaldamento un corrispondente assorbimento di calore al disotto del punto di fusione.

In seguito (1907) lo Stoffel (3) riscontrava lo stesso fenomeno nelle leghe di *Sn Cd*, pur non arrivando a confermare il fatto osservato da me nelle leghe di *Pb Sn* e *Sn Bi*, ma poco più tardi Rosenhain e Tucker (4) (1908) confermarono il fatto per le leghe di *Pb Sn*, benchè non conoscessero i precedenti miei risultati a tal riguardo.

Non è bene accertata la natura del detto fenomeno; lo Spring lo attribuì, per le leghe di *Pb Sn* ad una polimerizzazione; Rosenhain e Tucker, per le medesime leghe, ad una trasformazione polimorfica dello stagno contenuto nei cristalli misti: lo Stoffel, per le leghe di

(1) SPRING, *Bull. de l'Académie de Belgique*, (2) XXXIX, 548 (1875).
(2) MAZZOTTO, *Mem. Ist. Lomb.*, XVI, pag. 1 (1886).
(3) STOFFEL, *Zeitsch. für Anorg. Chemie*, Vol. 53, p. 138 (1907).
(4) ROSENHAIN e TUCKER, *Transactions Royal Society*, vol. 209, p. 89 (1908),

Sn Cd, lo attribuì ad una reazione chimica: e finalmente io (5) in uno studio più recente (1911) sulle leghe di *Pb Sn* dimostrai che potrebbe considerarsi anche come un fenomeno di soprassaturazione allo stato solido dello stagno disciolto nei cristalli misti; ad ogni modo tutti convengono nel denominarlo col nome generico di *trasformazione*.

Rosenhain e Tucker trovarono inoltre che una lega di *Sn Pb*, mantenuta per sette settimane alla temperatura costante di 175°, presentava ancora il fenomeno di trasformazione, ma alquanto modificato, avvenendo esso ad una temperatura alquanto più bassa e con minore sviluppo termico; io però riconobbi (*l. c.* (5)): che tali modifi ficazioni avvengono con discreta rapidità, bastando per avvertirle mantenere le leghe a temperatura fissa per un'ora ed anche meno, e che si rendono pressochè stabili nell'intervallo di un giorno o poco più.

È certo che per interpretare con maggior sicurezza la natura del fenomeno in discorso, e giudicare se esso sia della stessa natura per le varie leghe che lo presentano, occorre poter misurare l'equivalente termico del fenomeno stesso, e confrontare tali misure tanto per leghe degli stessi metalli in proporzioni differenti, come per leghe di metalli diversi; ma siccome tale equivalente varia col trattamento della lega, occorrerà prima conoscere, a quale trattamento si deve sottoporre la lega, perchè il calore sviluppato sia realmente quello che compete a quella lega, in quelle certe proporzioni.

Io ho creduto quindi opportuno approfondire lo studio del fenomeno tanto qualitativamente come quantitativamente; qualitativamente, ricercando fra le altre leghe fusibili quali presentassero la trasformazione e quali no; quantitativamente, procurando di determinare: la quantità di calore svolta dalla trasformazione, i limiti di temperatura fra i quali essa avviene, e le variazioni che avvengono nel fenomeno in seguito a svariati trattamenti termici della lega.

Trovato il modo di misurare con sufficiente accuratezza il fenomeno, si potrà poi determinare le variazioni che il fenomeno presenta col variare della composizione delle varie specie di leghe, e quindi trarre nuovi elementi per la sua interpretazione.

---

(5) Mazzotto, *Zeitschrift für Metallographie*, Bd. I, p. 289 (1911).

Risultati principali.

§ 2. — I principali risultati di questa ricerca, che saranno meglio svolti alla fine del lavoro, sono:

I. — che presentano trasformazione allo stato solido le leghe di *Sn Pb*, *Sn Bi*, *Sn Cd*, *Sn Tl*, (per le ultime delle quali il fenomeno non era ancora noto), e non la presentano le leghe di *Sn Zn*, *Pb Tl*, *Pb Bi*. Il fenomeno non si è perciò osservato che in leghe di stagno;

II. — che la trasformazione di alcune leghe (*Sn Cd*) è concentrata in uno stretto intervallo di temperatura, ma che per altre si estende ad un intervallo di temperatura superiore a 100°, raggiungendo in alcuni casi (*Sn Pb*) anche la temperatura ordinaria;

III. — che esiste però in ogni caso una temperatura alla quale la trasformazione raggiunge un massimo di intensità più o meno accentuato.

I trattamenti termici cui furono sottoposte le leghe prima di osservarne il raffreddamento, furono:

A) — *Gli arresti in discesa* (maturazioni) arrestando per un tempo più o meno lungo il *raffreddamento* della lega ad una temperatura fissa;

B) — *Gli arresti in salita, ordinarî* (ricotture) arrestando ad una temperatura fissa il *riscaldamento* della lega;

C) — *Gli arresti in salita sopra lega smorzata* (smorzamenti), cioè sopra lega solidificata rapidissimamente immergendola, mentre era perfettamente liquida, nel mercurio freddo:

I risultati furono i seguenti:

IV. — Il calore di trasformazione varia in generale con la specie, temperatura e durata degli arresti, ed il suo valore non è determinabile con precisione; però si può ritenere che si avvicini di più al valore vero quello che si ottiene col trattamento che dà il calore di trasformazione più elevato;

V. — In generale i valori più elevati, tanto della massima intensità di trasformazione che del valore totale di essa, si ottengono dopo prolungati arresti in discesa od in salita alla temperatura eutettica, ed il massimo assoluto, si raggiunge in generale con la lega smorzata; anche la temperatura del massimo di trasformazione ha in tali casi il valore più elevato;

VI. — Abbassandosi la temperatura di arresto al disotto del punto eutettico, si abbassano rapidamente: la temperatura di trasformazione, il massimo valore di questa ed il suo valore totale, giungendo quest' ultimo ad annullarsi per temperature d' arresto anche superiori alla temperatura di massima trasformazione;

VII. — Tra le leghe studiate fanno eccezione al risultato V: la lega di *Sn Cd* che è pochissimo influenzata dai trattamenti termici; una delle leghe di *Bi Sn* (quella più ricca di bismuto) che non risente l' effetto dello smorzamento; ed al risultato VI le leghe di *Pb Sn* per le quali la trasformazione resta sensibile anche dopo arresti a temperature notevolmente inferiori alla temperatura di trasformazione;

VIII. — A parità di peso della lega i valori massimi del calore di trasformazione espressi in una unità arbitraria, sono i seguenti:

LEGA	VI	X	XI	XII	III	IX	IV	V	I
Composizione	2,7 Bi 1 Tl	3 Zn 2 Sn	2 Zn 3 Sn	1 Pb 1 Bi	1 Sn 1 Bi	4 Sn 1 Bi	1 Sn 1 Cd	3 Sn 2 Tl	1 Sn 2 Pb
Calore di trasformazione	nullo	nullo	nullo	nullo	4,56	5.23	5,41	6,79	8,64
Temperatura del massimo di trasformazione	»	»	»	»	92°	80°	125°	157°	155°

IX. — Riguardo alla natura del fenomeno l' ipotesi più verosimile è quella che si tratti in generale di un fenomeno di separazione di uno dei metalli contenuti nei cristalli misti, in causa della diminuzione di solubilità inerente all' abbassamento di temperatura, e che il calore di trasformazione sia l' equivalente del calore di dissoluzione dei due metalli allo stato solido. Però, secondo il mio parere, la separazione del metallo disciolto in eccesso non avverebbe al punto di saturazione, ma le soluzioni solide resterebbero *soprassature* fino al punto di trasformazione e la separazione a quel punto sarebbe perciò più copiosa e violenta;

X. — In seguito a tale ipotesi si può basare, sulla determinazione del calore di trasformazione, un nuovo metodo per determinare la curva di solubilità allo stato solido dei metalli costituenti la lega;

XI. — Le leghe di *Sn Cd* hanno un comportamento speciale che pare rilevi un fenomeno di differente natura, quale una azione chimica fra i due metalli, o, meglio, un effetto della nota trasformazione allotropica dello stagno a 161°.

Metodo di osservazione e di calcolo.

§ 3. — La lunghezza dell' intervallo di temperatura entro il quale il fenomeno di trasformazione si effettua impone, in modo quasi esclusivo, per studiarlo e determinarne l'equivalente termico, l' impiego del metodo di raffreddamento, per quanto tale metodo sia esposto a cause di errore non del tutto rimovibili, difetto però che la rapidità e la semplicità dei suoi responsi gli fa perdonare. Solo le leghe di *Sn Cd*, pei caratteri speciali coi quali si svolge in esse il fenomeno di trasformazione, permetterebbero di tentare con esse il metodo calorimetrico.

Però le curve di raffreddamento, quali ordinariamente si ottengono nello studio delle leghe, male si prestano allo studio quantitativo del fenomeno, specialmente nei casi, molto comuni, in cui la evoluzione termica che lo accompagna, subisce variazioni graduali, in luogo delle variazioni brusche atte a produrre sensibili e misurabili perturbazioni sull'andamento normale delle curve di raffreddamento.

Nella Tavola I è rappresentato, per alcune leghe un tratto della curva di raffreddamento ($T = f(t)$) nel punto in cui la trasformazione è al suo massimo, ed è facile vedere che se in alcuni casi (lega IV, fig. 16.ª e lega I, fig. 13.ª) l' evoluzione termica è chiaramente indicata dalla curva di raffreddamento, in altre (lega III, fig. 5.ª e lega IX, fig. 7.ª) essa è appena accennata, ed in tutti i casi vi è poi grande incertezza sul punto in cui essa termina e ben spesso anche su quello in cui incomincia.

La determinazione delle curve di raffreddamento col metodo differenziale, in cui si notano le differenze di temperatura fra due termometri, uno immerso nella lega l' altro in un corpo neutro (tale cioè che si comporti regolarmente entro i limiti di temperatura dell' esperienza) e che si raffreddano contemporaneamente in uno stesso ambiente, rende invero più accentuati i punti singolari prodotti dalle evoluzioni termiche anormali, ma tale metodo è ancora lontano dal prestarsi a misure di qualche precisione.

Almeno per esperienze come le mie, che non mirano a temperature molto alte, mi pare che il metodo migliore sia quello di raffreddare *successivamente* il corpo neutro e la lega, mettendoli però nelle stesse condizioni cioè nello stesso crogiuolo e nell' identico am-

biente di raffreddamento, e poi confrontare le durate di raffreddamento che la lega ed il corpo neutro hanno presentato fra gli stessi intervalli di temperatura. Per ogni determinato intervallo di temperatura, dT, si hanno così due durate di raffreddamento corrispondenti, t e t_1, la prima per la lega la seconda per il corpo neutro, ed il confronto fra i rapporti:

$$K = t : t_1 \tag{1}$$

che denominerò *rapporti di raffreddamento*, fornisce, assai meglio del confronto delle semplici durate di raffreddamento, una indicazione dei punti nei quali si verificano delle perturbazioni termiche.

Come esempio, fra i molti che si potrebbero portare, riproduco qui sotto: i valori di t ottenuti nell' esperienza 12.ª colla lega I (*Sn Pb*); quelli corrispondenti, t_1, ottenuti col mercurio ed i rapporti $K = t : t_1$. Si osserva che, mentre dalla colonna dei valori di t non si rileva alcuna anomalia di raffreddamento, da quella contenente i valori di K si riconosce un *maximum* di sviluppo termico fra 115°-105°.

TABELLA I.

Intervalli di tempe.ra	Durate di raffreddamento		Rapporti		Differenze	Fasi di trasformazione
	lega t	mercurio t'	$K = t : t'$	normali K'	$\Delta = K - K_1$	
155° — 150°	58	59	99	89	10	
150 — 145	58	62	94	89	5	Iniziale $\Sigma\Delta = 78$
145 — 140	62	65	96	89	7	
140 — 135	69	69	100	89	11	
135 — 130	71	73	97	89	8	
130 — 125	77	78	99	89	10	
125 — 120	84	80	101	89	12	
120 — 115	100	88	114	89	25	
115 — 110	118	93	**127**	89	**38**	Esplosiva $\Sigma\Delta = 75$
110 — 105	125	99	**126**	89	**37**	
105 — 100	126	106	119	89	30	Strascico $\Sigma\Delta = 183$
100 — 95	131	116	109	89	24	
95 — 90	135	125	113	89	20	
90 — 85	139	135	103	89	14	
85 — 80	146	147	99	89	10	
80 — 75	156	160	98	89	9	
75 — 70	170	177	96	89	7	
70 — 65	188	196	96	89	7	
65 — 60	207	218	95	89	6	
60 — 55	235	246	96	89	7	
55 — 50	268	279	96	99	7	
50 — 45	307	318	97	89	8	
45 — 40	369	380	97	89	8	
40 — 35	446	462	97	89	8	
35 — 30	571	581	98	89	9	
30 — 25	757	773	98	89	9	

Nella tabella I sono pure raccolti, per l'esempio prescelto, i valori normali dei rapporti K, le differenze $\Delta = K - K_1$ e le somme $\Sigma\Delta$ di tali differenze per le varie fasi in cui, come vedremo in seguito, può esser diviso il periodo di trasformazione. L'ispezione della colonna Δ, meglio ancora che la colonna K, indica come procede il fenomeno di trasformazione, inquantochè i numeri in essa segnati sono proporzionali al calore di trasformazione nei singoli intervalli di temperatura, e danno quindi una esatta idea della sua distribuzione lungo la scala delle temperature. Così nell'esempio citato si vede che esso presenta un massimo, non però molto spiccato, verso 110°, ma lo sviluppo di calore continua poi in modo sensibile fino alla temperatura ordinaria.

Ma i detti rapporti possono anche servire a calcolare il calore di trasformazione (q) nel dato intervallo di temperatura dT; infatti indicando rispettivamente con P e P_1 i pesi della lega e del corpo neutro, con c e c_1 i loro calori specifici e con μ l'equivalente in acqua del crogiuolo, la quantità di calore Q emessa dal crogiuolo contenente la lega nell'intervallo di temperatura dT nel tempo t sarà:

$$Q = (Pc + \mu)\, dT + Pq$$

e quella Q_1 emessa nel tempo t_1 dallo stesso crogiuolo contenente il mercurio, sarà:

$$Q_1 = (P_1 c_1 + \mu)\, dT$$

e si avrà:

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{t}{t_1} = \frac{(Pc + \mu)\, dT + Pq}{(P_1 c_1 + \mu)\, dT} = K$$

e facendo:

$$K_1 = \frac{(Pc + \mu)}{(P_1 c_1 + \mu)} \qquad (2) \qquad\qquad \Delta = \frac{Pq}{(P_1 c_1 + \mu)\, dT} \qquad (3)$$

sarà:

$$K = K_1 + \Delta$$

I valori di K constano dunque in generale di due parti: l'una K_1 inerente al semplice raffreddamento della lega e dipendente essenzialmente dal suo valore specifico, e l'altra Δ dipendente dall'evoluzione termica dovuta all'eventuale trasformazione.

I rapporti K_1 li chiameremo *rapporti normali*, e sono i rapporti fra t e t_1 che si avrebbero se nell'intervallo dT la lega non

subisse alcuna trasformazione. Vedremo in seguito come si possano determinare questi rapporti con sufficiente esattezza.

Osserviamo intanto che, mentre tali rapporti sarebbero costanti per tutte le temperature se i valori di (c) (c_1) (μ) fossero essi pure costanti, o variabili nello stesso rapporto, essi, nei casi pratici, non presenteranno che variazioni deboli e graduali, dipendenti dalla diversa legge con cui variano con la temperatura, i calori specifici della lega, del corpo neutro e del materiale del crogiuolo.

Noti i valori K_1, la quantità di calore Δ, che per la (3) è proporzionale al calore di trasformazione (q), sarà data da:

$$\Delta = K - K_1 \tag{4}$$

e, per un intervallo di temperatura qualunque, pel quale $P_1 c_1 + \mu$ possa considerarsi costante, il calore di trasformazione sarà dato da:

$$\Sigma \Delta = \frac{P}{(P_1 c_1 + \mu)\, dT} \Sigma q. \tag{5}$$

L'apparecchio e gli esperimenti.

§ 4. — Le leghe si preparavano fondendo direttamente i metalli puri in un bicchiere di ferro smaltato, mescolandoveli energicamente e preservandoli, al primo accenno di ossidazione, con uno straterello di pece greca, che veniva eliminato all' atto che la lega si versava nel crogiuolo dell' esperienza.

Il peso dei metalli mescolati era tale che il loro volume totale, calcolato sulla densità allo stato solido, fosse di 81 cmc., corrispondente alla capacità utile del crogiuolo.

Il crogiuolo, fig. 1.ª, era di ferro, cilindrico, a pareti molto sottili, chiuso da un coperchio, fissato a baionetta ed attraversato da un mescolatore, *m*, a spirale piana. Nel centro del crogiuolo penetrava un tubetto sottilissimo di acciaio *t*, destinato a contenere del mercurio nel quale era immerso il bulbo del termometro. Sopra il coperchio, ed isolata termicamente da esso col mezzo di strati di mica, era fissata una staffa, *s*, portante superiormente un anello, *a*, sul quale si innestava a vite un tubo d' ottone verticale, *v*, fisso superiormente ad apposito sostegno. Il crogiuolo restava così in una posizione fissa, ed al disotto di esso s' introducevano, al momento dell' esperienza, la stufa di riscaldamento od il vaso di raffredda-

mento. La lettura del termometro si eseguiva attraverso una finestra praticata lungo il tubo d' ottone.

La stufa di riscaldamento era una stufa Heraeus a nastro di platino, chiusa al fondo, e riscaldata elettricamente col mezzo della corrente stradale, o, col mezzo di una batteria di accumulatori quando si aveva bisogno di mantenere una temperatura costante.

L' apparecchio di raffreddamento, fig. 1.ª, consisteva in due vasi concentrici, chiusi al fondo, con l' intervallo riempito di ghiaccio frantumato e compresso, i cui interstizi erano riempiti di acqua a zero, mantenuta a livello costante, aggiungendo, durante l' esperimento, nuova acqua a zero di mano in mano che il volume diminuiva per la fusione del ghiaccio. Dopo varie prove ho preferito questo metodo a quello di lasciar colare dal fondo l'acqua di fusione, poichè in questo modo si forma uno strato d'aria, fra il ghiaccio ed il vaso interno, che ritarda il raffreddamento.

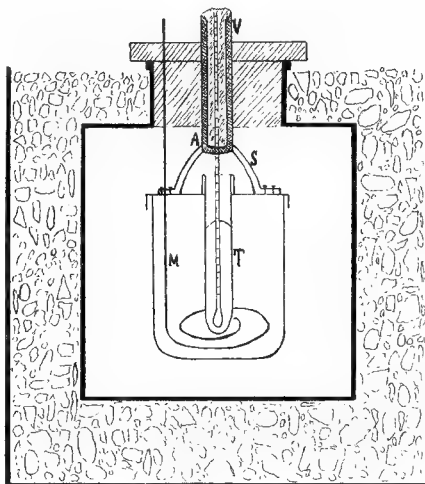



Fig. 1.ª

Le dimensioni principali degli apparati, erano le seguenti;

Crogiuolo. — Diametro 51 mm. altezza 54 mm. — Peso 22 gr. — Capacità utile 81 cmc. — Peso del coperchio con tubetto 25,7 gr. — Peso del mescolatore 7,7 gr. — Peso del mercurio: nel crogiuolo 1104 gr. — nel tubetto 17 gr.

Stufa di riscaldamento. — Diametro interno 68 mm. - altezza utile 70 mm.

Vaso pel raffreddamento. — Vaso interno: diametro 92 mm.; altezza utile 92 mm. Vaso esterno: diametro 150 mm.; altezza utile 150 mm.

Il termometro conteneva 8,5 gr. di Hg., era diviso in $^1/_5$ ed ogni grado era lungo 2 mm.

Condizione essenziale a rendere paragonabili le esperienze è quella di mantenere costante la condizione superficiale tanto del

crogiuolo quanto della superficie interna dell' ambiente di raffreddamento, il che ottenevo mantenendoli affumicati.

Il termometro era diviso fino a 320° e non presentò sensibili variazioni dello zero durante gli esperimenti. La lettura dell' orologio si faceva, in centesimi di minuto, di 5 in 5 gradi del termometro da 300° fino verso a 200°, di 2 in 2 gradi fra 200° e 50° ed al disotto di grado in grado; ma negli intervalli di sosta o di recalescenza del termometro, durante la solidificazione o la trasformazione, si intercalavano letture a brevi intervalli di tempo per avere tutti i dettagli delle curve di raffreddamento.

Le differenze fra le letture successive davano le *durate di raffreddamento;* queste però, anche nei punti in cui il termometro discende regolarmente, presentano delle irregolarità in causa degli errori inevitabili in letture così rapide; per regolarizzare queste differenze trovai molto utile sostituire, a ciascuna di tali differenze, la media fra essa e le due fra le quali è compresa.

Colle differenze così corrette calcolava le durate di raffreddamento di 5 in 5 gradi da introdursi nel calcolo dei rapporti K.

In modo identico che per le leghe, effettuava le esperienze col crogiuolo riempito di mercurio, che serviva da corpo campione; tali esperienze si ripetevano per verifica ogni qualvolta si aveva occasione di vuotare il crogiuolo. Ma per quanto si abbia avuto la massima cura di mantenere costanti le condizioni delle esperienze, pure, nella lunga serie di esse, si notarono delle piccole variazioni nelle durate di raffreddamento del mercurio; perciò nel calcolo di ogni lega si usarono per (t_1) le medie dei valori dati dalle esperienze col mercurio immediatamente precedenti e seguenti le esperienze fatte con quella lega.

Il primo esperimento con ciascuna lega era il così detto *raffreddamento diretto* da 300°, nel quale, portata la lega alla temperatura di 300°, se ne effettuava in generale la solidificazione nell' aria libera, invece che nel solito ambiente a zero; naturalmente tali durate di raffreddamento venivano confrontate con quelle del mercurio raffreddato esso pure nell' aria libera alla stessa temperatura. Se anche la solidificazione si fosse effettuata nell' ambiente a zero, la fusione del ghiaccio non sarebbe stata abbastanza rapida per compensare la grande quantità di calore sviluppato dalla lega, e ne verrebbe alterata la temperatura dell' ambiente e con essa la velocità di raffred-

damento allo stato solido, che è quella che più premeva mantenere regolare. L'introduzione del crogiuolo nell'ambiente a zero si effettuava rapidamente dopo avvenuta la solidificazione, e si nota quindi, in qualche caso, una piccola discontinuità nelle durate di raffreddamento nei primi istanti del passaggio del crogiuolo dall'aria libera all'ambiente a zero.

Riguardo ai *raffreddamenti* dopo arresti in discesa, poco ho da osservare; portata la lega a 300° si raffreddava nell'aria, mescolandola con l'apposito agitatore finchè incominciasse la solidificazione, ed arrivata che fosse alla temperatura stabilita per l'arresto, la si portava nella stufa preventivamente riscaldata alla temperatura voluta. Non si aveva che da mantenere costante la temperatura regolando la corrente, e, trascorso il tempo stabilito per l'arresto, introdurre rapidamente il crogiuolo nell'ambiente di raffreddamento, e fare l'osservazione.

Speciali precauzioni bisogna invece avere nel procedere cogli *arresti in salita;* prima di incominciarli si deve portare la lega ad una condizione fissa, che diremo ***condizione normale allo stato solido***, per la quale scelsi la condizione alla quale si trova, dopo un raffreddamento diretto, da 300° alla temperatura ordinaria, ed un susseguente riposo di alcune ore a questa temperatura; la si porta poi nella stufa di riscaldamento già portata ad una temperatura alquanto superiore a quella di arresto, e la si regola in modo che, la temperatura della stufa discendendo e quella della lega ascendendo, si incontrino alla temperatura stabilita per l'arresto, terminato il quale, si fa l'esperienza di raffreddamento a zero nel modo solito.

Le osservazioni con gli arresti in discesa sono completamente paragonabili fra loro qualunque sia l'epoca e l'ordine in cui si sono seguite, perchè, partendosi dalla lega allo stato liquido, le condizioni iniziali sono identiche. Non è così per le osservazioni con gli arresti in salita, a meno che non si riconduca ogni volta la lega alla condizione normale allo stato solido, ciò che provocherebbe un grande spreco di tempo.

Si può invero passare immediatamente da un'esperienza alla successiva, senza ricondurre ogni volta la lega alla condizione normale, ma è necessario procedere con un certo ordine, poichè ho osservato che l'effetto prodotto da un dato arresto, non è solo dipendente dalla sua durata e dalla temperatura alla quale è avvenuto, ma

altresì del trattamento preventivo subito dalla lega allo stato solido; così, per considerare il caso più semplice, se si fanno diverse ricotture successive tutte della stessa durata ed alla stessa temperatura, e dopo ciascuna di essa si effettua il raffreddamento nell' ambiente a zero, la trasformazione che si osserva aumenta da una ricottura alla successiva, benchè i successivi raffreddamenti avessero presumibilmente ricondotto la lega a condizioni iniziali identiche. Si può giustificare il fatto in questo modo: durante una prima ricottura i cristalli solidi si modificano lentamente col tempo, sciogliendo p. e. una certa parte del metallo vicino: col raffreddamento, il metallo disciolto si separa dal solvente, ma rimane con esso in uno stato di intimità maggiore di quello che aveva prima, così che, nella ricottura seguente, la loro soluzione si farà molto più rapidamente, ed in pari tempo si scioglierà maggior quantità di metallo, e così via, così che gli effetti delle ricotture successive si sovrappongono parzialmente. Ne risulta che, mentre con gli arresti in discesa si possono fare gli arresti lunghi o brevi, a temperatura alta o bassa, in un ordine quale si voglia così da meglio approffittare degli intervalli di tempo disponibili, cogli arresti in salita bisogna procedere con ordine, ed eseguire prima gli arresti di più breve durata, poi quelli di durate di mano in mano più lunghe alla stessa temperatura, e, volendo mutare la temperatura di arresto, si può passare a temperatura più alta ma non più bassa.

Tabelle numeriche e tavole grafiche dei risultati.

§ 5. — Distingueremo le esperienze in *preliminari* e *definitive;* nelle prime comprenderemo le esperienze di raffreddamento eseguite col mercurio e coi metalli puri costituenti le leghe studiate, nelle seconde le esperienze fatte sulle leghe; anche queste le divideremo in due categorie cioè raffreddamenti totali (da 300° a 25°) e *raffreddamenti frazionati*, effettuati cioè al disotto di una certa temperatura, dopo aver sottoposta la lega ai prestabiliti trattamenti termici a quella temperatura.

Per ogni esperienza si hanno da osservare o calcolare i seguenti valori:

a) Le *letture dirette* del cronometro all' istante del passaggio della colonna per le divisioni del termometro;

b) Le differenze fra le successive letture costituenti le ***durate di raffreddamento*** per 5°, 2°, 1° rispettivamente;

c) Le *medie* di tre durate successive, fra egual numero di gradi, per compensare gli errori di lettura;

d) Gli *aggruppamenti* delle durate di raffreddamento per intervalli di 5° in 5°, comprendenti circa 55 intervalli nei raffreddamenti totali e 30 nei frazionati. (Nella tabella **A** sono riprodotte le durate di raffreddamento avute col mercurio);

e) Calcolo dei *rapporti* $K = t : t_1$ fra le durate di raffreddamento t della lega e quelle t_1 del mercurio per ciascuno dei detti intervalli. (Nella tabella **A** si hanno gli esempi di tali rapporti pei metalli puri);

f) Determinazione dei *rapporti normali* K_1 che si avrebbero se nei singoli intervalli la lega non subisse trasformazione o solidificazione. (I rapporti normali adottati per le singole leghe sono registrati nella tabella **B**);

g) Calcolo, pei singoli intervalli di temperatura, delle ***differenze*** $\Delta = K - K_1$ rappresentanti il calore di trasformazione o di solidificazione in ciascun intervallo;

h) Addizione delle differenze Δ per tutto l'intervallo di trasformazione o per speciali porzioni di esso.

Come esempio del procedimento di calcolo a partire dai valori *d*) potrà servire la tabella **I** (§ 3).

Il riportare tutti questi valori per le esperienze qui riferite (120 circa, e che sono circa la metà di quelle eseguite, essendosi tralasciate le esperienze di controllo, quelle con risultati simili, quelle incerte o mal riuscite per insuccessi o dubbi nei trattamenti termici etc.) importerebbe una soverchia mole di tabelle, mi sono perciò limitato a riprodurre i valori finali più importanti e quelli che permettono di risalire da questi ai valori esperimentali più diretti dai quali furono dedotti. E essi sono raccolti nelle tabelle **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, riunite in fine alla memoria insieme alle tavole relative.

La tabella **A** si riferisce alle esperienze preliminari; essa contiene:

I. Le durate (valori *d*) di raffreddamento di 5 in 5 gradi del corpo campione (mercurio) espresse in centesimi di minuto, le quali possono, a meno di piccole differenze, ritenersi costanti per tutte le osservazioni comprese fra gli stessi intervalli di temperatura;

II. I valori dei rapporti $K = t : t_1$ (valori *e*) pei metalli puri, rapporti che come si dirà servono a discutere i rapporti normali da adottarsi per le leghe.

Per le esperienze sulle leghe mi sono limitato a riprodurre completamente nelle altre tabelle, i rapporti normali K_1 ed i valori di Δ i quali rappresentano quantitativamente con sufficiente chiarezza le porzioni di calore di solidificazione o di trasformazione emesse nei singoli intervalli di temperatura ed espresse nella unità arbitraria U (v. § 6).

Di queste tabelle la B si riferisce ai raffreddamenti totali di tutte le nove leghe studiate, eseguiti a partire da 300°, temperatura alla quale tutte le leghe, meno le due di *Zn Sn*, erano completamente liquide. I valori di Δ, nella parte superiore della tabella, rappresentano la legge secondo la quale le singole leghe sviluppano il loro calore di solidificazione, legge, la quale benchè esca dal piano principale del presente lavoro, è utile per la discussione dei risultati riguardanti il calore di trasformazione; nella parte inferiore della tabella i valori di Δ si riferiscono allo sviluppo di calore nella trasformazione delle leghe che la presentano, così che, nelle prime quattro leghe che non presentano trasformazione, i valori di Δ sono, nella parte inferiore, sensibilmente eguali a zero; per quelle con trasformazione, invece che riprodurre i valori di Δ dati dal raffreddamento totale da 300°, ho rappresentato quelli dell'esperienza in cui la trasformazione è più appariscente.

Nella stessa tabella B ho riprodotto pure i valori normali dei rapporti K_1 adottati per le singole leghe, i quali valgono, non solo per le esperienze della tabella B, ma anche per quelle contenute nell'altra tabella riferentesi alla stessa lega. Questi valori di K_1, che variano da lega a lega perchè dipendenti specialmente dal loro calore specifico, aggiunti ai corrispondenti valori Δ, permettono di risalire ai valori dei rapporti reali K (valori *e*), e moltiplicando questi pei valori t_1 della durata di raffreddamento del mercurio, registrati come si disse nella tabella A, si possono ottenere le durate di raffreddamento osservate colle leghe (valori *c*) che per brevità non vennero riprodotte.

Per diminuire la mole della tabella B gli intervalli furono presi di 10° in 10° invece che di 5° in 5° riunendo insieme a due a due i successivi valori di Δ degli intervalli di 5°.

Le tabelle C, D, E, F, G, si riferiscono semplicemente al calore di trasformazione, quale venne ottenuto dopo sottoposte le leghe a differenti trattamenti termici, e non si ha che da scorrere verticalmente le colonne per riconoscere la legge di emissione del calore di trasformazione rispetto alla temperatura, e scorrere le tavole orizzontalmente per riconoscere le variazioni che i trattamenti termici fanno subire a detta legge.

In calce alle tabelle si trova anche una riduzione dei valori totali di $\Sigma\Delta$ nelle ordinarie *calorie per chilogramma* di lega, calcolate nel modo che si dirà al § 6°.

Alle precedenti tabelle corrispondono altrettante tavole, contraddistinte colla stessa lettera della tabella corrispondente e che ne rappresentano graficamente i risultati.

Nella tavola A sono rappresentati graficamente i valori dei rapporti $K = t : t_1$ forniti dai metalli puri ed esposti nella tabella A, e fra le grafiche di due metalli sono rappresentati quelle dei valori normali K_1 valutati per le leghe contenenti i metalli stessi secondo i criterî che saranno svolti al § 6°.

Nella tavola B, i valori Δ per i singoli intervalli di 5° in 5°, sono rappresentati da rettangoletti orizzontali tratteggiati che partono dal punto dell' asse delle ordinate corrispondente all' intervallo, di temperatura al quale si riferiscono, cosicchè l' area coperta dai detti rettangoli rappresenta il calore di solidificazione o di trasformazione sviluppato fra le due temperature limiti dell' area stessa. La scala fu scelta in modo che il calore di trasformazione fosse rappresentato in modo ben visibile, ma, siccome nella stessa scala il calore sviluppato al punto eutettico sarebbe in generale rappresentato da un orizzontale lunghissima, così di questa non venne rappresentata che la decima parte, col mezzo di un rettangoletto *non tratteggiato* che porta scritto: calore eutettico — $^1/_{10}$ del valore totale......

Al disotto dei valori Δ relativi alla solidificazione si trovano rappresentati nello stesso modo i valori Δ del calore di trasformazione, e, naturalmente, nelle leghe senza trasformazione, la parte inferiore della linea rappresentativa è verticale.

Ma nelle leghe con trasformazione, oltre alla conoscenza della distribuzione del calore Δ nei varî intervalli di temperatura, occorre quella del calore totale, $\Sigma\Delta$, dato, come si disse, dall' area coperta dai rettangoli: ma per averne una misura più precisa ho rappresen-

tato con un linea punteggiata ($\Sigma\Delta \bigcirc\!\bigcirc\!\odot$) le somme dei successivi valori di Δ rappresentati dai rettangoli a partire dal principio della trasformazione; su tale linea si possono leggere, tanto il valore totale della trasformazione $\Sigma\Delta$ come la parte di essa svolta fra due intervalli qualunque di temperatura.

Questo modo di rappresentazione dei valori di Δ e delle loro somme, per quanto riesca chiaro ed intuitivo, non mi sembrò opportuno per la rappresentazione dei risultati delle tabelle successive, ciascuna delle quali comprende una ventina di esperienze le quali esigerebbero altrettante curve simili a quelle che figurano nella parte inferiore dei diagrammi della tavola B ed occuperebbero quindi uno spazio eccessivo; inoltre quelle curve, se rappresentano chiaramente l'andamento del fenomeno in una data esperienza, non si prestano altrettanto bene al confronto, per noi necessario, dei valori totali e parziali di $\Sigma\Delta$ risultanti da esperienze distinte, specialmente se poco diverse nei loro risultati.

Ho quindi adottato per le tabelle C, D, E, F, G, e nella tavola riassuntiva H, una rappresentazione più concisa, la quale mette sott'occhio il calore svolto nelle principali fasi del fenomeno ed in modo da renderne relativamente facile il confronto.

La trasformazione fu perciò distinta in quattro fasi:

1.ª *La fase iniziale* dal punto in cui essa incomincia a rendersi sensibile fino al punto in cui sta per raggiungere il valore massimo;

2.ª *La fase esplosiva* compresa nell'intervallo di temperatura in cui si ha il più energico sviluppo di calore;

3.ª lo *strascico* nel quale la trasformazione va scemando piuttosto rapidamente conservandosi però ancora discretamente elevata;

4.ª la *coda* nella quale la trasformazione è appena sensibile presentando valori (da cinque unità in giù) che possono considerarsi appena superiori agli errori di osservazione.

Il calore totale di trasformazione è rappresentato dall'altezza di un rettangolo diviso in quattro rettangoli sovrapposti contraddistinti da uno speciale tratteggio, e rappresentanti la somma delle unità di calore sviluppate nelle singole fasi: i numeri interni, indicano le temperature alle quali le singole fasi incominciano o terminano.

I valori numerici del calore di trasformazione si deducono facilmente dalla scala unita al disegno; quelli delle singole fasi sono scritti

a tergo; gli uni e gli altri poi si leggono in calce alle corrispondenti tabelle, nel corpo delle quali i valori Δ dei singoli periodi sono separati da una lineetta (**—**).

I numeri scritti entro un circoletto nel rettangolo (non tratteggiato) rappresentante la fase esplosiva, rappresentano la temperatura di massima trasformazione ed il numero vicino indica di quanti gradi è salito il termometro quando ebbe luogo la recalescenza.

Dai detti diagrammi è facile riconoscere le esperienze nelle quali mancano una o più delle fasi sopradette.

Finalmente nelle tavole C, D, E, F, G, al dissopra di rettangoli rappresentanti la trasformazione, si trovano pure rappresentate le le posizioni relative delle temperature: di arresto, (*A*), della temperatura euttetica (*E*), e della temperatura (*T*) cui corrisponde la fase esplosiva della trasformazione, tutte riferite alla vicina scala delle temperature.

Nella tabella B, in calce alle tabelline delle leghe I e V, (fig. 7.ª e 9.ª) il calore di trasformazione fu rappresentato, come esempio, anche nel nuovo metodo di rappresentazione.

Nella tavola I si trovano altri particolari relativi alle nove leghe studiate, come il diagramma di equilibrio del sistema al quale appartiene la lega studiata ed il posto che questa occupa nel diagramma stesso; così che, in base a questo diagramma, si interpreta facilmente il corrispondente comportamento della lega durante la solidificazione rappresentata nella tavola B, e con tale confronto si viene a conoscere la posizione della lega fra le altre leghe del sistema, conoscenza indispensabile alla interpretazione dei risultati.

In altre figure ho rappresentato due tratti delle curve originali di raffreddamento nelle vicinanze del punto di trasformazione per dimostrare le differenze che si possono produrre in dette curve in seguito ai trattamenti termici cui la lega è sottoposta.

Di queste figure la prima rappresenta la curva ottenuta col *raffreddamento diretto* da 300°, cioè lasciando raffreddare la lega dallo stato liquido senza arrestarne artificialmente il raffreddamento, e l'altra rappresenta la curva di raffreddamento ottenuta dopo il trattamento che ha prodotto la massima modificazione nel calore di trasformazione.

Si vede p. e. che mentre nella lega IV (*Sn Cd*) fig. 16.ª-17.ª, il trattamento termico non produce variazione sensibile nelle curve di

raffreddamento, questa variazione è considerevole nella lega I (*Sn Pb*) fig. 13ª e 14ª e nella lega V (*Sn Tl*) fig. 10-11 nelle quali un semplice rallentamento diventa, dopo il trattamento termico, una notevole recalescenza.

Terminata la serie di arresti ad una data temperatura si può passare senz'altro ad una serie a temperatura più elevata, anche senza ricondurre la lega alla condizione normale, perchè gli effetti della temperatura sono in generale più cospicui di quelli del tempo; ma per confrontare gli effetti di ricotture a temperature differenti e per durate eguali, e più ancora quando si voglia passare da una serie di arresti ad una temperatura a quelli di temperature inferiori, è necessario riportare per ogni singola temperatura la lega alla condizione normale allo stato solido.

La temperatura della stufa durante gli arresti veniva mantenuta il più possibile costante, regolando l'intensità della corrente che la alimentava, e mantenendo così costante la temperatura di un termometro contenuto nella stufa esternamente al crogiuolo. Usando la corrente di una batteria di accumulatori la costanza era soddisfacente, anche nella notte, durante la quale l'apparecchio restava per alcune ore senza sorveglianza; però non si poteva mai ottenere una costanza assoluta e le oscillazioni erano di $\pm$ 1.° Era poi difficile ottenere da una esperienza all'altra la costanza alla stessa temperatura e si avevano, anche a tal riguardo, differenze di $\pm$ 1.°. ciò spiega qualche irregolarità nei risultati degli arresti alla stessa temperatura, bastando la differenza di 1.° per produrre talvolta differenze sensibili nell'effetto prodotto dall'arresto.

Lo *smorzamento* delle leghe si effettuava per poter eseguire gli esperimenti sopra leghe il più possibilmente omogenee, poichè, trattandosi di fenomeni di soluzione di metalli allo stato solido, questa non dipende solo dalla quantità dei due metalli esistenti nella lega, ma altresì dal loro modo di distribuzione, che deve essere il più intimo possibile, non potendo evidentemente un metallo sciogliersi che in quello con cui si trova in intimo contatto.

Questa condizione non è soddisfatta che per le leghe eutettiche, mentre per le altre durante il periodo, talvolta molto lungo, di solidificazione sopra il punto eutettico, si stabilisce, o per formazione di cristalli misti, o per liquazione, una differenza di composizione nei varii punti di una stessa lega, per cui si ha, più che una lega in proporzione determinata, una miscela di leghe in proporzioni differenti.

Io credo sia questa una delle principali difficoltà che si incontrano ad ottenere risultati che corrispondano alla concentrazione totale della lega, ed è presumibile che, colle leghe smorzate, si possa avvicinarsi meglio alla condizione ideale, poichè, la grande rapidità della loro solidificazione deve tendere a mantenere in esse, quasi inalterato, lo stato di omogeneità che avevano allo stato liquido.

Lo smorzamento si effettuava mescolando energicamente la lega allo stato liquido fino al punto in cui doveva incominciarne la solidificazione, ed immergendo allora rapidamente il crogiuolo in un recipiente di mercurio freddo.

In pochi istanti la lega era solidificata e si portava, subito dopo, nell' ambiente a zero per una osservazione di raffreddamento. Il raffreddamento in tal caso avviene con legge molto diversa, che nelle leghe solidificate lentamente; però, se la lega smorzata si ricuoce, mantenendola per qualche tempo a temperatura elevata senza farle toccare il punto di fusione, il raffreddamento ridiventa normale.

Le leghe studiate furono le seguenti:

Lega	I	— 1 p. Sn + 2 p. Pb	(G)
»	III	— 1 p. Sn + 1 p. Bi	(D)
»	IV	— 1 p. Sn + 1 p. Cd	(H)
»	V	— 3 p. Sn + 2 p. Tl	(F)
»	VI	— 1 p. Tl + 2,7 p. Bi	(A)
»	IX	— 4 p. Sn + 1 p. Bi	(E)
»	X	— 2 p. Sn + 3 p. Zn	(B)
»	XI	— 3 p. Sn + 2 p. Zn	(C)
»	XII	— 1 p. Pb + 1 p. Bi	(I)

Ho serbato loro il numero di ordine che hanno nel registro delle esperienze, però per maggior chiarezza dell' esposizione, ho riferito i risultati con esse ottenuti nell' ordine indicato dalle lettere fra parentesi in modo che si presentino per prime le leghe di comportamento più semplice.

Si fecero anche degli esperimenti con metalli puri dei quali parleremo nel prossimo paragrafo.

Calcolo delle esperienze.

§ **6.** — Il calcolo delle esperienze in base alla formula (4) è semplicissimo purchè si conoscano i valori normali dei rapporti:

$$K = \frac{t}{t_1}$$

che presenterebbe la lega se, nell'intervallo di temperatura considerato, non emettesse altro calore che quello dipendente dal suo calore specifico.

Però, quando l'evoluzione di calore per trasformazione è debole, riesce piuttosto difficile discernere in quali intervalli di temperatura questa condizione sia soddisfatta ed in quali no, ed in ogni caso si prova dell'incertezza nello stabilire il vero valore che avrebbe quel rapporto se la detta condizione fosse soddisfatta.

La determinazione dei valori normali K_1 è certamente la parte più delicata del calcolo, però non mancano criteri che possano condurre ad una determinazione abbastanza sicura di tali valori.

Il primo criterio è: che in un determinato intervallo di temperatura, fra i vari valori di K, ottenuti con leghe che hanno subito trattamenti diversi, i più piccoli sono quelli che si accosteranno di più al valore ricercato K_1. Questi valori minimi sono ordinariamente forniti dalla lega riscaldata rapidamente a temperatura inferiore al punto di trasformazione; si fecero perciò dei riscaldamenti così detti rapidissimi (della durata da 5 a 10 minuti) ai quali si faceva seguire un raffreddamento normale a zero gradi. Nelle tabelle la durata dell'arresto per questi riscaldamenti è indicata convenzionalmente con $0,^h0$.

Aumentando la temperatura alla quale si porta la lega coi riscaldamenti rapidissimi, si osserva un progressivo aumento dei valori di K, il quale indica che incomincia ad effettuarsi la trasformazione.

Fatta la media dei valori minimi trovati per un dato intervallo di temperatura si hanno, specialmente per le temperature alquanto al di sotto del punto di trasformazione, dei valori di K_1 abbastanza sicuri; per le temperature più elevate si procede per interpolazione grafica, valendosi della circostanza che sovente, alle temperature comprese fra il punto eutettico ed il punto di trasformazione, i valori di K ritornano normali, e giovandosi pure dei valori che assumono quei rapporti per la lega allo stato liquido.

Una attenta discussione fatta su queste basi conduce a valori di K_1 sufficientemente sicuri, ai quali si può però ancora applicare un valido controllo appoggiandosi su apposite esperienze coi metalli puri, fatte con lo stesso metodo seguito per le leghe; infatti queste esperienze, i cui risultati sono raccolti nella tabella (**A**), danno dei valori dei rapporti K che dipendono essenzialmente dai calori spe-

cifici dei metalli stessi; e siccome i calori specifici delle leghe metalliche seguono la legge dei miscugli, se si costruiscono le linee rappresentanti pei singoli metalli questi valori di K in funzione della temperatura, è evidente che la linea rappresentante i valori normali di K, per le leghe deve: trovarsi compresa fra quella dei metalli componenti, seguirne l'andamento e distare da quella dei due metalli di quantità pressochè inversamente proporzionali al contenuto dei metalli stessi nella lega.

Questa regola pare si verifichi con sufficiente precisione; infatti nella Tavola A si osserva che fra le linee rappresentanti i valori di K ottenuti con lo stagno puro o con lo zinco puro, sono comprese quelle dei valori di K ottenuti con le leghe $3\,Sn + 2\,Zn$ e $2\,Sn + 3\,Zn$, aventi andamento analogo rispetto alla temperatura, e distanze da quelle dei metalli puri che soddisfano sensibilmente alla legge dei miscugli. In questo caso, trattandosi di leghe che non subiscono trasformazione, i valori di K coincidono coi valori normali, quindi si può ammettere che la stessa regola debba valere anche pei valori normali, K_1, delle leghe che presentano trasformazione.

Si può adunque, in base alla detta regola, costruire la *linea teorica* dei valori K_1 di una data lega, interposta fra le linee dei valori di K dati dai metalli componenti, e controllare con essa i valori normali, dedotti dalle esperienze nel modo detto più sopra.

A dir vero, siccome questo metodo di controllo non fu da me escogitato che dopo aver eseguito la massima parte delle esperienze e dei calcoli, non ho potuto approfittarne quanto forse esso meritava, ma io credo che, con esperienze esatte fatte sui metalli puri, si possa costruire la linea dei valori normali di K per una lega qualunque, ed impiegare con sicurezza i valori da essa dedotti nel calcolo dei valori Δ, in luogo dei valori di K_1 dedotti, in modo meno sicuro, dalle esperienze nel modo anzidetto.

È utile del resto osservare che, quand' anche si adottino nel calcolo di Δ dei valori di K_1 poco esatti, e poi se ne riconoscano degli altri come più esatti, si possono assai facilmente correggere i risultati senza rifare l'intero calcolo, bastando aggiungere, (col loro segno) ai valori di Δ prima trovati, le differenze fra i vecchi ed i nuovi valori di K_1.

Infatti se K_2 è il nuovo valore di K_1 da sostituire a questo, il valore di Δ corretto sarebbe:

$$\Delta_1 = K - K_2$$

ma siccome si è già calcolato:

$$\Delta = K - K_1$$

si ha:

$$\Delta_1 = \Delta + (K_1 - K_2)$$

I valori Δ_1 secondo la formola (3) § 3 sono proporzionali al calore di trasformazione Pq, e possono perciò servire a rappresentare questa quantità in una unità arbitraria; ho quindi preferito di rappresentare con essi i risultati delle esperienze, il che equivale ad assumere per *unità termica* la quantità $(P_1 c_1 + \mu) dT = U$, la quale rappresenta il numero di calorie che emette nell'intervallo ($dT = 5°$) il crogiuolo contenente il mercurio. Volendo però avere q espresso in calorie per kilogrammo di lega, si avrà dalla (3):

$$q = \frac{\Delta}{P} (P_1 c_1 + \mu) \, dT$$

cioè nel nostro caso:

$$q = \frac{\Delta}{P} (0{,}217) \quad \text{Cal. Kg.}$$

essendo:

$$P_1 = 1105 \text{ gr.} \qquad c_1 = \underset{\text{Naccari}}{0{,}03245\,(180°)} \qquad \mu = 6{,}80 \qquad dT = 5°.$$

Risultati delle esperienze.

a) Esperienze coi metalli puri.

§ 7. — Nella tabella A sono raccolte dapprima le durate di raffreddamento del mercurio, che sono sensibilmente le stesse per tutte le esperienze e servirono a calcolare i rapporti K, ed in seguito i rapporti K ottenuti coi metalli puri *Sn*, *Pb*, *Zn*, *Tl*, *Cd*, *Bi*; nella corrispondente Tavola A sono rappresentati graficamente tali valori di K e con una linea è indicato il loro valore medio. Questa linea si può tracciare con sufficiente sicurezza ed è ascendente con l'aumentare della temperatura, il che dipende dal fatto ben noto, che il calore specifico del mercurio varia con la temperatura molto più lentamente di quelli degli altri metalli.

Da una parte e dall'altra del valore medio vi sono oscillazioni che giungono ad uno od a due centesimi del valore di K; esse non devono considerarsi come forti se si considera che spesso i valori di K

risultano come rapporti di due numeri piccoli (t) e (t_1) sui quali si può, nella lettura dell'orologio, commettere un errore di una ed anche di due unità.

Queste differenze sono del resto trascurabili a fronte di quelle, ben maggiori, che si trovano quando ha luogo una reazione esotermica e dànno un concetto del limite di precisione che può attribuirsi ai valori di K ottenuti con le leghe. Una maggior precisione in questi rapporti si potrebbe forse ottenere eseguendo molte esperienze sullo stesso metallo, ma la precisione ottenuta è sufficiente pel controllo cui devono, nel nostro caso, servire.

Il confronto dei valori di K dati dai metalli puri e quelli dati dalle loro leghe si farà quando si riferiranno i risultati delle singole leghe; per ora osserveremo solamente: 1.° che il tallio presenta verso 230° una perturbazione che quasi raddoppia il valore di K, la quale è certamente dovuta alla trasformazione allotropica esotermica che il tallio subisce a detta temperatura; 2.° che il bismuto, appena al disotto del punto di solidificazione, presenta valori molto bassi di K rispetto al valore normale, per causa non ancora accertata.

b) Leghe senza trasformazione.

§ 8. — Per procedere nella descrizione dei risultati dai casi più semplici ai più complicati tratterò prima delle leghe che non hanno manifestato fenomeni di trasformazione (vedi Tabella B e Tavola B figg. 1ª, 2ª, 3ª, 4ª).

Per queste leghe gli intervalli di temperatura riportati nella tabella sono di 10° invece che di 5°, quindi i valori di Δ (vedi formula (3)), dovettero essere raddoppiati per riferirli all'unità termica convenuta.

§ 9. — **Lega VI.** — 1 p. *Tl.* — 2. 7 p. *Bi* = 73 % ***Bi.***
Peso 891 gr. (Tab. B; Tav. B fig. 1ª).

Esperienze: Raffreddamento diretto, da 300° a 170° nell'aria libera a 18° e sotto 170° nell'ambiente a zero gradi.

Il diagramma di questo sistema fu accuratamente studiato dal Chikachigé (1906) ed è piuttosto complicato; noi non abbiamo riprodotto nella Tavola I che la parte di esso prossima alla concen-

trazione della lega da noi studiata. Si vede che la solidificazione di essa deve incominciare immediatamente sopra al punto eutettico, come infatti risultò dall' esperienza.

I risultati numerici sono:

Punto eutettico 196°

LEGA VI	Calore di solidificazione in unità arbitarie U per 891 gr	Calore di solidificazione in unità arbitarie U per Kg.	Calore di solidificazione in calorie per Kg.
Sopra il punto eutettico . .	0,38	0,43	0,09
Al punto eutettico	33,54	37,64	8,17
Totale . . .	33,92	38,07	8,26
	Calore di trasformazione: nullo		

Il valore del rapporto normale K_1 adottato, varia da 0.76 a 0.87 fra 30° e 300° e resta compreso fra quelli dati dal tallio puro e dal bismunto puro. Le differenze Δ, al disotto del punto eutettico, possono considerarsi come nulle, non vi è quindi traccia di trasformazione.

§ 10. — **Lega X.** — 3 p. *Zn* + 2 p. *Sn* = 40 % *Sn*.
Peso gr. 569.
(Tab. B; Tav. B, fig. 2ª)

Esperienze: Raffreddamento diretto da 320° in aria a 18° fino a 195° poi in ghiaccio.

Con questa lega si fecero anche: una esperienza dopo aver mantenuta la lega per 18 ore al punto eutettico, ed un'altra dopo un riscaldamento rapidissimo a 195° con identico risultato della prima.

Il diagramma di solidificazione delle leghe di *Sn Zn* secondo Heycock e Neville è rappresentato nella Tavola I fig. 2ª ed al disotto di esso è riprodotto il risultato dell' analisi termica eseguita dal Mazzotto per leghe contenenti da 0 a 33 % *Zn*, dal quale risulterebbe, per extrapolazione, che lo zinco e lo stagno si separano senza dar luogo a cristalli misti.

La posizione occupata da questa lega nel diagramma è quella indicata dalla linea *AB*, quindi la sua solidificazione incomincerebbe verso 360°; alla temperatura di 320°, alla quale incomincia la nostra

esperienza, la solidificazione è in parte compiuta, e la deposizione dello zinco continua fino a 200°, al qual punto ha luogo la solidificazione dell' eutettica.

I risultati numerici sono:

PUNTO EUTETTICO 198°

LEGA X	Calore di solidificazione		
	in unità arbitrarie U		in calorie
	per 569 gr.	per Kg.	per Kg.
Sopra il punto eutettico . .	19.12	33.60	7.29
	incompleto		
Al punto eutettico	20.28	35.67	7.75
Totale . . .	39.40	69.27	15.04
	incompleto		
	Calore di trasformazione: nullo		

Al disotto del punto eutettico i rapporti K_1, (Tabella B) ritenuti come normali, aumentano da 1,21 ad 1,34 fra 30° a 190°, ed inscritti nella Tavola A, si allineano parallelamente alla linea dei rapporti normali forniti dallo zinco puro e dallo stagno puro ad una distanza da essi che è pressochè nel rapporto di 2 dallo zinco e 3 dallo stagno che è il rapporto inverso della composizione; quindi i valori di K possono ritenersi esatti; al di sotto del punto eutettico, le loro differenze Δ coi rapporti reali K sono praticamente nulle, quindi questa lega non presenta trasformazione sensibile.

§ 11. — Lega XI. — 2 p. *Zn* + 3 p. *Sn* = 60 % *Sn*.
Peso gr. 575 (Tab. B; Tav. B fig. 3ª).

Esperienze
- 1.ª Raffreddamento diretto da 320° a 195° nell' aria libera e poi nell'ambiente a 0°
- 2.ª Raffreddamento dopo arresto in salita per 9 ore a 195° (punto eutettico)
- 3.ª Raffreddamento dopo riscaldamento rapidissimo a 150° senza arresto.

Nella Tabella B venne riportato solo il risultato della esperienza 1.ª

È questa un' altra lega di *Sn Zn* preparata per controllare il risultato, ottenuto con la precedente, della mancanza di trasforma-

zione; essa occupa nel diagramma di equilibrio delle leghe *Sn Zn*, riprodotto nella Tavola I fig. 2.ª, la posizione *CD*, quindi la sua solidificazione dovrebbe incominciare verso 340°; alla temperatura di 320ª la troviamo quindi incominciata e continuare con forte sviluppo di calore fino al punto eutettico ove la lega sviluppa una quantità di calore maggiore della precedente essendo più prossima alla concentrazione dell' eutettica.

I valori numerici sono:

LEGA XI	PUNTO EUTETTICO 198°		
	Calore di solidificazione		
	in unità arbitrarie U		in calorie
	per 575 gr.	per Kg.	per Kg.
Sopra il punto eutettico . .	28.26	49.15	10.68
	incompleto		
Al punto eutettico	30.60	53.22	11 54
Totale . . .	58.86	102.37	22.22
	incompleto		
	Calore di trasformazione: nullo		

La linea dei valori normali K_1 (vedi Tavola A e Tabella B), si dispone fra quella dello stagno e dello zinco puri a distanze pressochè inversamente proporzionali ai rapporti di composizione, quindi tali rapporti possono ritenersi esatti, e siccome le loro differenze coi rapporti reali K, al di sotto del punto eutettico, sono praticamente nulle, si conclude per l' assenza di trasformazione.

Riguardo alle leghe di *Sn Zn* devo far notare che in una mia anteriore ricerca (*l. c.* (2)) avea riscontrato nelle leghe di questo sistema uno strascico del calore eutettico per molti gradi di temperatura, il quale si presentava come dovuto ad una trasformazione che avvenisse a temperatura tanto vicina al punto eutettico (198°) da non permettere di differenziare il calore di trasformazione dal calore eutettico.

Ripreso ora lo studio di queste leghe il fenomeno si ripresentò, ma per di più mi accorsi di una debolissima reazione termica a 155° circa.

Coincidendo questa temperatura col punto di trasformazione delle leghe di *Sn Pb*, mi vennero dei sospetti sulla purezza dello zinco adoperato, benchè acquistato per purissimo, ed infatti lo trovai con 0,6 % di piombo. Ripresa la determinazione con zinco realmente purissimo, scomparvero tanto lo strascico di solidificazione come la detta reazione termica, per cui potei classificare queste leghe fra quelle non presentanti trasformazione.

È questo un notevole esempio delle perturbazioni che traccie di impurità possono produrre nella solidificazione delle leghe.

§ 12. — **Lega XII.** — 1 p. *Pb* + 1 p. *Bi* Peso gr. 850
(Tab. B e Tav. B, fig. 4.ª).

Il diagramma di equilibrio di questo sistema dato dal Mazzotto (6) e riprodotto nella Tavola I fig. 3.ª insieme all'analisi termica corrispondente, dimostra che queste leghe depositano da una parte del bismuto sensibilmente puro e dall'altra dei cristalli misti contenenti fino a 37 % di bismuto. La lega da noi studiata occupa nel diagramma la posizione indicata nella figura stessa, cioè nella regione dei cristalli misti, ed è alquanto più ricca in piombo dell'eutettica; al disotto del punto eutettico i valori di Δ sono sensibilmente nulli, così che si deve ammettere che la lega non presenti trasformazione sensibile fino alla temperatura ordinaria.

I valori numerici da essa forniti sono:

PUNTO EUTETTICO 125°

LEGA XII	Calore di solidificazione		
	in unità arbitrarie U		in calorie
	per 850 gr.	per Kg.	per Kg.
Sopra il punto eutettico . .	5.76	6.76	1.47
Al punto eutettico	11.12	13.10	2.84
Totale. . . .	16.88	19.86	4.31
	Calore di trasformazione: nullo		

(6) D. Mazzotto, *Nuovo metodo per determinare i cristalli misti deposti dalle leghe a varie temperature.* — N. Cimento, Serie V, Vol. XVIII, (1909).

Si noti il calore di fusione molto basso presentato da questa lega, rispetto a quello medio dei componenti che sarebbe 9.0; è questa una conseguenza del grande sviluppo di calore, trovato dal Mazzotto (7), all' atto della formazione delle leghe di questo sistema.

Leghe con trasformazione.

a) Leghe di bismuto e stagno.

§ 13. — Con questi metalli studiai due leghe di differente concentrazione sulle quali riferirò separatamente. Il diagramma di equilibrio di queste leghe binarie studiato dal Mazzotto (*l. c.* (6)) è riprodotto nella Tavola I fig. 4ª, e da esso si riconosce che le leghe più ricche di bismuto depongono del bismuto sensibilmente puro, e quelle più ricche di stagno dei cristalli misti la cui concentrazione di saturazione (al punto eutettico) è circa del 20 % *Bi*.

Le due leghe studiate occupano nei diagrammi le posizioni occupate dalle rette AB, A_1B_1; la prima è molto prossima all' eutettica, con eccedenza di stagno, la seconda fu appositamente fatta coincidere con la concentrazione dei cristalli misti saturi.

Lega III, 1 p. *Bi* + 1 p. *Sn* Peso 659 gr.

§ 14. *Comportamento nella solidificazione.* — Il comportamento di questa lega nel raffreddamento da 300° alla temperatura ordinaria è registrato nell' apposita colonna della tabella B, e rappresentato graficamente nella tavola B fig. 5ª; da esso risulta che, in armonia con quanto indica il diagramma di equilibrio, la solidificazione di questa lega incomincia a 150° e prosegue fino al punto eutettico (138°); in questo intervallo si depositano dei cristalli misti di *Bi Sn* che tendono verso la concentrazione del 20 % *Bi*. Secondo il diagramma la lega allo stato di equilibrio consterebbe di cristalli misti e bismuto puro nel rapporto 5:3 cioè di 625:375 per mille. Al disotto di 100° le differenze Δ aumentano notevolmente indicando che avviene la trasformazione.

(7) D. Mazzotto, *Sui fenomeni termici che accompagnano la formazione delle leghe* (Rendiconti R. Istituto Lombardo, S. II, Vol. 18, pag. 165 (1885).

I dati numerici sono i seguenti:

PUNTO EUTETTICO 138°
PUNTO DI MASSIMA TRASFORMAZIONE 92°

LEGA III	Calore di solidificazione		
	in unità arbitrarie U		in calorie
	per 659 gr.	per Kg.	per Kg.
Sopra il punto eutettico . .	7.26	11.02	2.38
Al punto eutettico	27.46	41.68	9.05
Totale . . .	34.72	52.70	11.43
	Calore massimo di trasformazione		
Totale . . .	3.00	4 55	0.99
Fase esplosiva	1.29	1.96	0.42

§ 15. — *Comportamento allo stato solido.* — I valori dei rapporti normali, corrispondenti ai valori minimi dei rapporti ottenuti nelle varie esperienze, variano da 0,82 a 0,88 (V. Tabella B) entro i limiti di temperatura 125° - 145° e si accordano con quelli che si potrebbero dedurre teoricamente dai valori dei rapporti dati dai due metalli puri, tenendo conto della concentrazione della lega.

I risultati dei trattamenti termici ai quali questa lega fu sottoposta si trovano registrati nella Tabella C e rappresentati graficamente nella corrispondente Tavola C.

Le osservazioni principali che si possono dedurre dal confronto dei diagrammi finali dei risultati, sono:

I° — Il calore di trasformazione varia considerevolmente col trattamento termico della lega, anche mantenendola a temperatura più alta della ordinaria temperatura di trasformazione. Arrestando il raffreddamento della lega al punto eutettico (arresti in discesa a 142°) cresce il calore di trasformazione rispetto al valore che presentava nel raffreddamento diretto, e tanto esso come la fase esplosiva aumentano con la durata dell'arresto, raggiungendo il maximum in circa 24 ore. Arrestando il raffreddamento ad una temperatura (136°), leggermente inferiore al punto eutettico, la trasformazione diminuisce in valore totale e molto più in esplosività, e si annulla

completamente in seguito all' arresto di 24 ore a 120', temperatura che è ancora superiore di 30° al punto di trasformazione ordinario.

II° — I trattamenti termici mutano di conseguenza la forma delle curve di raffreddamento (vedi Tavola I fig. 5.ª quella nel raffreddamento diretto, e fig. 6.ª quella dopo lungo arresto a 142°).

III° — Con l' abbassarsi del valore totale della trasformazione si abbassa anche la temperatura del massimo di trasformazione fino a portarsi molto prossima alla temperatura ordinaria (vedi i valori di (T) nella Tavola C).

IV° — Dopo arresti in salita abbastanza prolungati ad una data temperatura, si ottengono trasformazioni solo di poco inferiori a quelle che si ottengono dopo gli arresti in discesa alla stessa temperatura, ed, anche in questo caso, il valore massimo della trasformazione e della esplosività si ha dopo gli arresti al punto eutettico.

V° — La lega smorzata si comporta nella ricottura in modo poco diverso dalla lega raffreddata nel modo ordinario, e raggiunge, con la ricottura al punto eutettico, lo stesso massimo raggiunto con la maturazione al punto stesso; l' esplosività è al quanto minore ma aumenta con la durata della ricottura.

§ 16. — *Discussione ed interpretazione.* — Il comportamento della lega III si spiega, a mio credere, nel modo più semplice e completo, ritenendolo dovuto alla deposizione, ritardata da soprassaturazione, di un metallo, da una soluzione satura, nella quale esso presenti una solubilità rapidamente decrescente con la temperatura.

Supponiamo, per fissare le idee, che la solubilità del bismuto nello stagno allo stato solido sia indicata dalla linea $A_1 D_1$ della fig. 2.ª (pag. seg.) che rappresenta una parte del diagramma del sistema *Sn-Bi*. I cristalli saturi in A_1 dovrebbero, al primo raffreddamento, depositare il metallo in eccesso, e giunti per es. alla temperatura B_1 (8) aver depositata una quantità di bismuto rappresentata dalla differenza fra le concentrazioni A_1 e B_1.

Però, per soprassaturazione, i cristalli si possono raffreddare p. es. fino alla temperatura C_1 senza abbandonare il bismuto in eccesso: se a quel punto la soprassaturazione cesserà si avrà uno sviluppo di calore

(8) Per brevità indichiamo: con temperature A_1 B_1 etc. e concentrazione A_1 B_1 ecc. le temperature e concentrazioni che corrispondono ai punti A_1 B_1 etc. del diagramma.

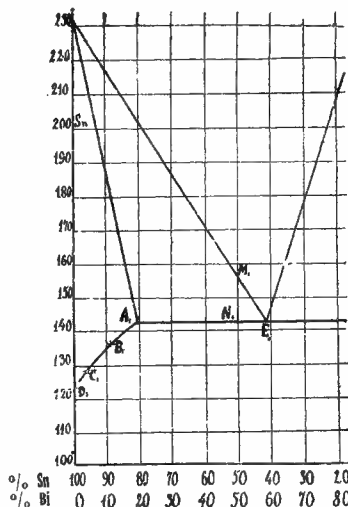
in forma esplosiva. I cristalli che avessero concentrazione inferiore ad A_1 non diventerebbero saturi che ad una temperatura più bassa di A_1 e quindi potrebbero restare soprassaturi fino ad una temperatura più bassa di C_1; quanto maggiore, sarà perciò la omogeneità di composizione dei cristalli misti, omogeneità che ha luogo quando si sono tutti ridotti alla concentrazione A_1, tanto maggiore sarà la reazione termica alla temperatura C_1, cioè sarà pure maggiore l' esplosività della trasformazione.

Fig. 2.ª

Osserviamo ora che, avendo la nostra lega la concentrazione rappresentata da M_1 N_1, assai prossima a quella dell' eutettica E_1, i cristalli che da essa si depongono durante la solidificazione, devono avere concentrazioni ben poco differenti, essendo assai ristretto l' intervallo di temperatura in cui possono depositarsi, e la loro concentrazione media sarà di poco inferiore a quella dei cristalli misti saturi (20 % *Bi*); questi saranno in grande prevalenza, perchè la temperatura eutettica E_1 avrà durato a lungo, e perchè i cristalli meno concentrati, depositatisi al di sopra di detta temperatura, avranno continuato durante l' arresto eutettico a portarsi verso la concentrazione A_1.

Quindi, anche eseguendo il raffreddamento allo stato solido subito dopo la solidificazione, (raffreddamento diretto esp.ª 1ª) si avrà trasformazione discretamente forte e esplosiva.

Se poi, prima di raffreddarla, si mantiene a lungo la lega ad una temperatura poco superiore al punto eutettico, si avrà più un danno che un vantaggio riguardo all' intensità ed esplosività della trasformazione, perchè tendono, durante l' arresto, a formarsi in prevalenza cristalli di concentrazione inferiore a scapito dei cristalli saturi. Ciò spiega il risultato della esp. 2.ª, dopo l' arresto di **10** ore a **145°**; le condizioni più favorevoli si hanno quindi quando l' arresto si fa precisamente alla temperatura eutettica, poichè i cristalli misti depositati a temperature superiori hanno tempo di trasformarsi in cri-

stalli saturi aumentando l'entità e l'esplosività del fenomeno; tale è appunto l'effetto degli arresti in discesa a 142°. La variazione prodotta non è molto grande perchè, come abbiamo già detto, la massa cristallina è già discretamente omogenea.

Se l'arresto ha luogo ad una temperatura (per es. B_1) inferiore ad A_1, la maggior parte dei cristalli sarebbe in istato di soprassaturazione, e se questa persiste, si avrà, dopo l'arresto, una trasformazione d'intensità ugnale a quella dei casi precedenti; ma se la variazione di solubilità è piuttosto grande, o, per altre cause, la soprassaturazione può in tutto od in parte cessare, e durante l'arresto, depositarsi il metallo disciolto in eccesso, cosicchè, nel raffreddamento successivo si avrà una trasformazione minore. Ciò spiega il risultato delle esperienze 6.ª e 7.ª (arresti a 136°); l'esplosività è di molto diminuita insieme al valore totale della trasformazione, e si è abbassata alquanto anche la temperatura del massimo di trasformazione, essendo diminuita la concentrazione totale ed abbassatosi con essa il limite di saturazione.

Gli arresti a temperature ancora più basse esagerano i detti effetti, così che, a 128°, vediamo gradatamente scomparire la fase esplosiva ed abbassarsi la temperatura del massimo di trasformazione (esp. 8.ª e 9.ª) fino a 50°, ed a 122° scompare completamente anche la trasformazione, benchè ci troviamo ancora a temperatura superiore di circa 30° alla ordinaria temperatura di trasformazione.

Con la stessa ipotesi si interpretano pure i risultati ottenuti dopo gli arresti in salita. Supponiamo la lega portata alla temperatura ordinaria, dopo il raffreddamento diretto da 300°, cioè nella condizione che abbiamo detta: *normale allo stato solido;* nel raffreddamento il metallo (bismuto) disciolto si è in massima parte separato, ma un successivo riscaldamento ad una certa temperatura lo fa ridisciogliere tendendo a produrre cristalli saturi a quella temperatura; la soluzione si farà lentamente, tanto più trattandosi di corpi allo stato solido, ma dopo arresti sempre più lunghi a quella temperatura, lo stato di saturazione si andrà sempre più avvicinandosi. Perciò, nel successivo raffreddamento, la trasformazione, che è supposta proporzionale alla quantità di metallo disciolto, aumenterà, e tenderà col tempo a raggiungere quello stesso limite che con gli arresti in discesa raggiunge diminuendo, limite che corrisponde al punto di saturazione.

Questo limite per gli arresti tanto in discesa che in salita è prossimo a zero per le esperienze a 122°; quindi a tal temperatura

la solubilità del bismuto nello stagno sarebbe praticamente nulla; a 136° questo limite sarebbe fra 1,72 e 1,79 unità (esp^e. 7.^a e 17.^a) e per gli arresti a 141° sarebbe prossimo a 3,00 unità.

Lo smorzamento non produce effetto notevole, ma pare che acceleri il raggiungimento del massimo di trasformazione con l'arresto in salita al punto eutettico; ciò si spiega osservando che trattandosi di una lega assai prossima all'eutettica, essa è già di per sè quasi omogenea, anche senza sottoporla allo smorzamento.

§ 17. — *Tentativo di determinazione della solubilità allo stato solido.* — Una conseguenza interessante che deriva dalla suddetta ipotesi sulla natura del fenomeno è quella che, in base ad essa, le determinazioni fatte dell' equivalente termico della trasformazione possono servire a costruire la curva di solubilità allo stato solido del bismuto nello stagno, cioè a completare il diagramma di equilibrio nella parte in cui la sua determinazione è più lunga, incerta e difficile con altri metodi.

Se infatti ammettiamo che l' equivalente termico della trasformazione corrisponda al calore emesso dal bismuto all' atto della sua separazione dallo stagno in cui si trova disciolto, i nostri valori di Δ saranno proporzionali alla quantità di bismuto separato in un intervallo di 5 gradi, e quelli di $\Sigma\Delta$ alla quantità che si separa, dalla temperatura alla quale avviene l'arresto fino alla temperatura ordinaria.

Quindi, supposta per semplicità come nulla la solubilità alla temperatura ordinaria, la quantità percentuale Q del metallo disciolto alla temperatura d'arresto T sarà data dalla relazione:

$$\Sigma \Delta_T = KQ$$

indicando con $\Sigma\Delta_T$ il valore di $\Sigma\Delta$ per la temperatura d'arresto T e con K un coefficiente di proporzionalità che si può determinare quando si conosca la solubilità ad una data temperatura. L'analisi termica ordinaria dà facile modo di determinare la solubilità al punto eutettico (nel nostro caso essa è 20 %) si potrà quindi servirsi di essa per determinare K e con esso il valore di Q alle altre temperature.

Applicando il processo ai nostri risultati si ha:

per $T = 142°$ $\quad \Sigma\Delta = 300 \quad Q = 20$ $\quad$ da cui $K = 15$

per $T = 136°$ $\quad \Sigma\Delta = 175 \quad Q = \frac{175}{15} = 11,7$

per $T = 128°$ $\quad$ » $= 73 \quad Q = \frac{73}{15} = 4,9$

per $T = 122°$ $\quad$ » $= 0 \quad Q = 0.$

Questi valori introdotti nel diagramma di equilibrio, della fig. 2.ª darebbero al disotto del punto A_1, dato dall'analisi termica, i punti B_1, C_1, D_1 della linea di solubilità del bismuto nello stagno allo stato solido, linea indicante che la solubilità decresce rapidamente con la temperatura. Nella scala del diagramma di equilibrio riprodotto nella Tavola I, fig. 4.ª, questa linea di solubilità è quella indicata nel diagramma stesso con la linea *BC*.

Se la solubilità alla temperatura ordinaria non fosse eguale a zero, ma avesse per es., il valore m, il valore K sarebbe determinato prendendo, in luogo del valore totale Q dato dall'analisi termica, il valore $Q - m$.

Si noti che tale determinazione si potrebbe eseguire con tutte le leghe composte dagli stessi metalli, ma i risultati più attendibili sono da aspettarsi dalle leghe più omogenee cioè di costituzione più prossima alla lega eutettica.

Lega IX. — 1 p. *Bi* + 4 p. *Sn* Peso 621 gr.

§ 18. *Preliminari.* — La concentrazione di questa lega, composta dagli stessi metalli della precedente, fu scelta in modo che corrispondesse prossimamente alla composizione dei cristalli misti saturi, la quale, secondo il diagramma, (Tavola I, fig. 4.ª) è prossima al 20 % di *Bi*.

Questa lega dovrebbe quindi trovarsi presso al limite, fra quelle che presentano l'arresto al punto eutettico e quelle che non lo presentano. Con la trasformazione successiva dei cristalli misti deposti, essa dovrebbe, dopo raggiunto lo stato perfetto di equilibrio, trasformarsi quasi completamente in cristalli misti saturi al punto eutettico, e quindi essere la lega, del sistema, più ricca di cristalli misti, e presentare perciò il massimo calore di trasformazione, se, come si è supposto, questo dipende dalla quantità di bismuto che si separa dai cristalli misti.

Però siccome la sua solidificazione, secondo il diagramma, incomincia in A_1 verso i 210°, ed il punto eutettico è a 130°, vi è un intervallo assai lungo nel quale si depositano cristalli misti di concentrazione differente, i quali si trasformeranno molto incompletamente in cristalli misti saturi, tanto più che la massima parte di essi, essendosi depositati verso i 200°, hanno una concentrazione molto lontana da quella alla quale dovrebbero poi ridursi.

§ 19. — *Comportamento nella solidificazione.* — Esaminando i risultati numerici contenuti nella tabella B e rappresentati graficamente nella Tavola B fig. 6.ª si riconosce che le previsioni dedotte dal diagramma sono in parte verificate dall'esperienza; infatti la solidificazione incomincia a 210° e continua fino al punto eutettico al quale punto si ha però un arresto ed un conseguente sviluppo di calore (di 4,42 unità) il quale, benchè piccolo in confronto di quello della lega precedente (27, 36 unità), non è trascurabile, ed anche l'analisi termica rappresentata nel diagramma (Tavola I, fig. 4ª), dà per questa lega un arresto eutettico sensibile. È questo un fatto che si verifica ordinariamente nelle leghe con cristalli misti aventi un lungo intervallo di solidificazione, esse infatti arrivano al punto eutettico molto più ricche del solvente di quanto competerebbe al loro completo equilibrio, perchè i cristalli, relativamente diluiti, deposti al principio della solidificazione, non hanno disciolto l'altro metallo nelle proporzioni volute; si ha quindi un residuo liquido come se si trattasse di una lega più ricca di questo metallo (bismuto) e quindi un arresto eutettico più lungo di quello che loro compete.

I risultati numerici sono i seguenti:

Punto eutettico 136°
Punto di massima trasformazione 80°

LEGA IX	Calore di solidificazione		
	in unità arbitrarie U		in calorie
	per 621 gr.	per Kg.	per Kg.
Sopra il punto eutettico . .	31.39	50.55	10.96
Al punto eutettico	4.57	7.36	1.60
Totale	35.96	57.91	12.56
	Calore massimo di trasformazione		
Totale . . .	3.25	5.24	1.14
Fase esplosiva	1.77	2.85	6.09

§ 20. *Comportamento allo stato solido.* — (Tabella D e Tavola D).

Considerando dapprima gli arresti in discesa, osserviamo che, nel raffreddamento di questa lega, allo stato solido, che segue imme-

diatamente la solidificazione, (raffreddamento diretto esp. 1.ª) esiste un rallentamento verso 100° come nella lega precedente, ma questo è talmente debole che lo si avverte appena nella curva di raffreddamento (Tavola I, fig. 7.ª) e nelle durate di raffreddamento, e solo si rende distintamente palese nei rapporti K e nei valori di Δ; anche il calore di trasformazione è debole (1,87 unità) e diminuisce ancora mantenendo per tre ore la lega a 170° (esp. 2.ª), ma aumenta alquanto dopo prolungata maturazione presso il punto eutettico (138°). La diminuzione osservata nell' esperienza 2.ª si spiega considerando che col mantenere la lega alla temperatura di 170°, temperatura di molto superiore al punto eutettico, si favorisce la formazione di grossi cristalli misti diluiti, che sono in equilibrio col *liquidus* a quella temperatura, diminuendo così la quantità di bismuto disciolto, mentre questa quantità aumenta dopo gli arresti presso il punto eutettico, perchè durante tali arresti i cristalli assorbono del bismuto avvicinandosi allo stato di saturazione a quella temperatura.

Un arresto alla temperatura di 130°, di poco inferiore al punto eutettico, diminuisce considerevolmente la trasformazione (esp. 7.ª) in causa della rapida diminuzione di solubilità del bismuto allo stato solido dimostrata per la lega precedente; frattanto il massimo di trasformazione si porta a temperatura più bassa, finchè dopo l'arresto a 120° si ha, come con la lega precedente, trasformazione sensibilmente nulla, al disopra della temperatura ordinaria.

Nelle determinazioni con gli arresti in salita, gli arresti nelle vicinanze del punto eutettico aumentano notevolmente il calore di trasformazione portandolo allo stesso limite (2,64 U) che raggiunge per gli arresti in discesa, però con esplosività maggiore; è a notarsi che in genere questa lega presenta poca esplosività e molto sviluppata invece la fase detta *strascico*, tutte conseguenze della grande eterogeneità dei cristalli misti che la compongono.

§ 21. *Comportamento della lega smorzata.* — Ma il fatto più notevole presentato da questa lega in confronto delle altre, è il considerevole aumento che subiscono, dopo lo smorzamento ed un adeguato arresto in salita alla temperatura eutettica, tanto il calore di trasformazione quanto la fase esplosiva.

È questa una conferma che tutti i valori prima trovati per la trasformazione erano ben lungi dal rappresentare il vero valore che ad essa compete, e ciò in causa della eterogeneità dei cristalli pre-

senti al momento della solidificazione completa, e principalmente per la presenza dei cristalli assai diluiti formatisi in gran copia al principio della solidificazione. (Vedi Tavola B. Fig. 6.ª).

E qui si mostra in particolar modo l'efficacia dello smorzamento, per impedire il realizzarsi di tale eterogeneità per le ragioni già dette al § 5.

I due metalli che devono disciogliersi trovandosi, dopo lo smorzamento, suddivisi ed in contatto quasi altrettanto intimo come lo erano allo stato liquido, si sciolgono più facilmente l'uno nell'altro formando una maggiore copia di cristalli saturi, o quasi tali, che si separano poi di nuovo nel raffreddamento aumentando lo sviluppo del calore di trasformazione. Il massimo di trasformazione sale così sopra il limite raggiunto dalla lega precedente, in accordo con le previsioni fatte al § 18, ma forse è ancor lungi dal raggiungere il suo valore definitivo quale competerebbe alla lega resa assolutamente omogenea ed in equilibrio al punto di massima solubilità.

Ho fatto con questa lega molte esperienze con arresti a temperature superiori al punto eutettico, ma non le riferisco per non entrare in troppi dettagli; posso dire solo che il suo comportamento, per quanto complicato, si spiega coi principî posti a base della nostra discussione.

L'esempio delle due leghe studiate di *Sn* e *Bi* dimostra come la determinazione del calore di trasformazione possa presentare difficoltà molto diverse per leghe degli stessi metalli e di concentrazioni differenti, per cui può riuscir piuttosto arduo ottenere valori esattamente confrontabili.

b) Leghe di stagno e piombo.

Lega I. — 1 *p.* *Sn* + 2 *p.* *Pb* Peso 759 gr.

§ 22. *Osservazioni preliminari.* — Il calore di trasformazione di questa lega fu recentemente da me studiato con molti dettagli in altro lavoro (9) ma ho creduto di riprenderlo, non solo per avere dei risultati diretti meglio comparabili con quelli delle altre leghe da me ora studiate, ma anche per studiare sopra di essa l'effetto dello smorzamento, al quale trattamento la lega non era stata pri-

(9) D. Mazzotto, *Intern. Zeitschrift f. Metallographie* Vol. Iº pag. 289 (1911).

mieramente assoggettata. Fra le migliorie introdotte nella tecnica delle esperienze vi fu quella del mescolatore nell'interno del crogiuolo, il quale permette di conservare la lega omogenea dopo ogni fusione.

Dal diagramma di equilibrio (Tav. I, fig. 12) risulta che la lega usata è del 30 % circa più ricca di piombo dell'eutettica e del 20 % circa meno ricca di piombo della lega satura al punto eutettico.

La sua solidificazione deve incominciare verso 250° e continuare fino al punto eutettico con deposizione di cristalli misti di concentrazione variabile da 8 % al 16 % *Sn*, i quali devono però tendere a trasformarsi tutti al 16 % *Sn*, che è la concentrazione dei cristalli saturi che si depositano al punto eutettico insieme a dello stagno praticamente puro.

§ 23. *Comportamento nella solidificazione.* — (vedi Tabella B e Tavola B fig. 9ª).

In conformità con le indicazioni del diagramma di equilibrio, la solidificazione incomincia a 250°, si fa copiosa a 245° e poi continua decrescendo fino al punto eutettico (182°). A questo punto si ha un arresto di circa sei minuti con sviluppo di 14,32 unità di calore.

Per il lungo intervallo di solidificazione la lega è adunque poco omogenea; consta, oltre che dello stagno libero, di cristalli misti non saturi in prevalenza su quelli saturi depositati al punto eutettico; fra i non saturi se ne trova circa 1/3 di piccola concentrazione (8 % *Sn*) depositati a 245°.

I dati numerici principali sono i seguenti:

PUNTO EUTETTICO 182°
PUNTO DI MASSIMA TRASFORMAZIONE 155°

LEGA I.	Calore di solidificazione		
	in unità arbitrarie U		in calorie
	per 759 gr.	per Kg.	per Kg.
Sopra il punto eutettico (250°-182°)	13.10	17.27	3 76
Al punto eutettico	14.56	19.18	4.16
Totale . . .	27.66	36,45	7.92
	Calore massimo di trasformazione		
Totale . . .	6.54	8.62	1.87
Fase esplosiva	2.53	3 34	0.72

§ 24. *Comportamento allo stato solido.* — (Vedi Tabella E e Tavola E).

La lega presenta nel raffreddamento diretto (esp.ª 1ª), immediatamente sotto il punto eutettico, un rapporto di raffreddamento quasi normale; ma verso 155° la curva di raffreddamento si flette sensibilmente (vedi fig. 13ª, Tav. I) indicando il principio della trasformazione, la quale ha la sua fase esplosiva a 150° con sviluppo di 1,51 U di calore; però, anche il disotto di detto punto, continua lo sviluppo di calore, ed alla temperatura ordinaria i rapporti di raffreddamento hanno ancora un valore sensibilmente superiore al normale, il che è indizio che la trasformazione non è del tutto finita.

Le modificazioni subite dalla trasformazione in seguito ai trattamenti termici, sono analoghe a quelle presentate dalla lega III § 14 ma più cospicue, e possono, come quelle, spiegarsi ammettendo che la trasformazione consista nella separazione dello stagno dai cristalli misti, resa esplosiva in causa della soprassaturazione.

Soffermandoci infatti dapprima ai risultati ottenuti con gli arresti in discesa, osserviamo che un arresto di 3 ore a 208° (esperienza 2.ª), diminuisce l'esplosività che si aveva avuta nel raffreddamento diretto, perchè nel frattempo aumentò la massa dei cristalli in equilibrio a quella temperatura a scapito di quelli saturi; invece, dopo gli arresti alla temperatura eutettica, aumentano considerevolmente tanto l'esplosività quanto il valore totale della trasformazione, perchè aumenta la quantità dei cristalli saturi a spese dello stagno ancora libero, aumento che in questa lega è considerevole in causa della presenza di molti cristalli non saturi; gli arresti alle temperature (170°, 160°, 150°), inferiori al punto eutettico ma superiori alla temperatura ordinaria di trasformazione, abbassano il valore della trasformazione, ma in minor grado che nella lega III, il che si può attribuire ad una diminuzione di solubilità con la temperatura, meno rapida nel caso dello stagno nel piombo, che in quello del bismuto nello stagno, diminuzione che cercheremo più sotto di valutare. In questa lega, più forse che nelle altre, si nota l'estensione che prendono la III e la IV fase della trasformazione, cioè lo strascico e la coda, ed il fatto, che si manifesta specialmente dopo gli arresti in salita, che lo strascico si prolunga fino alla temperatura ordinaria.

In base alla nostra ipotesi ciò significherebbe che anche alla temperatura ordinaria è sensibile la quantità di stagno che si separa

dal piombo, e quindi che lo stagno ha una sensibile solubilità nel piombo anche alla temperatura ordinaria.

Si noti nelle figure 13ª e 14ª (Tav. I) la grande variazione subita, anche dalla curva di raffreddamento presso il punto di trasformazione, in seguito ai trattamenti termici; la fig. 13.ª si riferisce al raffreddamento diretto (esp.ª 1.ª) e la 14.ª al raffreddamento dopo maturazione per 10 ore al punto eutettico (esp.ª 4.ª); nella prima si osserva solo un rallentamento, e nella seconda un arresto con recalescenza.

Per quanto riguarda gli arresti in salita, notiamo che essi conducono sensibilmente alle stesse condizioni finali alle quali conducono gli arresti in discesa alla stessa temperatura; ciò potrebbe far credere che questo stato finale comune non fosse altro che lo stato di saturazione a detta temperatura; ma sorge un sospetto su questa conclusione dal fatto che spesso, dopo l'arresto in salita, si ha una trasformazione totale alquanto più forte che dopo l'arresto in discesa alla stessa temperatura, il che sarebbe in disaccordo col fatto, ben noto, che lo stato di saturazione si ottiene più completamente con temperature decrescenti che con temperature ascendenti; io opino si tratti di uno stato di saturazione piuttosto relativo che assoluto, relativo cioè alla speciale ripartizione che hanno i metalli in seno alla lega. Data tale ripartizione, la saturazione che denomino relativa, sarebbe data dalla massima quantità di metallo che si può sciogliere nelle condizioni attuali, e l'assoluta da quella che si si dovrebbe sciogliere se solvente e soluto potessero avvicinarsi indefinitamente l'uno all'altro come avverrebbe nel caso che uno dei due fosse liquido. La detta opinione trova appoggio nel fatto che la lega smorzata, in cui la ripartizione dei componenti è più omogenea, presenta, dopo conveniente ricottura, una trasformazione considerevolmente più intensa della lega raffreddata nel modo ordinario; la lega smorzata dà inoltre uno strascico lunghissimo (v. Tav. E esperienza 20ª, 21ª) e molto uniforme (v. tabella E) quale appunto deve essere se esso è dovuto al graduale deposito del metallo che, coll'abbassarsi della temperatura, viene a trovarsi disciolto in eccesso.

Solo adunque delle esperienze sulla lega smorzata a temperature differenti e convenientemente prolungate, potrebbero, almeno per leghe come questa, condurre alla condizione di saturazione assoluta, a produrre la quale prenda parte attiva l'intera quantità dei due metalli

presenti nella lega; però allo scopo condurranno, io credo, più rapidamente esperienze fatte sopra la lega eutettica per sua natura omogenea.

§ 25. *Curva di solubilità.* — Per quanto si è detto, l' appoggiare su questa lega una determinazione della curva di solubilità dello stagno nel piombo simile a quella che si è fatta sulla lega **III**, quasi omogenea, non è prudente; però siccome è ammissibile che vi sia una proporzionalità fra i risultati forniti da questa lega eterogenea e quelli che darebbe la lega stessa se fosse omogenea, si può, in attesa di risultati esperimentali più completi, farne fin d' ora una determinazione approssimativa, tanto più che in tale determinazione entrano, non già i valori assoluti del calore di trasformazione, ma i loro rapporti.

Applicando quindi il metodo indicato nel § **17** e nell' ipotesi (in questo caso meno prossima alla realtà) che la solubilità sia nulla alla temperatura ordinaria, si avrebbe, dai valori forniti dagli arresti in discesa, i seguenti risultati:

$$T = 183^\circ \quad \Sigma\Delta = 519 \quad Q = 16 \qquad \text{da cui } K = 32{,}4$$

$$T = 180^\circ \quad \text{»} = 424 \quad Q = \frac{424}{32{,}4} = 13{,}1 \qquad (B)$$

$$T = 170^\circ \quad \text{»} = 337 \quad Q = \frac{337}{32{,}4} = 10{,}4 \qquad (C)$$

$$T = 160^\circ \quad \text{»} = 300 \quad Q = \frac{300}{32{,}4} = 9{,}2 \qquad (D)$$

$$T = 150^\circ \quad \text{»} = 226 \quad Q = \frac{226}{32{,}4} = 7{,}0 \qquad (E)$$

I valori $B, C, D, E,$ sono rappresentati nella fig. 3, pag. seg. che riproduce una parte del diagramma del sistema *Sn-Pb* nel quale la concentrazione della nostra lega **I** è rappresentata dalla retta MN. La linea risultante $ABCDE$ indica per queste leghe una solubilità decrescente molto più lentamente colla temperatura di quella ottenuta nel caso della lega **III**. Questa linea è riprodotta nel diagramma della Tav. **I**, fig. **12** nella scala corrispondente e la curva fu prolungata fino alla temperatura ordinaria.

Per questa lega aggiungeremo che, se la esauriente spiegazione di tanti fenomeni sulla base dell' ipotesi della saturazione e soprassaturazione esclude l' ipotesi sostenuta dal Degens (10) che si tratti

(10) Degens, *Zeitschrift für Anorganische Chemie*, Bd. 63, p. 207 (1909).

di una combinazione chimica, ipotesi che mi pare non si adatterebbe a tale spiegazione, non esclude per altro in modo assoluto l'ipotesi di Rosenhain e Tucker i quali ammettono, al punto di trasformazione, un salto di solubilità prodotto dalla trasformazione allotropica che lo stagno subisce a 161°; ma converrebbe poi ammettere che tale trasformazione allotropica non avvenisse, come di consueto, a temperatura costante, ma bensì a temperatura tanto più bassa quanto è minore la quantità di stagno disciolto, converrebbe cioè darle tutte le proprietà delle soluzioni ordinarie, per cui pare sia più semplice considerare senz'altro il fenomeno in base alle leggi delle soluzioni ordinarie. Un'analoga interpretazione si potrebbe dare anche alla trasformazione subita dalle leghe *Sn-Bi*.

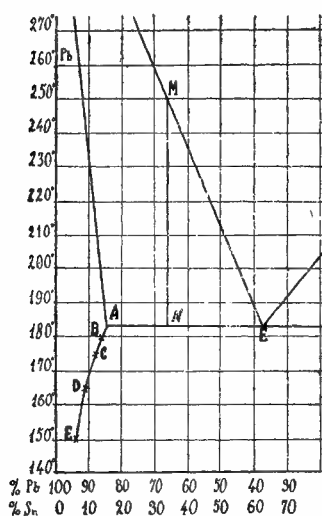



Fig. 8.ª

Un argomento che non mi lascia tranquillo a rigettare definitivamente l'ipotesi della trasformazione allotropica è quello che, fino ad ora, non si è osservato la trasformazione che in leghe di stagno.

c) Leghe di stagno e tallio.

Lega V. — 3 p. *Sn* + 2 p. Tl. Peso 691 gr.

§ 26. *Osservazioni preliminari.* — Per la prima conoscenza con la lega osserviamo il diagramma di equilibrio del sistema studiato da Kurnakow e Puschin (1902) e riprodotto nella Tavola I, fig. 9, dal quale risulta che la lega da noi preparata, e rappresentata dalla linea *AB*, è molto prossima all'eutettica, e quindi della categoria delle leghe omogenee. Per l'esperienza acquistata con le altre leghe dobbiamo attenderci debole effetto dagli arresti al punto eutettico e debole effetto dallo smorzamento. Però il diagramma di equilibrio ci rivela come particolarità di questa lega, il formare cristalli misti molto concentrati, tanto coll'uno che coll'altro componente, mentre

nelle leghe fino ad ora studiate uno dei componenti si separava praticamente puro. L' interpretazione dei fenomeni resterà quindi meno chiara che negli altri casi potendo la trasformazione dipendere tanto dalla separazione del tallio dallo stagno, o dello stagno dal tallio, come dall' una e dall' altra insieme. Però, almeno apparentemente, questa lega non diede risultati molto diversi dalle altre.

I valori numerici principali sono i seguenti:

PUNTO EUTETTICO: 172°
PUNTO DI MASSIMA TRASFORMAZIONE 157°

LEGA V	Calore di solidificazione		
	in unità arbitrarie U		in calorie
	per 691 gr.	per Kg.	per Kg.
Sopra il punto eutettico . .	0.14	0.20	0.04
Al punto eutettico	27.77	40.24	8.73
Totale . . .	27.91	40.44	8.77
	Calore massimo di trasformazione		
Totale . . .	4.68	6.77	1.47
Fase esplosiva	2.20	3.19	0.69

Il comportamento nella solidificazione, Tabella B e Tavola B fig. 7, è quello che ci attendevamo dopo l' osservazione del diagramma, cioè solidificazione quasi completa al punto eutettico.

§ 27. — *Comportamento allo stato liquido.* — In questa lega la temperatura di trasformazione è assai vicina a quella di solidificazione; nel raffreddamento diretto la curva di raffreddamento (fig. 10, Tav. I), ad una diecina di gradi al disotto del punto eutettico, mostra una inflessione dovuta alla solita trasformazione, ma, rendendo assai lenta la solidificazione della lega, il fenomeno si rende sempre più esplosivo e si ottiene alla temperatura di 155° una vera recalescenza (vedi fig. 11 ivi).

Alla fase esplosiva succede un lungo strascico di trasformazione che continua fino verso i 100°, e cessa verso gli 80°, cosicchè per lungo tratto al disopra della temperatura ordinaria il raffreddamento è sensibilmente normale.

Gli arresti in discesa al punto eutettico (Tabella F e Tavola F, esp.e 2.a e 3.a) fanno come al solito aumentare il calore di trasformazione, ma questo aumento è relativamente debole perchè la lega è già abbastanza omogenea. Gli arresti a temperature anche di poco inferiori al punto eutettico (165°-150°) producono forti diminuzioni del calore di trasformazione, il quale cessa quasi del tutto dopo un arresto a 125°. Si avrebbe quindi una assai rapida diminuzione di solubilità che si potrebbe anche attribuire alle trasformazioni allotropiche dei due metalli componenti.

Gli arresti in salita nulla offrono di particolare, e portano rapidamente la lega poco al disotto delle condizioni ottenute con gli arresti in discesa alla stessa temperatura.

Lo smorzamento non conduce ad effetti diversi da quelli ottenuti con le leghe raffreddate lentamente; la lega, appena smorzata, non presenta che un lungo strascico di trasformazione, (esperienza 14a) ma mantenendola per qualche ora a temperatura compresa fra il punto eutettico e quello di trasformazione, lascia apparire la fase esplosiva indicante la produzione di copiosi cristalli aventi una concentrazione comune, concentrazione che corrisponde a quella dei cristalli saturi al punto eutettico.

La costruzione della curva di solubilità allo stato solido è in questo caso impossibile, coi dati sperimentali disponibili, non potendosi distinguere, dalla evoluzione totale di calore, quale parte sia dovuta ai cristalli misti più ricchi di stagno e quale ai più ricchi di tallio. La questione si potrebbe, se non decidere, dilucidare, con esperienze eseguite sopra leghe di concentrazioni molto prossime a quelle indicate dai due punti estremi della linea eutettica nel diagramma di equilibrio, punti però che non sono stati ancora determinati con sufficiente precisione.

Queste leghe, si presentano interessanti per uno studio ulteriore, oltre che pel fatto di avere cristalli misti dalle due parti del diagramma, anche perchè tutti e due i metalli che le compongono vanno soggetti a trasformazione allo stato di purezza.

d) Leghe di stagno e cadmio.

§ 28. — *Generalità.* — Ho serbato queste leghe per ultime perchè, quantunque abbiano un contegno più semplice di tutte le

altre, hanno delle particolarità che non si potrebbero facilmente differenziare da quelle delle altre leghe senza aver prima ben conosciuto il comportamento di queste.

Il diagramma di equilibrio delle leghe di *Sn Cd* non è noto con precisione; il Kapp eseguì con queste leghe delle determinazioni di solidificazione, dando pure la durata degli arresti al punto eutettico; in base a questi dati costruii il diagramma di equilibrio della fig. 15 Tavola I, con la costruzione per l'analisi termica fatta nell'ipotesi che le leghe siano state preparate a pesi uguali; ma disgraziatamente, sopra tal punto la memoria del Kapp tace, perciò resta il dubbio che i risultati dell'analisi termica così fatta possano non essere esatti; essa indicherebbe l'assenza di cristalli misti o tutt'al più la presenza di cristalli misti al 5 % dall'una e dall'altra parte del diagramma; lo Stoffel trovò con metodo elettrolitico che si hanno cristalli misti con 8 % *Cd*.

Non si sa quale assegnamento si possa fare su questi risultati, ad ogni modo il diagramma approssimativo da me costruito, si può ritenere abbastanza sicuro al disopra del punto eutettico, ed in esso la lega IV da noi studiata occuperebbe la posizione indicata dalla linea *AB*, sarebbe cioè alquanto più ricca di *Cd* dell'eutettica, e la sua solidificazione dovrebbe incominciare verso 210° con deposizione di *Cd* quasi puro.

Lega IV. — 1 p. *Sn* + 1 p. *Cd*. Peso 638 gr.

§ 29. — *Comportamento nella solidificazione.* — Tale comportamento si può dedurre dai valori numerici registrati nell'ultima colonna della tabella B ed è rappresentato graficamente nella Tavola B, fig. 8.ª. In accordo colle previsioni tratte dal diagramma, il calore di solidificazione incomincia a manifestarsi fra 215° e 210°, raggiunge un massimo a 200°, e poi scema alquanto confondendosi col calore sviluppato al punto eutettico.

I rapporti normali K_1 si deducono con sufficiente sicurezza per tutte le temperature, essendovi tre intervalli di temperatura in cui il detto coefficiente discende al valore normale, e che sono: il lungo intervallo precedente alla solidificazione, quello fra il punto eutettico ed il punto di trasformazione e quello al disotto del punto di trasformazione; i valori adottati per K_1 (vedi tabella B) si accor-

dano con quelli che si deducono dai corrispondenti rapporti dei metalli puri.

I valori numerici sono i seguenti:

LEGA IV	Calore di solidificazione		
	in unità arbitrarie U		in calorie
	per 638 gr.	per Kg.	per Kg.
Punto eutettico: 178° — Punto di trasformazione: 125°			
Sopra il punto eutettico . .	14.47	22.68	4.92
Al punto eutettico	34.52	54.10	11.74
Totale . . .	48.99	76.78	16.66
	Calore massimo di trasformazione		
Totale . . .	3.45	5.41	1.17
Fase esplosiva	2.39	3.75	0.81

§ 30. — *Comportamento allo stato solido.* — La trasformazione di queste leghe al disotto del punto eutettico si riconosce molto più facilmente che nelle altre, primieramente perchè avviene ad una cinquantina di gradi al di sotto di quel punto e non è quindi possibile confondere l'evoluzione di calore di trasformazione con uno strascico del calore eutettico; in secondo luogo perchè l'evoluzione di calore, pur non essendo maggiore che nelle altre leghe, si fa in modo più esplosivo producendo una sensibile recalescenza anche nel raffredamento tolale da 300° (vedi Tav. I, figg. 16 e 17). Ed infatti lo Stoffel potè scoprire il fenomeno in queste leghe, mentre non ha potuto riconoscerlo nelle leghe *Sn Pb* e *Sn Bi* nelle quali era stato da me precedentemente segnalato.

Nella Tav. B fig. 8 è rappresentato lo sviluppo di calore di trasformazione durante un raffreddamento diretto da 300°, dove si vede che, quasi tutto il calore di trasformazione si svolge fra 125° e 120°; la unita rappresentazione dei valori di $\Sigma\Delta$ dimostra la mancanza di coda.

Osservando i diagrammi della tavola G, corrispondente alla tabella G, e la soprastante rappresentazione delle temperature eutettica, di arresto e di trasformazione si riconoscono i seguenti fatti:

I. Il calore totale di trasformazione non varia che poco, sia che lo si determini dopo gli arresti in discesa che dopo gli arresti in salita, purchè questi arresti non avvengano al di sotto di 135°. A 132° ed alle temperature inferiori gli arresti in discesa fanno diminuire rapidamente la trasformazione e gli arresti in salita non producono la trasformazione inversa.

È notevole il fatto che questa lega, portata nel vaso di raffreddamento appena solidificata con lo smorzamento, (Tab. G e Tav. G, esp.ª 20) presenta la stessa trasformazione esplosiva come se la sua solidificazione fosse stata lenta e regolare, mentre le altre leghe, subito dopo lo smorzamento, non manifestano trasformazione esplosiva, ma solo un lungo strascico; ciò fa ritenere che nel fenomeno di trasformazione di questa lega, non intervengano i cristalli misti deposti da essa nel primo stadio della solidificazione.

II. I trattamenti termici non mutano sensibilmente la forma della curva di raffreddamento (vedi Tav. I, fig. 16 e 17: la prima riferentesi al raffreddamento diretto (esp. 1.ª) la seconda all'esperienza 4.ª cioè dopo undici ore di ricottura a 177°).

III. La temperatura di massima trasformazione è molto costante (125°) anche quando (esp. 10.ª e 11.ª) la trasformazione è molto diminuita da opportuni trattamenti termici.

IV. Il calore di trasformazione, quando è nella sua integrità, si sviluppa nella massima parte durante la fase splosiva, cioè entro pochi gradi di temperatura (fra 125°-120°).

V. È pure caratteristico il fatto che un lungo arresto alla temperatura eutettica produce un effetto che, per quanto debole, appare contrario a quello prodotto sulle altre leghe, poichè l'esplosività diminuisce ed aumentano lo strascico e la coda (v. esp. 4.ª, 5.ª a 177°).

VI. Negli arresti in salita, se non si oltrepassa la temperatura di 130°, non si ha trasformazione, ma appena oltrepassata questa temperatura, anche senza arrestarvisi (v. esp. 12.ª e 15.ª con riscaldamenti rapidi) la trasformazione raggiunge il suo pieno valore, che non aumenta coi successivi arresti, a quella temperatura: questi arresti fanno solo alquanto aumentare la fase esplosiva a spese delle altre.

VII. Lo smorzamento non modifica il comportamento della lega.

Si può conchiudere che la trasformazione in queste leghe è un fenomeno che avviene rapidamente nei due sensi ad una tempera-

tura costante (130° circa) come se si trattasse di un vero punto di fusione o di trasformazione allotropica. Pare meno sicuro l'interpretarlo come un fenomeno di soprassaturazione:

a) perchè il punto di trasformazione è troppo costante e troppo lontano dal punto eutettico, punto in cui si forma la lega satura;

b) perchè queste leghe non avendo (secondo il probabile diagramma di equilibrio) cristalli misti od avendone di assai piccola concentrazione, non pare possibile che la separazione di una così piccola quantità di metallo possa produrre una reazione tanto energica.

Per la ragione (*b*) sembrerebbe di dover pure escludere l'ipotesi che l'evoluzione termica sia dovuta ad una trasformazione allotropica di uno dei metalli (stagno) disciolto nei cristalli misti, ed è poi improbabile che dipenda da una trasformazione allotropica dei metalli puri; quindi le maggiori probabilità, allo stato attuale delle esperienze, rimangono per l'ipotesi che si tratti di una combinazione chimica reversibile fra i due metalli, che avvenga nei due sensi al punto di trasformazione.

Ulteriori esperienze con leghe di concentrazione differenti potrebbero fissare la formula più probabile del composto, poichè con la lega avente la concentrazione del composto il calore di trasformazione dovrebbe avere un massimo. Lo Stoffel ritiene si formi un composto compreso fra $Sn\ Cd_3$ e $Sn\ Cd_4$.

Riepilogo.

§ 31. — Per riassumere i principali risultati ottenuti in queste ricerche preliminari, e per facilitare il confronto fra una lega e l'altra, ho raccolto nella Tavola H i diagrammi del calore di trasformazione ottenuti per ogni lega nei due esperimenti più tipici, cioè in quello del raffreddamento diretto, quale si avrebbe raffreddando, come d'ordinario, la lega alla temperatura ordinaria, e quello che ha dato il massimo valore della trasformazione e della esplosività, come quello che deve ritenersi più prossimo al valore definitivo. Il confronto dei due diagrammi dimostra quanto sarebbe erroneo prendere per valore della trasformazione quello dato dal raffreddamento diretto.

Tali diagrammi sono la riproduzione dei corrispondenti diagrammi delle tavole grafiche e divisi come quelli nelle quattro fasi convenzionali; solo furono aumentati in altezza in tal rapporto, da riferirsi tutti ad un chilogramma di lega e da rappresentare il calore di trasformazioni in calorie invece che in unità arbitrarie. Essi sono disposti in ordine di intensità crescente del calore di trasformazione massimo; per le altre indicazioni valgono gli schiarimenti dati al § 5.

Si vede che il calore di trasformazione va da un minimo di 0,99 calorie per la lega III (1 p. *Sn* + 1 p. *Bi*) ad un massimo di 1,87 calorie per la lega I (1 p. *Sn* + 2 p. *Pb*).

Le due prime leghe, III e IX, sono costituite dagli stessi metalli, *Sn* e *Bi* ma in proporzioni differenti. Si osserva che, mentre nel raffreddamento diretto la trasformazione è maggiore nella III, dopo il trattamento termico essa è maggiore nella IX. Così infatti deve essere in base alla nostra ipotesi perchè la lega IX ha tale concentrazione che dovrebbe, allo stato di equilibrio, essere completamente composta di cristalli misti saturi i quali danno il massimo contingente alla trasformazione.

Ad indicare il contegno di ciascuna lega nella solidificazione, sono raccolte nello stesso quadro, per ogni lega, le misure (tratte dalla Tab. B) del calore di solidificazione, distinto nelle sue due parti: quello svolto sopra il punto eutettico, che può dare un' indicazione del grado di eterogeneità della lega, e quello svolto al punto eutettico che ne misura la porzione omogenea. Si osserva che il calore di solidificazione è sempre molto superiore a quello di trasformazione.

Questi ultimi valori sono registrati nella stessa Tavola H anche per le leghe che non presentano trasformazione, per le quali naturalmente mancano i diagrammi di trasformazione. Anche questi valori furono ridotti in centesimi di caloria per kg. di lega.

Riassunto e conclusioni.

§ 32. — Riassumendo e concludendo diremo:

I. Per *calore di trasformazione* intendiamo la differenza fra il calore svolto dalla lega entro un certo intervallo di temperatura e quello che essa svilupperebbe se la trasformazione non avvenisse.

La determinazione esatta, e talvolta anche approssimativa del calore di trasformazione è piuttosto ardua per più ragioni:

a) perchè esso varia notevolmente per la stessa lega a seconda del suo trattamento, e da lega a lega, anche se costituite dagli stessi metalli, varia il trattamento che fornisce il risultato più attendibile.

b) perchè è sempre lento, e talvolta lentissimo, il processo per il quale la lega assume il suo stato d'equilibrio al quale compete il valore vero (massimo) della trasformazione; sotto questo aspetto le leghe più omogenee (più prossime all'eutettica) sono quelle che più facilmente e rapidamente danno dei valori più esatti della trasformazione.

c) perchè la lega oltre la fase esplosiva, in cui la trasformazione si effettua in quantità considerevole entro ristretti intervalli di temperatura, fase riconoscibile abbastanza facilmente, presenta altre fasi in cui la trasformazione è lenta o lentissima, producendo non di rado, i così detti *strascico* e *coda*, fino alla temperatura ordinaria, per cui si resta spesso in dubbio sul vero punto in cui la trasformazione finisce.

In questa disamina, molto meglio delle durate di raffreddamento e delle ordinarie curve di solidificazione, servono i *rapporti di raffreddamento* fra le durate di raffreddamento della lega e quelle di un corpo neutro, (nel nostro caso mercurio) specialmente se questi vengano opportunamente confrontati coi rapporti simili forniti dai metalli puri costituenti la lega.

II. I *trattamenti termici* a cui si sottoposero le leghe per studiare le variazioni del calore di trasformazione e ricercarne il valore normale furono:

a) il *raffreddamento diretto*, da 300° alla temperatura ordinaria.

b) gli arresti prolungati a temperatura costante, effettuati, sia durante il raffreddamento delle leghe dallo stato liquido (*arresti in discesa o maturazioni*) sia riscaldando fino a quella temperatura le leghe già portate alla temperatura ordinaria (*arresti in salita o ricotture*); questi arresti permettono alla lega di avvicinarsi alla condizione di equilibrio corrispondente alla temperatura dell'arresto.

c) *lo smorzamento*, cioè il raffreddamento rapidissimo (nel mercurio freddo) della lega liquida al punto di solidificarsi. Questo trattamento è efficace specialmente nelle leghe aventi un largo in-

tervallo di temperatura di solidificazione (le quali diventerebbero eterogenee per liquazione e per la formazione di cristalli di concentrazioni diverse) onde conservar loro, per quanto è possibile, allo stato solido, l'omogeneità che avevano allo stato liquido, cosicchè i metalli si trovino in intimo contatto nelle proporzioni stesse in cui si trovano nella lega, e possano reagire fra loro nelle proporzioni proprie alla concentrazione della lega stessa.

Con le leghe smorzate non si effettuano che degli arresti in salita e al disotto del punto eutettico, perchè la fusione distruggegerebbe gli effetti dello smorzamento.

III. — Le variazioni che subisce il calore di trasformazione coi detti trattamenti consistono specialmente:

a) nella variazione del calore totale di trasformazione, cioè della somma dei valori della trasformazione nei singoli intervalli di temperatura;

b) nella variazione della quantità di calore svolta nella fase esplosiva (***esplosività***) che si misura dalla quantità massima di calore svolto in un intervallo di 5° di temperatura;

c) nella variazione del calore svolto nelle altre fasi della trasformazione, in cui essa si compie più o meno lentamente.

IV. — Le dette variazioni dipendono dalle seguenti circostanze:

a) ***dalla temperatura degli arresti:*** Prendendo per termine di confronto il calore di trasformazione che si ha col raffreddamento diretto da 300°, si osserva che gli arresti tanto in salita che in discesa, al disopra del punto eutettico, diminuiscono il calore totale di trasformazione ed il grado di esplosività; coll' avvicinarsi della temperatura di arresto al punto eutettico la trasformazione e l' esplosività aumentano, raggiungono un ***massimo quando l' arresto si effettua al punto eutettico,*** e scemano di nuovo dopo gli arresti a temperature inferiori, e tanto più, quanto più bassa è la temperatura di arresto.

Per una temperatura di arresto abbastanza bassa, la trasformazione diventa praticamente nulla; questa temperatura può essere anche superiore alla temperatura alla quale avviene ordinariamente la trasformazione massima (lega III e V) ma può abbassarsi anche al disotto della temperatura ordinaria (lega I);

b) ***dalla durata degli arresti:*** Infatti le suddette variazioni si producono lentamente, e sono quindi maggiori se gli arresti sono più prolungati, ma tendono a raggiungere un limite che varia con la

temperatura di arresto. Questo limite è sensibilmente lo stesso tanto per gli arresti in salita che per quelli in discesa alla stessa temperatura; ma, naturalmente, per i primi esso è raggiunto con valori successivamente ascendenti, pei secondi con valori discendenti della trasformazione e della esplosività.

c) In alcuni casi dall' essere la lega *smorzata* o no.

Nelle leghe (lega V), di composizione molto prossima all' eutettica, e perciò omogenee, lo smorzamento non ha efficacia; ma nelle eterogenee (lega IX e I) esso facilita il raggiungimento dell' equilibrio della lega e porta il grado di trasformazione ad un valore talvolta considerevolmente più elevato di quello che era possibile con i semplici arresti in discesa o in salita alla stessa temperatura.

In causa di tali variazioni si prende per valore normale del calore di trasformazione per una data lega, il valore massimo che esso assume col trattamento più favorevole. Esso si ottiene sempre con arresti al punto eutettico; con le leghe abbastanza omogenee, basta effettuare l' arresto sulla lega raffreddata dallo stato liquido nel modo ordinario, ma con leghe eterogenee occorre praticarlo sulla lega smorzata.

V. — Fra le leghe studiate, alcune non presentarono il fenomeno della trasformazione, e sono le leghe di Tl Bi, Sn Zn, Pb Bi; presentarono invece il fenomeno in ordine di intensità crescente le leghe

Sn Bi	Sn-Bi	Sn Cd	Sn Tl	Sn Pb
50 %	80 % Sn	50 %	60 % Sn	33 % Sn

ma l' ordine potrebbe variare qualora si ricercasse in ciascun sistema la lega che presenta trasformazione massima.

Per i dati numerici principali vedasi il quadro riassuntivo.

VI. — L' *interpretazione* più generale e semplice di questi fatti sarebbe, a mio avviso, quella che essi dipendano dalla diminuzione di solubilità che i metalli, reciprocamente disciolti allo stato di cristalli misti, subiscono con l' abbassarsi della temperatura; con tale abbassamento i cristalli anche non saturi lo diventano, e se la temperatura diminuisce ulteriormente, il metallo in eccesso si separa sviluppando il calore di soluzione, il quale sarebbe appunto il calore di trasformazione.

Nella solidificazione i cristalli misti che si depositano al punto eutettico, sono, come è noto, cristalli saturi, e quelli che si depositano

a temperature superiori non lo sono, ma tendono a diventarlo disciogliendo, per successiva diffusione, mentre si raffreddano, una certa quantità del metallo in difetto; quindi, un prolungato arresto al punto eutettico, aumenterà la quantità di metallo disciolto più che l'arresto a qualsiasi altra temperatura e preparerà quindi una trasformazione di maggiore intensità, poichè è evidente che, nella fatta ipotesi, il calore di trasformazione sarà tanto maggiore quanto maggiore sarà la quantità di metallo disciolto che si deve separare. Ciò è in armonia con la conclusione IV *a*) secondo la quale il massimo di trasformazione si ottiene dopo gli arresti al punto eutettico.

VII. — Il fatto che la trasformazione si effettua in gran parte ad una temperatura fissa e non gradualmente, può spiegarsi ammettendo che, anche nelle soluzioni solide, possa avvenire la soprassaturazione, per la quale i cristalli saturi alla temperatura eutettica non abbandonino il metallo in eccesso al primo abbassarsi della temperatura, ma lo trattengano fino ad una temperatura più bassa, alla quale poi lo abbandonino in modo più o meno esplosivo; questa temperatura alla quale cessa la soprassaturazione sarebbe appunto la temperatura di massima trasformazione. L'esplosività del fenomeno deve dipendere dalla maggiore o minore quantità di metallo che si separa ad una stessa temperatura, e quindi sarà tanto maggiore quanto maggiore sarà l'omogeneità di concentrazione dei cristalli misti; ciò spiega la conclusione IV *a*) che l'esplosività aumenta con gli arresti al punto eutettico, perchè durante tali arresti anche molti cristalli non saturi si saturano ed altri si avvicinano al punto di saturazione aumentando l'omogeneità della lega.

È da osservare che un fenomeno di carattere esplosivo analogo alla trasformazione, e che si può attribuire ad una causa simile, avviene spesso anche allo stato liquido all'atto che incomincia la solidificazione delle leghe, come mostrano i diagrammi di solidificazione della Tavola B.

VIII. — Gli arresti a temperature differenti dalla temperatura eutettica, tendono ad aumentare la quantità dei cristalli meno concentrati dei cristalli saturi, quindi, non solo tenderanno a diminuire l'intensità della trasformazione, ma tenderanno pure ad abbassare la temperatura alla quale essa presenta il massimo, perchè, quando il numero dei cristalli non saturi avrà la prevalenza su quelli saturi, il massimo di trasformazione avverrà al punto in cui cessa

anche per essi lo stato di soprassaturazione; con ciò si spiega l' osservato abbassamento del punto di trasformazione in seguito agli arresti a temperature successivamente più basse (conclusione IV *a*).

IX. — Durante la fase esplosiva si dovrebbe depositare tanto metallo da lasciare i cristalli misti saturi a quella temperatura; continuando poi il raffreddamento, del nuovo metallo si dovrà separare per la ulteriore diminuzione di solubilità, quindi la trasformazione continuerà, per quanto meno energica, fino ad una temperatura tanto più bassa quanto più bassa sarà la temperatura alla quale la solubilità reciproca dei due metalli potrà considerarsi come praticamente nulla. Ciò spiega l' osservato *trascico* della trasformazione, e *la coda* con cui essa termina, poichè è evidente che il fenomeno andrà svanendo in modo lentissimo. È poi evidente che quanto più lenta sarà la diminuzione di solubilità, tanto più bassa sarà la temperatura alla quale la trasformazione si rende sensibile, quindi si deve ritenere che la solubilità decresca più lentamente nelle leghe di *Sn Pb* in cui la trasformazione si rende sensibile anche alla temperatura ordinaria, che non nelle leghe di *Bi Sn* in cui essa cessa a temperatura più elevata.

X. — Durante gli arresti in salita, il metallo separatosi nel precedente raffreddamento si trova in ottime condizioni per ridisciogliersi, trovandosi in intimo contatto con i cristalli che l' hanno espulso, perciò col tempo si ridiscioglierà tendendo a rendere i cristalli saturi alla temperatura dell' arresto; è questa la stessa condizione in cui tende a lasciarli l' arresto in discesa a quella stessa temperatura, per cui due arresti tenderanno al medesimo stato finale, come risulta dalla conclusione III *b*).

XI. — Nelle leghe sufficientemente omogenee, a produrre tale stato di saturazione parteciperà, nelle proporzioni volute, l' intera massa dei metalli presente nella lega, e la quantità dei cristalli saturi sarà quella che compete alla concentrazione della lega; ma nelle leghe eterogenee, la ripartizione ineguale dei due metalli lascierà inattive delle porzioni di uno di essi, quelle cioè che non sono in contatto abbastanza intimo con la massa dell' altro che dovrebbero sciogliere; perciò in esse non potrà raggiungersi che un grado di saturazione relativa, compatibile con quella ripartizione, e si avrà perciò nel raffreddamento una trasformazione minore di quella che competerebbe alla concentrazione totale della lega.

In tali casi è necessario combattere con lo ***smorzamento*** il prodursi della eterogeneità, e le leghe smorzate presenteranno, giusta la conclusione IV *c*), un grado di trasformazione più elevato, e più prossimo a quello che spetta alla lega in base alla sua concentrazione.

XII. — Nei casi in cui il giusto grado di saturazione si possa raggiungere a varie temperature, casi che si possono riconoscere dalla eguaglianza del calore di trasformazione dopo gli arresti, alla stessa temperatura, in discesa, in salita e con la lega smorzata, si può ritenere che detto calore di trasformazione sia proporzionale alla solubilità di un metallo alle dette temperature e si può fondare su di esso un ***nuovo metodo per la determinazione delle curve di solubilità*** dei metalli allo stato solido, curve che sono parte integrante del diagramma diequilibrio, e di lunga, difficile ed incerta determinazione con altri metodi.

Questo metodo si è potuto applicare con sufficiente sicurezza alle leghe di ***Sn Bi*** (§ 17) e ***Sn Pb*** (§ 25), fornendo le curve di solubilità allo stato solido rappresentate nelle figure 2.ª e 3.ª e riprodotte nelle figure 4.ª e 12.ª della Tavola I.

XIII. — In base alla detta ipotesi la trasformazione dovrebbe mancare, o non essere percettibile alla reazione termica, nei seguenti casi:

a) in quelle di leghe che non formano cristalli misti, mancando il metallo disciolto da separare; in tal caso pare si trovino le leghe Sn Zn e le leghe di Tl Bi;

b) in quello in cui la solubilità allo stato solido varii assai lentamente colla temperatura, perchè i cristalli misti non si diluirebbero col raffreddamento;

c) in quello in cui il calore di dissoluzione di un metallo nell' altro sia prossimo a zero, poichè la separazione dei due metalli si farebbe senza sensibile reazione termica.

Potrà fare oggetto di ulteriori ricerche il determinare a quali di queste od altre categorie appartengano le leghe che non presentano trasformazione allo stato solido.

XIV. — L' esplosività del fenomeno di trasformazione nelle leghe di ***Pb Sn*** fu da Rosenhain e Tucker attribuita ad una trasfor mazione allotropica dello stagno da una forma più solubile ad una meno solubile nel piombo, la quale avverrebbe alla temperatura di trasformazione.

Questa spiegazione avrebbe nel suo attivo il fatto, che risulta dalle mie esperienze, che la trasformazione si è finora solo osservata in leghe di stagno, metallo che presenta varie trasformazioni allotropiche. Io credo però che non sia necessario ricorrere a tale ipotesi, almeno per queste leghe, essendo quella della soprassaturazione più semplice, ed una logica applicazione, alle soluzioni solide, di un fenomeno tanto comune nelle soluzioni liquide. Inoltre per spiegare con l' ipotesi della trasformazione allotropica i fatti osservati, converrebbe ammettere che essa avvenisse a temperature diverse a seconda delle concentrazioni, il che in ultima analisi è come attribuirle le stesse leggi della solubilità.

In appoggio alla ipotesi della soprassaturazione, sta anche il fatto che la trasformazione, tranne che nel caso delle leghe *Sn Cd*, avviene sempre a pochi gradi al disotto della temperatura eutettica.

XV. — Le leghe di *Sn Cd* si comportano in modo alquanto diverso da quello delle altre leghe studiate; benchè l' analisi termica non abbia finora rivelato in esse la formazione di una quantità notevole di cristalli misti, esse presentano una energica trasformazione con caratteri speciali che sono:

a) una temperatura di trasformazione molto al disotto della temperatura di solidificazione;

b) una grande fissità della temperatura di trasformazione che rimane inalterata, anche quando con opportuno trattamento la trasformazione è ridotta molto debole;

c) la rapida reversibilità del fenomeno alla detta temperatura, per cui la lega, mentre non manifesta indizio di trasformazione se viene riscaldata a pochi gradi al di sotto di quella temperatura, la manifesta quasi completa appena quella temperatura sia sorpassata;

d) un alto grado di esplosività, per la quale la trasformazione è localizzata ad un ristretto intervallo di temperatura e si manifesta con recalescenza;

e) la sua inalterabilità quasi completa sotto l' azione degli arresti a temperature costanti superiori all' ordinario punto di trasformazione;

f) la sua inalterabilità anche all' azione dello smorzamento, il cui effetto immediato è profondo nelle altre leghe, così che la lega, appena solidificata con lo smorzamento, presenta, alla solita

temperatura, la sua trasformazione altrettanto esplosiva come se si fosse solidificata regolarmente.

Questi fatti, e specialmente l'ultimo, che è in particolar modo eloquente per dimostrare come in questa lega il fenomeno della trasformazione non dipenda, dalla rapidità con cui si sono deposti i cristalli misti durante il primo stadio della solidificazione, rendono plausibile l'ipotesi che si tratti di un fenomeno alquanto diverso dal consueto: cioè o di una variazione repentina di solubilità al momento della trasformazione allotropica dello stagno (la quale ipotesi esigerebbe però la presenza di cristalli misti più concentrati di quelli finora riconosciuti esperimentalmente), o di una reazione chimica fra i due metalli alla temperatura di trasformazione.

Istituto Fisico della R. Università di Modena
31 dicembre 1911.

INDICE

DELLE TABELLE E DELLE TAVOLE

Tabella A (Cfr. con Tavola A).

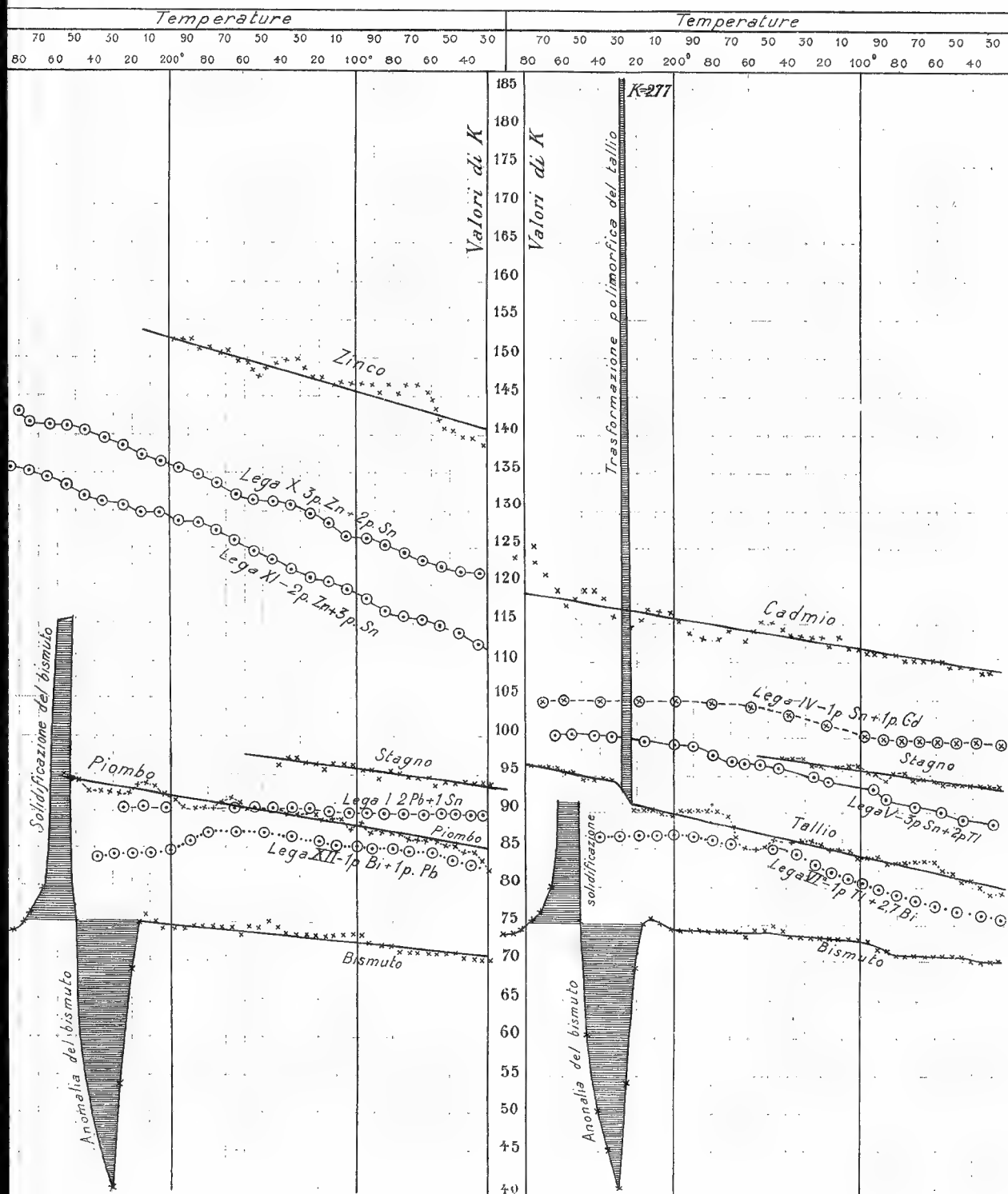
Esperienze coi metalli puri.

	Hg	Sn	Pb	Zn	Tl	Cd	Bi
Peso gr.	1105	591	918	555	959	686	789
Intervalli di temperat.	Durate di raffredd.	Rapporti $K = t : t_1 \times 10^2$					
320 — 315	16	....	....	....	100	....	....
315 — 310	16	....	....	....	100	....	....
310 — 305	17	....	....	....	100	....	....
305 — 300	17	....	....	....	100	....	....
300 — 295	17	....	....	....	**1180**	135	74
295 — 290	17	....	....	....	69	133	74
290 — 285	18	....	....	....	97	126	76
285 — 280	19	....	....	....	97	123	77
280 — 275	20	....	....	....	97	124	82
275 — 270	21	....	....	....	97	125	87
270 = 265	21	....	....	....	97	122	79
265 — 260	22	....	....	....	96	118	**4865**
260 — 255	24	....	....	....	93	117	211
255 — 250	24	....	94	....	94	118	116
250 — 245	25	....	92	....	94	119	61
245 — 240	26	....	92	....	94	119	51
240 — 235	28	....	91	....	94	118	45
235 — 230	28	....	91	....	94	116	42
230 — 225	29	....	92	....	94	114	54
225 — 220	31	....	92	....	**184**	114	69
220 — 215	32	....	93	....	90	115	76
215 — 210	33	....	93	....	90	117	76
210 — 205	34	....	93	....	89	117	75
205 — 200	36	....	93	....	89	117	73
200 — 195	38	....	91	153	91	115	74
195 — 190	41	....	89	153	91	113	74
190 — 185	42	....	91	151	89	112	74
185 — 180	43	....	90	151	90	113	74
180 — 175	47	....	90	151	90	113	74
175 — 170	48	....	91	151	89	114	74

Seguito:

	Hg	Sn	Pb	Zn	Tl	Cd	Bi
Intervalli di temperatura	Durate di raffredd.	Rapporti $K = t : t_1 \times 10^2$					
170 — 165	50	....	93	150	87	112	74
165 — 160	52	....	91	149	85	113	73
160 — 155	53	....	90	149	85	114	74
155 — 150	59	....	89	147	85	115	74
150 — 145	62	....	91	148	86	115	74
145 — 140	66	96	90	149	85	114	74
140 — 135	69	97	89	149	86	113	74
135 — 130	74	97	89	149	86	113	73
130 — 125	79	97	89	148	86	113	73
125 — 120	84	95	89	147	86	113	73
120 — 115	89	95	89	147	85	112	73
115 — 110	96	96	87	146	85	113	73
110 — 105	102	96	87	146	85	112	73
105 — 100	108	95	89	146	84	111	73
100 — 95	117	96	86	146	84	111	73
95 — 90	126	93	88	146	84	111	72
90 — 85	136	95	87	145	83	111	72
85 — 80	149	95	87	146	83	111	71
80 — 75	162	94	87	145	83	110	71
75 — 70	179	95	86	146	83	110	71
70 — 65	197	94	86	146	83	110	71
65 — 60	221	93	86	145	83	110	72
60 — 55	247	94	85	143	82	110	71
55 — 50	282	93	86	140	82	109	71
50 — 45	322	93	84	140	81	109	70
45 — 40	383	93	85	139	81	109	71
40 — 35	464	93	83	139	80	108	70
35 — 30	583	93	83	138	79	108	70
30 — 25	764	93	82	....	79	....	70

Tavola A (Vedi Tabelle A e B)

RAFFRONTI FRA I RAPPORTI $K=\frac{t}{t_1}$ DEI METALLI PURI ED I RAPPORTI NORMALI K_1 DELLE LEGHE CORRISPONDENTI

T ABELLA B (Cfr. con Tavola B).

Raffreddamenti totali da 300° a 20°.

VI	X	XI	XII	III	IX	I	V	IV	Numero della lega	VI	X	XI	XII	III	IX	I	V	IV
1 Tl	3Zn	2Zn	1Pb	1Sn	4Sn	2Pb	3Sn	1Sn	Composizione / Peso	peso grammi = p								
2.7Bi	2Sn	3Sn	1 Bi	1 Bi	1 Bi	1Sn	2 Tl	1Cd		891	569	575	850	659	621	759	691	638
Rapporti normali									Intervalli di temperatura	Calore di fusione o trasformazione								
$K_1 \times 100$										$\Delta = (K - K_1)\ 100$								
....	146	139	....	....	....	....	....	....	320 — 310	—	314	496	....	....	....	....	....	....
....	145	138	....	....	....	....	....	....	310 — 300	—	272	400	....	....	....	....	....	....
87	141	137	....	98	93	90	100	104	300 — 290	— 4	240	342	....	23	27	24	6	5
87	143	136	83	98	93	90	100	104	290 — 280	— 6	188	278	— 2	7	7	— 1	3	— 8
87	142	135	84	98	93	90	100	104	280 — 270	0	176	252	0	— 6	— 9	— 5	0	— 11
87	141	134	84	98	93	90	100	104	270 — 260	2	138	210	— 4	— 2	1	— 4	0	— 2
87	141	133	84	98	93	90	100	104	260 — 250	0	126	184	+ 2	4	2	4	0	3
87	140	132	84	97	93	90	100	104	250 — 240	2	114	172	0	— 4	4	411	2	1
87	139	131	84	97	93	90	100	104	240 — 230	0	104	148	— 4	6	4	261	0	9
87	138	130	86	96	92	90	100	104	230 — 220	6	84	116	0	3	— 3	202	0	10
87	137	129	87	96	92	90	100	104	220 — 210	14	78	116	0	0	— 4	157	0	97
87	136	129	87	95	92	90	100	104	210 — 200	18	78	112	— 2	— 1	963	133	4	464
87	135	128	88	95	91	90	100	104	200 — 190	**3364**	**2018**	**3006**	0	— 6	854	97	4	475
87	134	128	87	94	91	90	100	101	190 — 180	— 10	10	54	0	8	446	**1475**	4	394
87	133	127	87	93	91	89	100	104	180 — 170	2	0	0	0	— 5	294	26	**2756**	**3397**
86	132	126	87	92	91	89	98	100	170 — 160	2	— 2	0	0	2	208	11	63	39
86	131	124	87	91	91	89	97	100	160 — 150	0	— 2	0	+ 8	254	172	**270**	**247**	16
85	131	123	86	90	90	89	96	100	150 — 140	— 2	— 2	— 2	350	474	134	69	59	2
84	130	122	86	88	90	89	96	100	140 — 130	0	0	0	218	**2748**	**511**	41	43	2
83	129	121	86	87	89	89	95	100	130 — 120	0	0	0	**1112**	21	— 3	28	29	**252**
83	128	120	85	87	89	89	94	100	120 — 110	— 2	0	0	0	7	3	20	26	27
82	127	119	85	87	89	89	94	100	110 — 100	0	+ 2	0	+ 2	15	9	25	17	1
81	126	118	85	86	89	89	93	100	100 — 90	0	+ 2	+ 2	0	176	28	11	9	2
80	125	117	85	86	89	89	92	99	90 — 80	0	+ 2	0	0	65	106	8	7	0
79	124	116	85	85	89	89	92	99	80 — 70	— 2	+ 2	0	0	19	**123**	8	5	1
78	123	115	84	84	89	89	91	99	70 — 60	0	+ 2	0	0	9	25	8	3	1
78	122	114	84	84	89	89	90	99	60 — 50	0	0	0	— 2	5	14	8	2	0
78	121	113	84	83	88	89	89	99	50 — 40	— 2	0	— 2	0	4	9	11	2	0
77	121	112	84	82	87	89	88	99	40 — 30	0	0	0	0	2	7	8	3	0
76	....	....	84	82	87	89	87	99	30 — 20	0	....	....	— 2	2	4	4	3	0

			VI	X	XI	XII	III	IX	I	V	IV
Calore di solidificazione	in unità arbitrarie U	Sopra il punto eutettico	0,38	19,12	28,26	5,76	7,26	31,39	13,10	0,14	14,47
		Al punto eutettico . .	33,54	20,28	30,60	11,12	27,46	4,57	14,56	27,77	34,52
		Totale pel peso p . . .	33,92	39,40	58,86	16,88	34,72	35,96	27,66	27,91	48,99
		» per 1 Kg. . . .	38,07	69,26	102,4	19,86	52,70	57,91	36,45	40,44	76,78
	in calorie per Kg.		**8,26**	**15,04** (1)	**22,22** (2)	**4,30**	**11,43**	**12,56**	**7,92**	**8,77**	**16,66**
Calore di solidificaz.	in unità arbitrarie U	pel peso p.	nullo	nullo	nullo	nullo	3,00	3,25	5,30	4,68	2,86
		per Kg.					4,55	5,24	7,00	6,71	4,48
	in calorie per Kg.						**0,99**	**1,14**	**1,52**	**1,47**	**0,97**

(1) Incompleto. (2) Quasi completo.

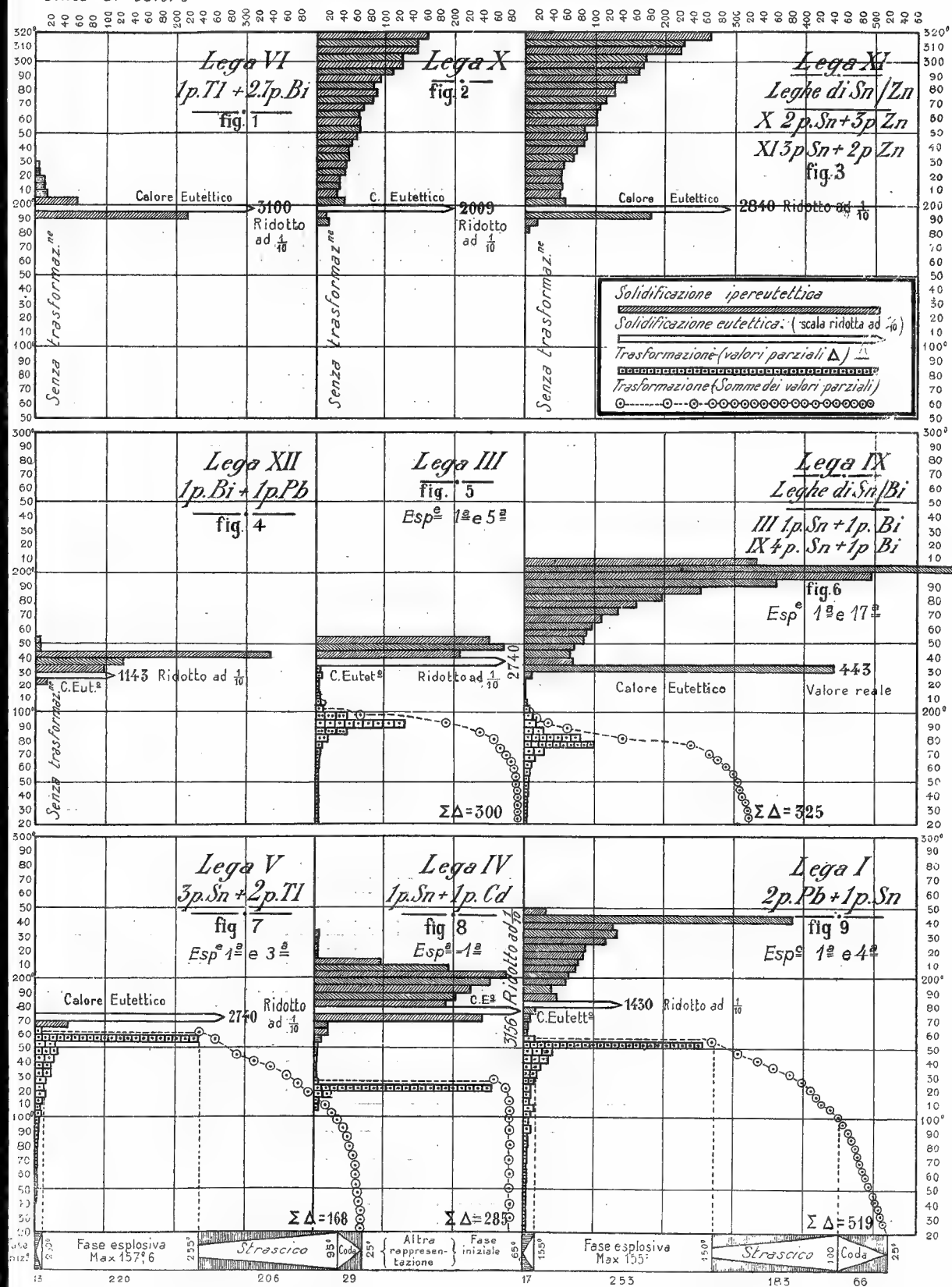



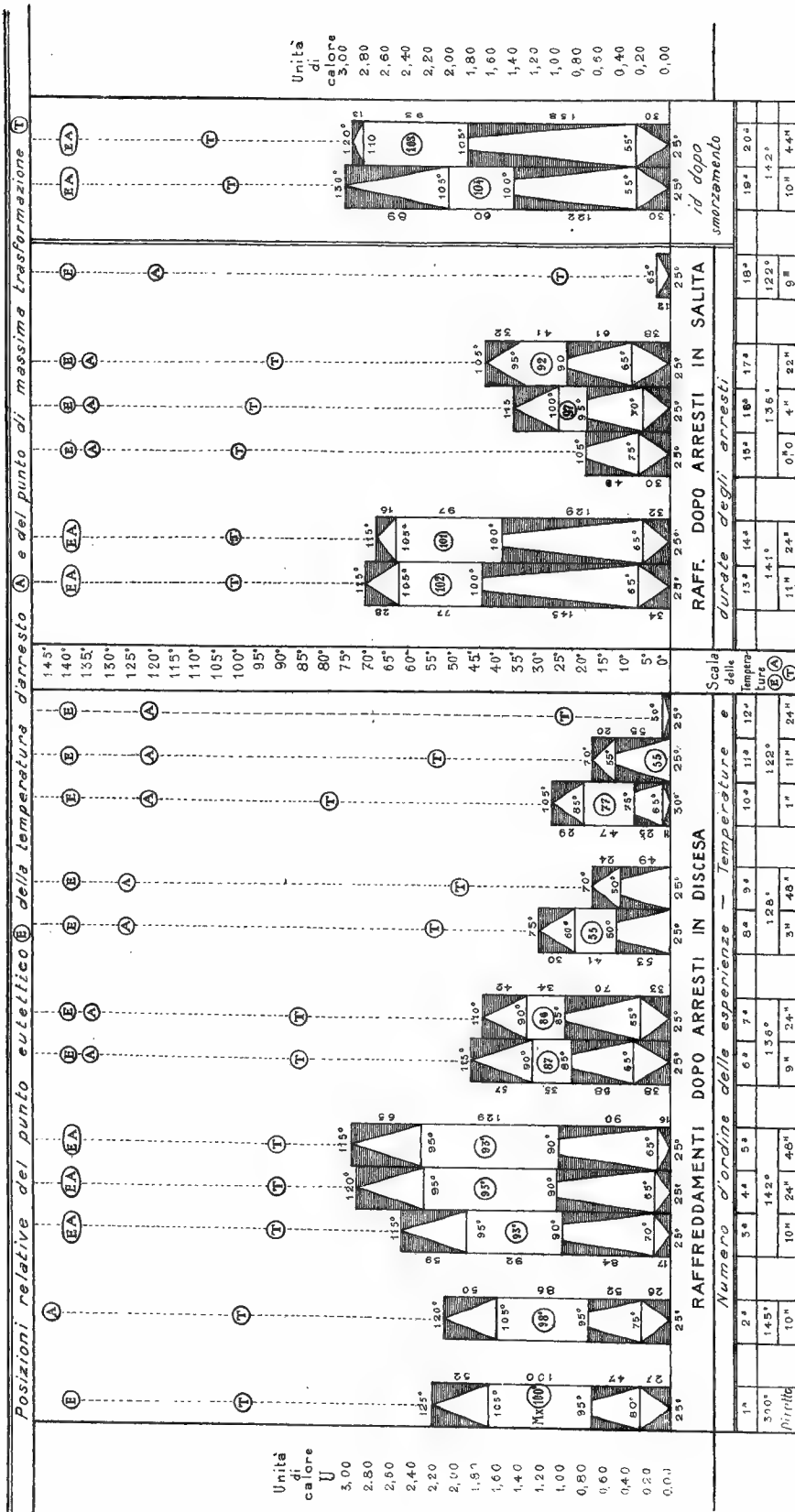
TABELLA C (Cfr. con Tavola C).

Calore di trasformazione Δ dopo trattamenti diversi.

Lega III 1 p. Bi + 1 p. Sn peso 659 gr.

Raffreddamenti dopo arresti in discesa													Raffreddamenti dopo arresti in salita						Raffreddamenti dopo smorz.	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª	12.ª	N. dell' esperienza	13.ª	14.ª	15.ª	16.ª	17.ª	18.ª	19.ª	20.ª
Diretto da 300°	145°	142°			136°		128°		122°			Temper. d' arresto	141°		136°			122°	142.°	
	10ʰ	10ʰ	24ʰ	48ʰ	9ʰ	24ʰ	3ʰ	48ʰ	1ʰ	11ʰ	24ʰ	Durata dell' arresto	11ʰ	24ʰ	0ʰ	4ʰ	22ʰ	9ʰ	10ʰ	44ʰ
Valori di $\Delta = (K - K_1)\ 100$												Intervalli di temperatura	Valori di $\Delta = (K - K_1)\ 100$							
205	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	145 — 140	346	....	....	....	....	....	77	161
2742	....	487	327	225	....	....	....	....	....	....	....	140 — 135	210	22	....	....	....	....	44	94
6	....	328	89	173	12	52	....	....	....	....	....	135 — 130	48	7	43	27	23	....	5	37
15	17	21	4	10	5	9	....	....	....	....	....	130 — 125	8	6	13	9	6	....	13	7
12	14	5	6	7	8	7	13	9	....	....	....	125 — 120	4	5	12	11	6	....	12	6
12	14	5	3	4	7	7	— 1	2	14	12	7	120 — 115	5	5	14	9	6	....	13	7
11	13	3	3	3	5	5	— 3	2	3	1	— 1	115 — 110	5	4	9	9	5	....	13	6
17	23	5	3	5	5	3	— 2	1	2	— 1	— 1	110 — 105	23	12	8	10	4	8	38	**93**
54	**45**	14	9	10	7	6	— 1	2	5	2	0	105 — 100	**77**	**97**	9	22	8	0	**60**	65
46	**41**	37	44	47	12	9	0	2	4	1	0	100 — 95	53	56	8	**28**	24	— 1	34	23
27	27	**92**	**124**	**129**	28	24	1	1	7	0	— 1	95 — 90	32	25	9	20	**41**	0	21	16
13	11	45	45	46	**35**	**34**	0	0	13	— 1	— 1	90 — 85	21	16	9	12	25	0	16	11
7	8	20	21	19	25	25	— 1	0	**22**	— 1	— 2	85 — 80	14	11	8	8	12	— 1	12	9
5	6	12	12	12	16	16	0	1	**25**	— 2	— 1	80 — 75	11	8	6	6	10	0	10	8
4	4	7	7	7	9	9	3	0	15	0	— 2	75 — 70	7	6	4	6	7	— 1	8	7
3	4	6	6	6	8	8	11	3	10	4	— 1	70 — 65	7	7	6	5	7	0	8	7
2	2	3	4	3	5	6	16	4	4	6	— 1	65 — 60	5	4	3	3	5	1	7	6
2	3	2	3	3	5	6	**21**	7	2	**10**	0	60 — 55	5	4	4	3	5	1	6	6
2	2	1	2	2	4	5	**20**	**10**	1	11	— 1	55 — 50	4	4	3	3	5	1	5	5
1	2	1	2	2	5	5	13	10	1	11	3	50 — 45	4	4	3	3	5	2	5	5
1	2	1	2	2	4	5	13	10	1	10	5	45 — 40	4	4	2	3	5	3	5	5
2	2	1	2	1	5	6	9	10	1	9	6	40 — 35	4	4	3	3	5	2	5	5
2	2	1	1	1	5	5	9	9	1	7	6	35 — 30	4	4	1	2	4	2	5	5
3	3	1	1	2	5	7	9	10	....	7	8	30 — 25	4	4	1	1	4	....	5	5
Somme dei valori Δ distinti in quattro fasi per la costruzione grafica																				
52	50	59	62	65	57	42	30	24	29	20	8	Fase I iniziale	28	16	....	41	32	....	89	13
100	86	92	124	129	35	34	41	....	47	....	....	» II esplosiva	77	97	....	28	41	....	60	93
47	52	84	91	90	58	70	53	49	25	55	....	» III strascico	145	129	49	52	61	....	122	158
27	26	17	17	16	38	33	....	....	11	....	....	» IV coda	34	32	30	26	38	12	30	30
226	214	252	294	300	188	179	124	73	112	75	8	Tot. unità arbitr.	284	274	79	147	172	12	301	294
0.74	**0.70**	**0.83**	**0.97**	**0.99**	**0.62**	**0.59**	**0.41**	**0.24**	**0,37**	**0.25**	**0.03**	Id. calorie per Kg.	**0.93**	**0.90**	**0.26**	**0.48**	**0.57**	**0.04**	**0.99**	**0.97**

Tavola. C (Vedi Tabella C)
Lega III { 1 p. Bi+ 1 p. Sn
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE QUATTRO FASI DEL CALORE DI TRASFORMAZIONE DOPO TRATTAMENTI DIVERSI
Posizioni relative del punto eutettico (E) della temperatura d'arresto (A) e del punto di massima trasformazione (T)
Unità di calore U
RAFFREDDAMENTI DOPO ARRESTI IN DISCESA
RAFF. DOPO ARRESTI IN SALITA
id dopo smorzamento
Numero d'ordine delle esperienze — Temperature e durate degli arresti
Scala delle Temperature (E) (A) (T)

TABELLA D. (Cfr. con Tavola D)

Calore di trasformazione Δ dopo trattamenti diversi.

Lega IX 1 p. Bi + 4 p. Sn — Peso 621 gr.

Raffreddamenti dopo arresti in discesa									Raffreddamenti dopo arresti in salita							Raffreddamenti dopo smorz.	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	N. dell' esperienza	9.ª	10.ª	11.ª	12.ª	13.ª	14.ª	15.ª	16.ª	17.ª
Diretto da 300°	170°	150°	142°		138°	130°	120°	Temper. d' arresto	150°	140°		136°		120°	100°	142°	
	3ʰ	3ʰ	3ʰ	9ʰ	4ʰ	3ʰ	3ʰ	Durata dell'arresto	4ʰ	1ʰ	5ʰ	7ʰ	48ʰ	3ʰ	0,0ʰ	3ʰ	36ʰ
Valori di $\Delta = (K - K_1)\ 100$								Intervalli di temperatura	Valori di $\Delta = (K - K_1)\ 100$								
....	....	....	....	....	....	....	....	145 — 140	13	....	....	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....	....	140 — 135	17	56	53	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....	....	135 — 130	141	4	— 3	....	....	....	....	....	....
9	15	7	9	22	9	3	....	130 — 125	19	— 4	3	4	3	....	....	18	0
1	— 5	6	3	10	8	1	....	125 — 120	21	2	2	2	2	26	....	17	— 3
5	7	7	8	8	9	3	0	120 — 115	11	2	2	3	3	15	....	15	2
6	3	9	13	12	13	3	2	115 — 110	8	2	2	4	4	1	....	17	1
18	8	15	**59**	39	33	3	0	110 — 105	18	10	3	2	2	2	....	34	3
40	17	28	**56**	**68**	**73**	5	0	105 — 100	**34**	26	15	3	4	1	....	**47**	6
35	**24**	**35**	24	34	42	1	2	100 — 95	**37**	**37**	**37**	3	6	3	....	**46**	11
18	18	25	15	21	22	3	1	95 — 90	24	26	**37**	5	7	3	....	37	17
11	10	18	10	13	13	3	0	90 — 85	18	19	27	10	**59**	3	0	26	27
8	9	13	9	10	10	6	0	85 — 80	12	12	17	21	**60**	4	0	20	**79**
6	8	11	8	9	9	10	1	80 — 75	10	9	12	**33**	36	**5**	0	16	**98**
6	7	9	5	5	8	14	0	75 — 70	8	7	9	**31**	23	**5**	— 1	11	25
5	6	7	5	6	6	**17**	1	70 — 65	7	6	7	25	18	4	0	7	14
4	6	6	3	4	5	16	1	65 — 60	6	5	6	19	11	5	— 1	5	11
4	5	5	2	4	4	15	2	60 — 55	4	4	4	15	10	4	— 1	9	8
3	5	5	2	3	4	14	3	55 — 50	2	2	3	12	7	4	— 1	5	6
3	5	4	3	2	3	11	4	50 — 45	4	2	3	10	6	4	— 1	4	5
4	5	5	4	3	3	11	6	45 — 40	3	2	3	9	5	3	0	3	4
3	5	5	3	3	3	10	7	40 — 35	3	2	3	7	5	3	0	3	4
3	5	4	3	3	3	9	7	35 — 30	3	2	1	4	4	2	0	2	3
4	5	4	4	4	3	9	**8**	30 — 25	4	2	3	3	3	2	1	5	4
Somme dei valori Δ distinti in quattro fasi per la costruzione grafica																	
30	28	52	24	51	55	37	35	Fase I iniziale	18	38	20	39	17	23	0	101	64
75	24	35	115	68	73	....	....	» II esplosiva	71	37	74	64	119	....	0	93	177
49	64	89	66	92	110	112	....	» III strascico	85	79	78	97	111	....	0	136	64
33	25	32	34	32	28	....	....	» IV coda	23	21	20	7	17	31	0	17	20
187	151	208	239	243	266	149	35	Tot. unità arbitr.	197	175	192	207	264	54	0	347	325
0.65	**0.53**	**0.73**	**0.84**	**0.85**	**0.93**	**0.52**	**0.12**	Id. calorie per Kg.	**0.69**	**0.61**	**0.67**	**0.72**	**0.92**	**0.19**	**0.00**	**1.21**	**1.14**

Lega IX $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ p. Bi} + \\ 4 \text{ p. Sn} \end{array} \right.$ RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE QUATTRO FASI DEL CALORE DI TRASFORMAZIONE DOPO TRATTAMENTI DIVERSI

Posizioni relative del punto eutettico (E) *della temperatura d'arresto* (A) *e del punto di massima trasformazione* (T)

Unità di calore U: 3.60 – 3.40 – 3.20 – 3.00 – 2.80 – 2.60 – 2.40 – 2.20 – 2.00 – 1.80 – 1.60 – 1.40 – 1.20 – 1.00 – 0.80 – 0.60 – 0.40 – 0.20 – 0.00

Scala delle temperature (E) (A) (T): 170° – 165° – 160° – 155° – 150° – 145° – 140° – 135° – 130 – 125° – 120° – 115° – 110° – 105° – 100° – 95° – 90° – 85° – 80° – 75° – 70° – 65° – 60° – 55° – 50 – 45° – 40° – 35° – 30° – 25° – 20° – 15° – 10° – 5° – 0°

RAFFREDDAMENTI DOPO ARRESTI IN DISCESA

RAFFREDDAMENTI DOPO ARRESTI IN SALITA

id dopo smorzamento

Numero d'ordine delle esperienze — Temperature e durate degli arresti

Esperienza	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª	15ª	16ª	17ª
Temperatura	300°	170°	150°	142°		138°	130°	120°	150°	140°		136°		120°	100°	142°	
Durata	Diretto	3H	3H	3H	8H	4H	3H	3H	4H	1H	5H	7H	48H	3H	0H,0	3H	36H

Tabella E (Cfr. con tavola E).

Calore di trasformazione Δ dopo trattamenti diversi.

Lega I 2 p. Pb + 1 p. Sn Peso p. = 759 gr.

Raffreddamenti dopo arresti in discesa										Raffreddamenti dopo arresti in salita										Raffreddamenti dopo smorz.	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	N. dell'esperienza	10.ª	11.ª	12.ª	13.ª	14.ª	15.ª	16.ª	17.ª	18.ª	19.ª	20.ª	21.ª
Diretto da 300°	208°	183°		170°	160°		150°		Temper. d'arresto	180°	170°	160°				140°	120°	100°		180°	
	3ʰ	3ʰ	10ʰ	3ʰ	3ʰ	8ʰ	3ʰ	10ʰ	Durata dell'arresto	10ʰ	3ʰ	3ʰ	6ʰ	9ʰ	0.ʰ0	0.ʰ0	0.ʰ0	0ʰ.0	0ʰ.0	3ʰ	11ʰ
Valori di $\Delta = (K - K_1)\ 100$									Intervalli di temperatura	Valori di $\Delta = (K - K_1)\ 100$											
6	....	....	....	....	....	....	....	....	165 — 160	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	24	28
7	5	11	17	7	....	....	....	....	160 — 155	14	10	....	....	....	27	....	....	....	....	212	183
12	14	217	253	6	7	3	....	....	155 — 150	199	6	10	6	6	21	....	....	....	....	48	55
151	102	40	38	9	7	6	....	....	150 — 145	45	6	5	6	7	20	....	....	....	....	32	35
42	87	31	31	11	8	5	....	....	145 — 140	31	18	7	11	7	20	....	....	....	....	26	28
25	28	21	22	47	25	3	8	7	140 — 135	23	74	11	8	7	16	18	....	....	....	21	19
14	20	20	19	137	48	7	7	7	135 — 130	19	74	8	11	11	16	16	....	....	....	19	18
11	14	15	16	27	48	30	6	6	130 — 125	13	25	10	21	15	12	12	....	....	....	15	14
9	12	13	12	13	23	111	6	6	125 — 120	13	11	12	41	44	13	10	....	....	....	15	14
7	9	11	11	11	12	41	4	5	120 — 115	11	9	25	43	67	11	9	11	....	....	12	12
8	9	11	9	11	15	17	6	6	115 — 110	11	9	38	28	25	12	10	10	....	....	12	12
7	8	9	14	9	17	11	6	4	110 — 105	9	8	37	19	14	10	9	8	....	....	12	10
6	6	9	11	8	19	10	6	5	105 — 100	8	3	30	16	8	11	8	5	— 7	....	11	11
2	4	7	5	5	16	7	8	6	100 — 95	6	6	24	10	7	8	4	4	5	3	13	11
3	4	6	6	6	14	7	10	6	95 — 90	7	6	20	10	5	8	6	4	2	1	12	10
3	4	5	4	5	11	5	13	8	90 — 85	7	6	14	12	5	7	4	4	2	— 1	14	11
2	3	6	4	3	10	6	17	10	85 — 80	8	6	10	10	4	7	4	4	0	0	13	13
4	4	6	4	4	9	5	15	12	80 — 75	9	7	9	10	5	7	5	3	0	— 1	16	14
3	3	5	4	3	6	4	17	13	75 — 70	8	7	7	8	5	7	4	3	— 1	— 1	13	13
4	2	6	4	3	6	4	14	15	70 — 65	8	7	7	8	5	8	4	3	1	— 1	14	12
3	3	6	4	3	5	4	11	14	65 — 60	8	8	6	10	5	7	4	3	0	— 1	13	12
5	3	3	4	3	6	4	11	15	60 — 55	6	8	7	9	5	7	4	3	0	0	12	11
4	3	6	4	3	6	4	11	14	55 — 50	8	9	7	9	6	7	5	2	0	— 2	12	10
5	3	6	5	4	7	4	10	14	50 — 45	7	9	8	10	7	7	5	4	1	1	13	10
6	3	6	6	3	7	4	10	14	45 — 40	7	9	8	10	8	7	5	3	1	— 1	12	10
6	4	6	4	3	6	4	10	14	40 — 35	7	10	8	10	7	7	5	3	— 1	0	12	10
7	3	6	4	3	6	4	10	14	35 — 30	7	10	9	10	7	7	5	3	1	2	13	10
8	3	6	4	3	6	4	10	15	30 — 25	7	11	9	10	7	7	5	3	0	2	13	10
Somme dei valori Δ distinti in quattro fasi per la costruzione grafica																					
25	19	11	17	67	33	40	80	101	Fase I iniziale	14	24	78	57	84	....	....	....	....	....	24	28
151	102	217	253	137	96	111	49	....	» II esplosiva	199	148	75	84	67	....	....	....	....	....	212	183
129	193	193	183	79	158	93	97	129	» III strascico	293	184	183	209	54	297	92	29	....	....	418	395
65	49	73	66	54	49	56	....	....	» IV coda	....	....	....	....	81	....	69	54	11	1	....	....
370	363	494	519	337	336	300	226	230	Tot. unità arbitr.	506	356	336	350	286	297	161	83	11	1	654	606
1.06	1.04	1.41	1.48	0.96	0.96	0.86	0.65	0.66	Id. calorie per Kg.	1.45	1.02	0.96	1.00	0.82	0.85	0.46	0.24	0.03	0.00	1.87	1.73

Tavola L

(Vedi Tabella E) Legalª { p.Pb / 1p.Sn }

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE QATTRO FASI DEL CALORE DI TRASFORMAZIONE DOPO TRATTAMENTI DIVERSI

Posizioni relative del punto eutettico (E) della temperatura d'arresto (A) e del punto di massima trasformazione (T)

Unità di calore U

Scala delle temperature (E) (A) (T)

RAFFREDDAMENTI DOPO ARRESTI IN DISCESA

RAFFREDDAMENTI DOPO ARRESTI IN SALITA

id dopo smorzamento

Numero d'ordine delle esperienze — Temperatura e durata degli arresti

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª	15ª	16ª	17ª	18ª 19ª	20ª	21ª
300°	208°	183°		170°	160°		150°		180°	170°	160°			160°	140°	120°	100°	183°	180°
Diretto	3H	3H	10H	3H	3H	8H	3H	10H	10H	3H	3H	6H	9H	rapidissimi		0H0		3H	11H

TABELLA F. (Cfr. con Tavola F).

Calore di trasformazione Δ dopo trattamenti diversi.

Lega V 3 p. Sn + 2 p. Tl Peso = p. = 691 gr.

Raffreddamenti dopo arresti in discesa							Raffreddamenti dopo arresti in salita							Raffreddamenti dopo smorzamento						
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	N. dell'esperienza	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª	12.ª	13.ª	14.ª	15.ª	16.º	17.ª	18.ª	19.ª	20.ª
Diretto da 300°	170°		165°	160°	125°	Temper. d'arresto	175°	170°		166°		150°	100°	170°	167°			150°		100°
	8ʰ	24ʰ	3ʰ	3ʰ	5ʰ	Durata dell'arresto	11ʰ	2ʰ	22ʰ	0ʰ.0	5ʰ	0ʰ.0	0ʰ.0	subito dopo solida	0ʰ.0	4ʰ	15ʰ	0ʰ.0	12ʰ	0ʰ.0
Valori di $\Delta = (K - K_1)\ 100$						Intervalli di temperatura	Valori di $\Delta = (K - K_1)\ 100$													
23	84	50	....	....	....	170 — 165	....	71	71	....	....	....	....	....	....	62	96	....	....	....
38	23	13	40	....	....	165 — 160	53	53	25	45	69	....	....	....	62	138	122	....	....	....
144	197	220	135	....	....	160 — 155	123	140	196	27	49	....	....	....	37	28	58	....	....	....
31	29	27	40	....	....	155 — 150	31	28	27	26	28	....	....	....	34	28	24	....	....	....
26	28	31	26	31	....	150 — 145	26	23	23	23	16	....	....	40	31	26	21	35	40	....
24	24	28	23	8	....	145 — 140	21	19	22	22	12	14	....	34	28	22	20	31	10	....
18	21	22	16	8	....	140 — 135	18	16	16	16	12	11	....	26	24	16	15	24	9	....
14	17	21	13	9	....	135 — 130	14	13	17	13	9	10	....	26	21	14	13	19	7	....
14	15	16	11	6	....	130 — 125	11	10	12	11	9	10	....	20	17	10	20	17	6	...
11	13	13	12	6	....	125 — 120	11	9	11	8	7	6	....	19	14	9	9	16	7	....
11	10	16	8	6	3	120 — 115	7	7	10	7	5	6	....	19	14	7	5	15	6	....
7	8	10	6	5	3	115 — 110	6	6	7	5	4	4	....	17	11	5	6	11	5	....
6	7	8	5	3	2	110 — 105	4	4	5	3	3	3	....	13	8	4	3	8	4	....
5	6	9	5	2	2	105 — 100	4	4	4	4	2	2	....	12	8	4	3	8	4	....
3	5	5	3	1	1	100 — 95	0	2	2	2	2	2	3	10	4	2	2	6	2	10
2	3	4	2	1	0	95 — 90	2	1	2	0	0	0	1	9	3	2	1	4	2	6
3	3	4	3	1	2	90 — 85	2	2	2	2	1	2	2	8	4	2	2	4	3	6
2	3	3	1	1	1	85 — 80	1	1	1	1	1	1	0	5	1	1	1	1	1	5
1	1	3	0	0	0	80 — 75	0	0	0	0	0	0	−1	6	2	0	0	1	1	3
1	1	2	1	0	1	75 — 70	0	0	−1	−1	0	−1	−1	5	1	1	1	1	1	4
1	1	1	1	−1	0	70 — 65	0	−1	0	−1	−1	−1	0	4	1	−1	1	0	2	3
1	1	2	1	1	1	65 — 60	0	0	0	−1	0	1	0	4	1	0	0	1	2	3
0	1	1	0	0	1	60 — 55	0	−1	0	−1	0	−1	1	3	0	0	−1	0	2	3
0	0	1	0	0	1	55 — 50	−1	−1	0	−1	−1	0	−1	3	0	0	0	0	1	2
1	1	1	0	0	1	50 — 45	0	0	0	−1	−1	−1	0	3	0	1	−1	0	1	2
0	0	1	0	0	0	45 — 40	−1	0	0	−1	0	−1	−0	2	−1	−1	−1	−1	1	1
1	0	1	0	0	0	40 — 35	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	1	2
1	0	2	0	1	0	35 — 30	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	−1	1	2
1	0	3	0	0	0	30 — 25	0	0	0	0	0	1	0	3	0	−1	0	−1	1	1

Somme dei valori Δ distinti in quattro fasi per la costruzione grafica

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª		7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª	12.ª	13.ª	14.ª	15.ª	16.º	17.ª	18.ª	19.ª	20.ª
38	23	13	40	....	....	Fase I iniziale	53	53	25	....	....	....	....	....	....	62	96	....	....	....
144	197	220	135	31	....	» II esplosiva	123	140	196	45	69	....	....	....	62	138	122	....	40	....
167	183	206	165	48	....	» III strascico	145	131	150	158	147	57	....	269	247	165	181	190	50	27
17	15	29	12	10	19	» IV coda	11	11	10	5	10	10	3	28	16	14	11	9	25	26
366	418	468	352	89	19	Tot. unità arbitr.	332	335	381	208	226	67	3	297	325	379	410	199	115	53
1.15	**1.31**	**1.47**	**1.11**	**0.28**	**0.06**	Id. calorie per Kg.	**1.04**	**1.05**	**1.20**	**0.65**	**0.71**	**0.21**	**0.01**	**0.93**	**1.02**	**1.19**	**1.29**	**0.62**	**0.36**	**0.17**

Tavola F (*Vedi Tabella F*)

Lega V { 3p. Sn + 2p. Tl — RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE QUATTRO FASI DEL CALORE DI TRASFORMAZIONE DOPO TRATTAMENTI DIVERSI

Posizioni relative del punto eutettico (E) della temperatura d'arresto (A) e del punto di massima trasformazione (T)

Unità di calore U: 4.80 – 4.60 – 4.40 – 4.20 – 4.00 – 3.80 – 3.60 – 3.40 – 3.20 – 3.00 – 2.80 – 2.60 – 2.40 – 2.20 – 2.00 – 1.80 – 1.60 – 1.40 – 1.20 – 1.00 – 0.80 – 0.60 – 0.40 – 0.20 – 0.00

Scala delle Temperature (E) (A) (T): 180° – 175° – 170° – 165° – 160° – 155° – 150° – 145° – 140° – 135° – 130° – 125° – 120° – 115° – 110° – 105° – 100° – 95° – 90° – 85° – 80° – 75° – 70° – 65° – 60° – 55° – 50° – 45° – 40° – 35° – 30° – 25°

RAFFREDDAMENTI DOPO ARRESTI IN DISCESA — RAFFREDDAMENTI DOPO ARRESTI IN SALITA — RAFFREDD. DOPO ARRESTI IN SALITA - LEGA SMORZATA

Numero d'ordine delle esperienze — Temperature e durate degli arresti

	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª	15ª	16ª	17ª	18ª	19	20ª
	25°	50°	25°	65°	90°	60°	90°	90°	90°	90°	90°	80°	90°	25°	60°	80°	60°	70	25°	25°
Temperatura	300°	170°		165°	150°	125°	175°	170°		166°		150°	100°	170° subito dopo solido	167°			150°		100
Durata	Diretto	8H	24H	3H	5H	5H	11H	2H	22H	0H0	5H	0H0			0H0	4H	15H	0H0	12H	0H0

Tabella G. (Cfr. con Tavola G.).

Calore di trasformazione Δ dopo trattamenti diversi.

Lega IV   1 p. Sn + 1 p. Cd   Peso = p. = 638 gr.

Raffreddamenti dopo arresti in discesa												Raffreddamenti dopo arresti in salita								Raffredd. dopo smorz.
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª	N. dell'esperienza	12.ª	13.ª	14.ª	15.ª	16.ª	17.ª	18.ª	19.ª	20.ª
Diretto da 300°	180°	177°		153°	135°	132°				125°	Temper. d'arresto	160°			140°			130°	100°	177°
	3h	3h	11h	3h	3h	5′	20′	1h	3h	3h	Durata dell'arresto	0h.0	1h	10h	0h.0	1h	10h	0h.0	0h.0	subito dopo solida
Valori di $\Delta = (K - K_1)\,100$											Intervalli di temperatura	Valori di $\Delta = (K - K_1)\,100$								
19	....	45	43	....	....	....	....	....	....	....	170 — 165	....	....	....	....	....	....	....	....	....
20	....	18	25	....	....	....	....	....	....	....	165 — 160	....	....	....	....	....	....	....	....	....
11	5	13	17	....	....	....	....	....	....	....	160 — 155	18	....	....	....	....	....	....	....	....
5	7	10	10	....	....	....	....	....	....	....	155 — 150	10	10	14	....	....	....	....	....	....
1	1	5	6	9	....	....	....	....	....	....	150 — 145	1	1	3	....	....	....	....	....	6
1	3	3	4	4	....	....	....	....	....	....	145 — 140	0	0	0	....	....	....	....	....	3
1	0	1	4	1	....	....	....	....	....	....	140 — 135	3	0	0	16	....	....	....	....	4
1	4	5	5	5	14	....	....	8	4	....	135 — 130	5	3	4	178	7	7	....	....	4
1	2	2	3	4	4	....	50	51	26	....	130 — 125	220	227	227	50	203	213	....	....	205
251	258	223	222	239	232	233	179	78	20	20	125 — 120	21	27	28	11	33	26	12	....	42
23	7	38	48	17	17	26	32	18	9	7	120 — 115	5	7	5	1	5	2	3	....	5
4	3	13	14	5	6	4	10	5	3	2	115 — 110	2	2	3	2	3	3	3	....	4
1	3	6	6	4	4	4	5	4	3	3	110 — 105	2	2	1	2	3	3	1	....	2
0	2	5	5	5	1	3	2	2	2	2	105 — 100	3	2	2	2	3	2	2	....	3
1	2	4	2	3	3	1	1	1	2	1	100 — 95	0	1	1	−1	1	0	0	1	1
1	2	3	3	2	2	2	3	3	0	1	95 — 90	0	0	1	0	1	1	−2	−1	3
0	3	3	6	3	2	2	3	3	2	1	90 — 85	1	1	1	1	1	1	0	0	2
0	1	4	3	3	2	3	1	3	3	1	85 — 80	0	1	2	0	1	0	0	0	3
1	3	4	4	4	2	2	2	3	2	2	80 — 75	1	1	1	1	1	2	1	−1	2
0	2	3	2	2	1	2	2	2	2	2	75 — 70	1	1	1	1	1	0	0	0	2
1	2	3	1	3	1	1	1	2	1	0	70 — 65	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	3	2	3	1	1	2	3	1	1	65 — 60	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	4	2	3	1	1	2	2	2	1	60 — 55	1	1	0	1	1	0	0	1	1
0	2	3	2	3	1	1	0	2	1	1	55 — 50	0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	5	3	2	1	1	1	1	1	1	50 — 45	1	1	1	2	1	1	1	0	2
0	1	4	3	2	1	1	1	1	1	1	45 — 40	1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	4	2	2	1	1	1	1	1	1	40 — 35	1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	3	2	2	0	0	0	0	0	0	35 — 30	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	3	2	2	0	0	0	0	0	0	30 — 25	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Somme dei valori Δ distinti in quattro fasi per la costruzione grafica																				
2	6	7	8	9	4	....	50	59	4	....	Fase I iniziale	8	3	4	16	7	7	....	....	8
251	258	223	222	239	232	233	179	78	46	20	» II esplosiva	220	227	227	178	203	213	....	....	205
23	7	62	73	22	23	26	47	23	9	7	» III strascico	26	34	33	61	38	26	....	....	47
9	29	53	39	48	24	29	20	33	27	21	» IV coda	16	15	18	20	21	17	25	0	30
285	300	345	342	318	283	288	296	193	86	48	Tot. unità arbitr.	270	279	282	275	269	263	25	0	290
0.97	**1.02**	**1.17**	**1.16**	**1.08**	**0.96**	**0.97**	**1.01**	**0.66**	**0.29**	**0.16**	Id. calorie per Kg.	**0.92**	**0.95**	**0.96**	**0.93**	**0.91**	**0.89**	**0.09**	**0.00**	**0.99**

Tavola U (vedi Tabella G)

Tavola H

RIASSUNTO GRAFICO DEI VALORI INIZIALE E MASSIMO DEL CALORE DI TRASFORMAZIONE RIDOTTI IN CALORIE PER CHILOGRAMMO DI LEGA

Lega	III^a	IX^a	IV^a	V^a	I^a
	1 p. Sn + 1 p. Bi	4 p. Sn + 1 p. Bi	1 p. Sn + 1 p. Cd	3 p. Sn + 2 p. Tl	1 p. Sn + 2 p. Pb
Punti eutettico	138°	135°	178°	172°	182°
Punti di massima trasformaz.^e	92°	80°	125°	157°	155°
Calorie di massima trasformaz.^ne	0,990	1,135	1,174	1,473	1,875
Calorie di solidificazione	11,43	12,56	16,66	8,77	7.92

LEGHE *Senza trasformazioni*

VI 1 p. Tl + 2,7 p. Bi
X 3 p. Zn + 2 p. Sn
XI 2 p. Zn + 3 p. Sn
XII 1 p. Pb + 1 p. Bi

Lega	Temper.^a eutettica	Calorie di solidific.^e
VI^a	196°	8,26
X^a	198°	15,03 *incompleta*
XI^a	198°	22,26 *quasi completa*
XII^a	127°	4,31

FASI di *Trasformazioni*

Fase iniziale

Fase esplosiva

Strascico

Coda

Temp. di mass. trasf. T°

Tabella e N.° dell'esperienza	C-1^a	C-5^a	D-1^a	D-16^a	G-1^a	G-3^a	F-1^a	F-3^a	E-1^a	E-20^a
Caratteristiche del raffreddamento	Diretto da 300°	Dopo 46 a 142°	Diretto da 300°	Dopo smorzamento	Diretto da 300°	Dopo 3^h a 177°	Diretto da 300°	Dopo 24^h a 170°	Diretto da 300°	Dopo smorzamento

INDICE

Prof. DOMENICO MAZZOTTO

Influenza dei trattamenti termici sulla solidificazione e la trasformazione delle leghe Sn-Cd

1.° Introduzione — Scelta del sistema da studiare.

Nell'intento di approfondire le nostre cognizioni sul fenomeno di trasformazione esotermica che alcune leghe binarie facilmente fusibili subiscono allo stato solido, eseguii recentemente uno studio preliminare (1) sopra leghe di diversa natura, per riconoscere in quali di esse il fenomeno si presentasse ed in quali no, e misurare possibilmente la quantità di calore sviluppata nel fenomeno stesso nei casi in cui esso aveva luogo.

Avendomi uno studio precedente (2) eseguito sopra una lega di Pb-Sn, fatto riconoscere che il detto calore di trasformazione subisce notevoli variazioni a seconda del trattamento termico cui la lega era stata esposta prima del raffreddamento, credetti utile di eseguire il detto studio preliminare variando più la composizione che non la concentrazione delle leghe, onde riconoscere, se leghe di natura differente fossero ugualmente sensibili ai trattamenti termici, e poter poi concentrare l'attenzione sopra quelle leghe in cui il fenomeno si manifestasse con caratteri più opportuni per uno studio più approfondito.

Riconobbi che, fra le leghe presentanti la trasformazione, quella di Pb-Sn era la più sensibile ai trattamenti termici, mentre la lega di Sn-Cd vi era pressochè indifferente, manifestando un calore di trasformazione pressochè costante, ad una temperatura fissa, e ben distinta dalla temperatura eutettica dalla quale era separata da un intervallo di circa 50°.

(1) D. Mazzotto, *Studi termici sulla trasformazione delle leghe allo stato solido,* (Ricerche preliminari) Mem. R. Acc. Modena, Serie III, Vol. X, pag. 407, Parte II, (1912).

(2) D. Mazzotto, *Ueber die Natur der Unsetzung in den Blei-Zinn Legierungen im festen Zustande*, Intern. Zeitschrf. f. Metallographie, Vol. I, pag. 289, 1911.

Sotto questo aspetto le leghe di Sn-Cd presentavano quindi il caso più semplice, e credetti perciò utile incominciare da queste lo studio complementare che viene iniziato col presente lavoro.

2.° Leghe studiate e studi precedenti sul diagramma del sistema.

La lega di Sn-Cd studiata nel lavoro preliminare aveva la concentrazione del 50 % e corrisponde all'attuale lega F; estesi ora la ricerca ad altre undici leghe di concentrazioni differenti comprese fra le concentrazioni estreme di 2 % Sn e 2 % Cd unendovi, per controllo, la lega precedentemente studiata; tali leghe, contraddistinte con lettere dell'alfabeto, avevano le concentrazioni sottoindicate:

Leghe	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
% Sn	2	4	8	20	36	50	60	70	80	90	94	98.

Con tale studio mi proponevo anche di controllare, ed eventualmente ritoccare, il diagramma di costituzione delle leghe di tale sistema, sul quale regnavano ancora delle incertezze, ma, mentre io ero intento al lavoro, comparvero sull'argomento: un lavoro sperimentale dello Schleicher (3) ed una esauriente discussione teorica sul medesimo per opera del Guertler (4) che hanno stabilito il diagramma suddetto in una forma pressochè definitiva. Siccome però non è possibile disgiungere la parte del mio lavoro che riguarda la costituzione del diagramma da quella che riguarda gli effetti dei trattamenti termici, fui costretto a ripetere e calcolare gli esperimenti anche nella parte che si riferisce alla costruzione del diagramma, e pervenni ad una forma di esso che collima quasi perfettamente con quella data dai suddetti autori.

Ma con ciò, anche in questa parte, il mio lavoro, non si presenta come un semplice controllo, non solo perchè il metodo da me seguito, specialmente nel calcolo delle esperienze, è del tutto diverso da quello ordinario seguito pure dallo Schleicher e permette di stabilire, come vedremo, (§ 8) particolarità del diagramma non rilevabili

(3) A. P. Schleicher, *Experimentelle Untersuchungen am System Cd-Sn*, Int. Zeitschr. f. Metallographie II, pag. 76 (1912).

(4) W. Guertler, *Theoretisches zur Constitution der Zinn-Kadmium Legierungen* (ivi pag. 90).

col metodo ordinario, ma più ancora perchè una parte del diagramma di Schleicher e Guertler fu profondamente modificata da quest' ultimo, rispetto alla forma che era risultata dalle semplici determinazioni esperimentali, in base a considerazioni teoriche le quali, per quanto convincenti, non escludono il desiderio di una conferma esperimentale; questa fu appunto offerta dal comportamento di dette leghe nei trattamenti termici da me studiati.

3.° Metodo di osservazione e di calcolo dei risultati.

Il metodo da me seguito e l'apparecchio usato sono gli stessi descritti nella precedente mia memoria (l. c. (1)) alla quale mi rimetto pei dettagli; rammenterò soltanto, riguardo al metodo, che in esso, raffreddando successivamente nello stesso crogiuolo e nello stesso ambiente a 0° la lega ed il mercurio, che serve da corpo campione, si determinano, fra successivi intervalli di temperatura, (ordinariamente di 5°), i *rapporti reali*, **R**, fra le effettive durate di raffreddamento della lega e del mercurio, ed i *rapporti normali*, $\mathbf{R}_1$, che sarebbero risultati se nei singoli intervalli di temperatura la lega non emettesse altro calore che quello dipendente dal suo calore specifico normale.

Le differenze

$$\Delta_1 = R - R_1$$

rappresentano, in una unità arbitraria, le quantità di calore emesse dalla lega, in detti intervalli di temperatura, per la parziale solidificazione o trasformazione avvenuta entro i medesimi.

Dai valori relativi, espressi in unità arbitrarie, si può passare a quelli assoluti, in calorie per chilogrammo di lega, moltiplicandoli pel quoziente $\frac{0,217}{p}$ in cui p rappresenta il peso della lega, e 0,217 un coefficiente dipendente, dalla capacità termica del crogiuolo ripieno di mercurio e dal numero di gradi compresi nell'intervallo considerato, tali valori assoluti saranno quindi espressi da:

$$\Delta = (R - R_1)\,\frac{0,217}{p}.$$

Nella precedente memoria i risultati furono ordinariamente espressi coi valori relativi Δ_1, ma nella presente, per l' uso che dovremo farne, preferii calcolarne i valori assoluti Δ espressi nelle tabelle,

per comodità di scrittura, in centesimi di caloria, così che da essi si ha direttamente il calore che sviluppa un chilogrammo di lega in quell'intervallo di temperatura per la parziale solidificazione o trasformazione in esso avvenuta.

Naturalmente, la somma dei valori Δ, per tutto l'intervallo di solidificazione o di trasformazione, ne rappresenta il calore totale, e negli intervalli in cui non avvengono azioni esotermiche risulta sensibilmente $\Delta = 0$.

4.° Determinazione dei rapporti reali, teorici e normali.

I rapporti reali R si calcolano facilmente dalle osservazioni dirette delle durate di raffreddamento della lega e del mercurio (aggruppate di 5 in 5 gradi quando furono determinate per intervalli minori), ma ho già fatto notare (l. c. (1)) le difficoltà inerenti alla determinazione dei rapporti normali R_1, specialmente nei casi, non rari, in cui l'azione esotermica avviene entro un lungo intervallo di temperatura. Io credo di essere ora pervenuto ad una più sicura determinazione di tali rapporti approfittando dei valori che assumono i rapporti stessi in esperienze preliminari fatte sui metalli puri costituenti la lega.

Infatti, essendo pei metalli puri molto ristretto l'intervallo d solidificazione, i rapporti reali in tutti gli altri intervalli di temperatura coincidono coi normali. Ora, costruendo le grafiche di tali rapporti rispetto alla temperatura, si ottengono pei due metalli due linee, sensibilmente rette ed ascendenti coll'aumentare della temperatura, fra le quali devono esser compresi i rapporti normali delle leghe dei due metalli (vedi l. c. (1) Tavola A); anzi, nell'ipotesi che pel calcolo del calore specifico normale delle leghe valga la legge dei miscugli, si potrà ammettere che, tracciando una retta che disti dalle due suddette di quantità inversamente proporzionali alle quantità dei singoli metalli contenuti nella lega, tale retta rappresenti i presumibili valori normali di R_1 per la lega stessa, alle varie temperature, valori che denomineremo *rapporti teorici.*

Ho già fatto nella precedente memoria qualche applicazione di questa regola, e trovato p. es. che era valida con discreta approssimazione per due leghe di Sn-Zn di concentrazione differente, cosicchè mi sono provato ad applicarla di proposito nel presente studio alle leghe di Sn-Cd.

Il risultato non fu soddisfacentissimo, in quanto che si trovò, che, anche in intervalli in cui una lega non presenta presumibilmente azioni esotermiche, si può notare una piccola differenza, ordinariamente positiva, fra i rapporti reali ed i rapporti teorici; ciò non ostante, si può concludere che la considerazione dei rapporti teorici dà al calcolo un grado di sicurezza che si raggiunge raramente col confronto dei soli rapporti reali.

Nella Tabella I, pag. 487, sono confrontati, per le singole leghe studiate del sistema Sn-Cd, i rapporti teorici coi reali unitamente ai rapporti reali ottenuti collo stagno e col cadmio puri (tutti moltiplicati per 100 per comodità di scrittura). Vi si osserva che, mentre per le leghe più ricche di stagno vi è quasi coincidenza fra gli uni e gli altri, in quelle più ricche di cadmio i rapporti teorici a temperatura bassa sono in media inferiori di tre o quattro unità ai rapporti reali. Queste differenze sono realmente molto piccole a petto di quelle che si hanno negli intervalli in cui avvengono azioni esotermiche (vedi i rapporti segnati fra parentesi nella tabella I) ma sono sufficienti per suscitare il dubbio che siano dovute ad una azione esotermica debolissima, quale sarebbe p. es. una lenta separazione di un metallo disciolto in una soluzione solida, fatto che fu già da me osservato nelle leghe di Sn-Pb.

Nelle leghe di Sn-Cd però, la costanza di tali differenze per un lungo intervallo di temperatura, mi fa escludere questa ipotesi, e ritenere piuttosto che, il maggior valore che presentano i rapporti reali rispetto ai teorici, dipenda dall'avere la lega una conduttività termica inferiore alla media dei metalli, la quale circostanza influisce a ritardare il raffreddamento e ad aumentare quindi, debolmente, il valore dei rapporti reali.

Nel caso attuale ho quindi ritenuto che i rapporti reali coincidessero coi normali, e che la lega fosse quindi esente da trasformazione negli intervalli di temperatura in cui quelle piccole differenze si manifestavano.

Ad intelligenza della tabella I[a] osserverò ancora, che lo stagno presenta un sensibile innalzamento del rapporto normale (da circa 99 a 106) nel passaggio dallo stato liquido allo stato solido. Ciò produce una imprecisione nel calcolo del rapporto teorico nei tratti in cui le leghe sono in parte solide in parte liquide. Per questi tratti ho calcolato il rapporto teorico usando per lo stagno l'uno e

l'altro dei due suddetti rapporti; perciò si leggono nella tabella, sotto le temperature di 200° e 250°, due valori del rapporto teorico (Solido e Liquido), ottenuti usando pel primo il rapporto corrispondente allo stagno solido e pel secondo quello dello stagno liquido; questi valori, sempre molto vicini, indicano i limiti fra i quali può oscillare il rapporto teorico.

Confrontando quindi i rapporti teorici coi reali, e tenendo pure conto degli altri criterî indicati nella memoria precedente, si arriva a stabilire con sufficiente approssimazione i valori dei rapporti normali per le singole leghe nei varii intervalli di temperatura. I valori adottati sono quelli stampati in grassetto nella Tabella I.ª, e da essi si hanno, per interpolazione, quelli delle temperature intermedie; l'errore probabile di tali valori credo non superi, nei casi più dubbi, le due unità.

5.° Costruzione dei rami del liquidus.

La prima osservazione alla quale venivano sottoposte le leghe era il *raffreddamento totale o diretto*, nella quale si portava la lega nell'ambiente a 0° mentre era liquida e ben mescolata alla temperatura di 300° (e per alcune di 325°,) e se ne osservava il raffreddamento fino alla temperatura di 25°.

Le durate di raffreddamento, aggruppate di 5 in 5 gradi, sono registrate nella Tabella IIª a pag. 489 insieme alle corrispondenti durate di raffreddamento del mercurio (che venivano continuamente controllate durante gli esperimenti) ed alle durate di raffreddamento ottenute coi metalli puri. In questa tabella sono segnate in grassetto le durate di raffreddamento negli intervalli di temperatura in cui hanno luogo: l'inizio della solidificazione ed il massimo sviluppo del calore eutettico e di quello di trasformazione.

Sono queste le osservazioni che ordinariamente servono per determinare *il liquidus* del diagramma, passante pei punti che indicano le temperature, *T*, alle quali le singole leghe incominciano la solidificazione. Queste temperature, registrate in testa alla tabella IIª, sono quelle alle quali risale il termometro, al principio della solidificazione, dopo essersi alquanto abbassato al disotto di esse per isteresi fasica (nel caso attuale per soprassaturazione).

TABELLA 1.

Confronti fra i rapporti di raffreddamento $\frac{\text{lega o metallo}}{\text{mercurio}}$

Leghe o metalli		Rapporti	50°	100°	150°	200° Solido	200° Liquido	250° Solido	250° Liquido	300°
Cadmio. .		Reali e normali. .	**108**	**111**	**115**	**118**		**121**		**124**
Leghe A	Sn % 2	Teorici. .	108	112	114	118	118	122	121	122
		Reali . .	112	117	(142)	(136)		(170)		(753)
		Normali .	**112**	**116**	**118**	**118**		**121**		**122**
B	4	Teorici. .	108	111	114	118	118	121	121	121
		Reali . .	112	115	(127)	(149)		(224)		120
		Normali .	**112**	**115**	**118**	**118**		**121**		**120**
C	8	Teorici. .	107	110	114	117	116	121	120	120
		Reali . .	111	117	(125)	(173)		(300)		(124)
		Normali .	**112**	**116**	**120**	**116**		**120**		**120**
D	20	Teorici .	105	108	112	116	114	119	117	117
		Reali . .	111	113	(121)	(244)		(116)		117
		Normali .	**111**	**113**	116	**115**		**117**		**117**
E	36	Teorici. .	102	106	109	113	110	117	114	—
		Reali . .	106	109	115	(319)		113		—
		Normali .	**106**	**108**	**111**	**112**		**114**		—
F	50	Teorici. .	100	104	110	114	112	118	110	110
		Reali . .	99	104	106	107		109		105
		Normali .	**100**	**103**	**107**	**107**		**109**		**105**
G	60	Teorici. .	98	102	106	110	106	114	108	105
		Reali . .	99	100	105		109		105	105
		Normali .	**98**	**100**	**106**		**108**		**105**	**105**
H	70	Teorici. .	100	103	106	110	104	112	106	—
		Reali . .	98	99	105		107		105	—
		Normali .	**98**	**99**	**104**		**105**		**105**	—
I	80	Teorici. .	98	102	105	108	102	112	104	100
		Reali . .	100	101	103		(106)		100	100
		Normali .	**100**	**101**	**103**		**101**		**100**	**100**
J	90	Teorici. .	97	100	104	107	100	110	102	—
		Reali . .	96	99	104	(691)			100	—
		Normali .	**97**	**100**	**104**		**107**		**100**	—
K	94	Teorici. .	96	99	103	106	100	110	101	—
		Reali . .	95	98	101	(400)			100	—
		Normali .	**95**	**98**	**100**		**100**		**100**	—
L	98	Teorici. .	95	98	102	106	99	110	99	—
		Reali . .	93	98	100	(227)			97	—
		Normali .	**93**	**98**	**101**		**105**		**97**	—
Stagno . .		Reali e normali. .	**92**	**96**	**100**	**104**	—	—	**99**	**98**

Diagramma d'equilibrio del Sistema Sn Cd
Leghe
Temperature
Calore sviluppato in centesimi di caloria
Analisi termica del calore eutettico
Analisi termica del calore di trasformazione
% Sn
% Cd

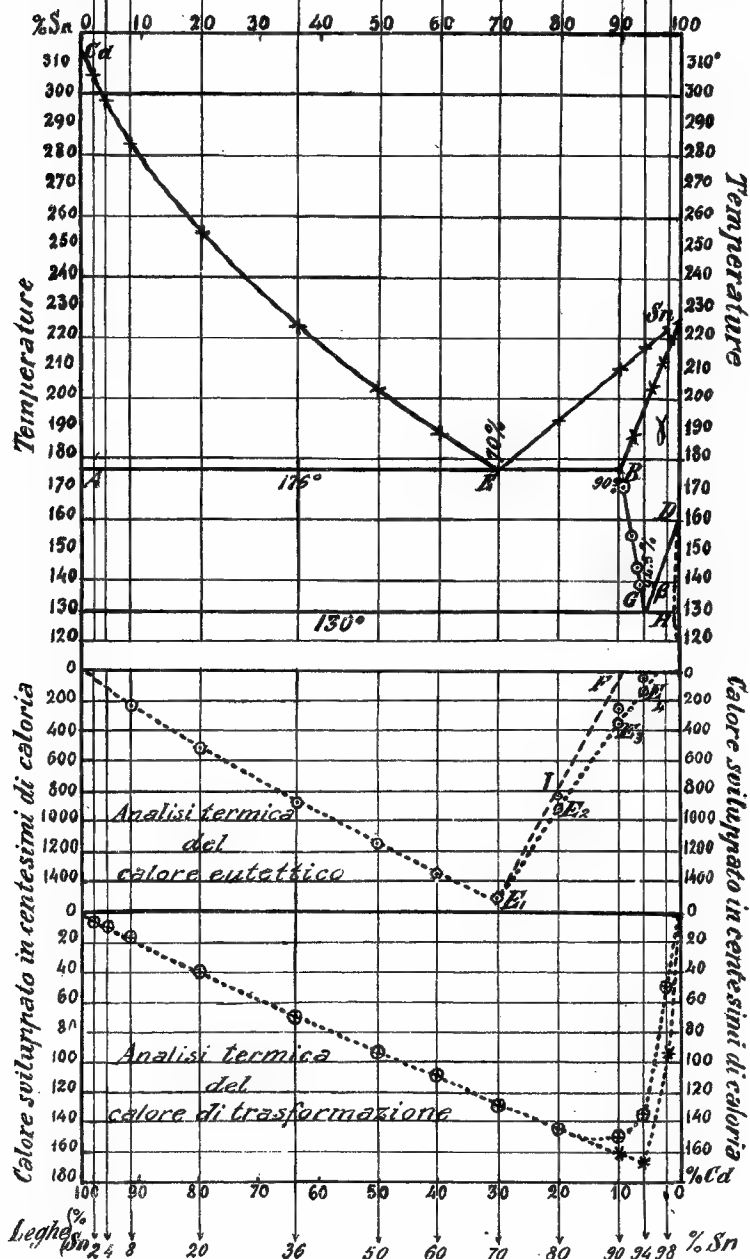



Tabella II.

Metalli o Leghe	Hg	Cd	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	Sn
Stagno %	—	—	**2**	**4**	**8**	**20**	**36**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**94**	**98**	—
Inizio della solidificazione T	—	—	306°	298°	284°.5	255°.0	226°.5	205°.5	188°.5	177°.0	191°.9	209°.1	218°	224°	—
Intervalli di temperatura	Durate di raffreddamento osservate in centesimi di minuto														
320 — 315	16	19	20	....	....	....	....	15	....	....	....	....	....	....	....
315 — 310	16	**606**	20	....	....	....	....	17	....	....	....	....	....	....	....
310 — 305	16	59	117	20	18	....	....	18	....	....	....	....	....	....	....
305 — 300	17	31	**249**	23	21	....	....	19	....	....	....	....	....	....	....
300 — 295	18	28	129	**196**	22	23	....	19	....	....	....	....	....	....	18
295 — 290	19	27	94	152	22	23	....	20	....	....	....	....	....	18	18
290 — 285	20	26	71	113	28	22	....	20	20	....	18	....	18	19	19
285 — 280	20	26	60	95	**182**	22	....	21	20	....	19	19	19	19	18
280 — 275	20	27	55	79	128	25	....	22	21	22	20	19	20	20	20
275 — 270	21	27	48	71	110	25	24	23	21	22	21	19	21	20	20
270 — 265	22	28	46	64	98	25	25	23	23	22	22	20	21	21	22
265 — 260	23	29	45	60	90	27	26	25	24	23	22	21	22	22	23
260 — 255	24	30	44	57	83	32	27	26	25	24	23	22	23	23	23
255 — 250	25	30	43	56	77	**179**	28	27	26	25	24	23	24	24	24
250 — 245	26	32	42	53	73	133	29	27	27	26	25	24	25	25	25
245 — 240	27	33	43	54	72	124	30	29	28	27	27	25	26	26	26
240 — 235	28	34	43	52	69	116	32	30	29	28	28	25	27	27	28
235 — 230	29	34	44	51	68	109	33	32	30	29	28	26	28	28	29
230 — 225	30	35	45	52	65	106	**118**	33	32	31	29	27	30	28	**935**
225 — 220	31	37	45	53	66	103	165	34	33	33	30	29	30	**549**	282
220 — 215	32	38	45	52	63	98	142	34	35	35	31	29	**321**	366	36
215 — 210	33	39	48	53	63	93	133	35	37	35	33	30	321	183	37
210 — 205	35	41	46	53	62	90	127	45	38	36	36	**380**	225	96	38
205 — 200	37	44	50	55	64	90	118	**231**	40	37	38	237	151	82	40
200 — 195	39	45	50	57	62	88	116	137	42	40	41	178	111	68	41
195 — 190	40	47	54	57	64	85	113	131	43	42	**258**	144	93	56	42
190 — 185	42	49	55	59	66	85	110	133	**187**	42	251	120	80	51	44
185 — 180	44	51	56	60	66	84	108	122	142	44	210	106	76	50	45
180 — 175	46	54	59	62	68	**555**	**961**	**1542**	**1580**	**1615**	**1003**	100	**77**	51	47
175 — 170	48	56	60	**151**	**285**	209	338	120	357	406	252	**399**	**194**	**54**	49
170 — 165	51	59	**102**	84	88	93	88	64	66	62	72	67	69	58	52
165 — 160	53	60	74	76	76	72	69	59	59	56	58	57	57	59	54
160 — 155	56	64	72	73	72	70	67	60	58	55	57	54	55	58	55
155 — 150	59	68	75	75	73	71	68	61	61	58	60	55	58	63	60
150 — 145	62	70	**88**	**86**	**82**	74	72	65	64	60	60	58	59	69	60
145 — 140	65	76	79	80	78	**80**	75	68	67	64	65	61	63	69	66
140 — 135	69	78	83	82	81	79	76	72	70	65	67	64	66	70	69
135 — 130	74	83	88	88	87	85	81	76	74	70	71	66	68	75	72
130 — 125	78	88	92	93	92	89	84	80	78	73	74	70	**329**	**156**	75
125 — 120	82	91	98	98	96	99	95	**299**	**340**	**360**	**398**	**379**	98	88	81
120 — 115	87	99	106	**118**	**147**	**202**	**268**	104	91	85	88	80	86	83	86
115 — 110	96	105	**120**	120	110	108	103	99	96	88	91	86	88	88	91
110 — 105	99	112	118	117	117	114	110	102	102	94	96	89	93	94	98
105 — 100	107	118	126	127	125	121	117	110	108	101	103	96	101	101	102
100 — 95	115	127	133	135	133	132	124	117	117	108	109	104	107	107	110
95 — 90	124	137	144	145	143	142	135	127	125	116	118	111	116	115	120
90 — 85	134	147	155	155	154	151	145	136	135	126	127	120	124	125	129
85 — 80	146	157	166	169	166	164	156	147	146	136	136	131	134	134	139
80 — 75	160	174	183	184	182	180	171	161	159	149	149	142	146	147	152
75 — 70	176	192	199	201	199	197	186	177	174	162	164	157	160	162	166
70 — 65	196	212	221	223	219	218	207	196	192	179	181	173	177	180	183
65 — 60	216	237	246	247	242	242	229	217	212	199	203	193	196	199	204
60 — 55	246	266	275	278	274	274	260	245	240	225	228	218	222	226	228
55 — 50	280	302	312	312	311	309	292	278	269	254	261	248	252	256	258
50 — 45	320	347	356	361	356	354	336	320	309	291	300	283	287	294	297
45 — 40	383	413	425	430	420	423	400	381	366	348	356	338	343	350	354
40 — 35	467	....	513	521	518	515	484	464	441	422	434	410	415	423	427
35 — 30	589	....	647	655	640	649	608	581	559	533	543	515	526	530	531

Questi valori di T, rappresentati graficamente nella Tav. a pag. 488 col mezzo dei punti ++++, danno con sufficiente esattezza la forma *Cd E Sn* del liquidus del diagramma il quale si presenta: alquanto concavo verso il basso nel ramo dalla parte del cadmio, sensibilmente rettilineo dalla parte dello stagno e con un punto eutettico, alla concentrazione del 70 % Sn ed alla temperatura di circa 176°,3.

Non ho creduto necessario, specialmente dopo la pubblicazione del lavoro dello Schleicher, di moltiplicare le esperienze in prossimità al punto eutettico per meglio precisare questi risultati, i quali sono invero molto prossimi a quelli ottenuti dallo Schleicher che sono: 67.6 at. % di stagno, corrispondenti a 69 % in peso, per la concentrazione dell'eutettica, e 177° per la temperatura.

Al disotto del punto eutettico il raffreddamento diventa pressochè normale, ma verso i 120° si osserva un arresto, con successivo innalzamento del termometro, segnalato per primo dallo Stoffel (5) per queste leghe, e dovuto all'evoluzione termica prodotta dalla *trasformazione.*

Il punto a cui risale il termometro durante la recalescenza fu preso per temperatura di trasformazione quantunque, come vedremo debba ritenersi ancora inferiore ad esso; tali temperature sono registrate nell' ultima colonna della tabella IX pag. 507 alla riga indicata Temp. Mass.; nella riga successiva è registrato il N° di gradi della recalescenza ed i segni ∾ indicano i casi in cui non si ha nè arresto nè recalescenza del termometro ma solo un rallentamento.

6.° Calcolo delle calorie di solidificazione e di trasformazione, parziali e totali.

Coi dati della tabella II, invece di costruire le curve di raffreddamento e dedurne graficamente, come si usa d' ordinario, le durate dell'arresto al punto eutettico ed al punto di trasformazione, ho calcolato nel modo sopra descritto, (§ 3) i valori Δ rappresentanti (in centesimi di caloria) il calore svolto da un Kg. di lega per la sua parziale solidificazione o trasformazione nei singoli intervalli di temperatura. Tali valori sono raccolti nella tabella III a pag. 491, la quale si arresta alla temperatura di 100° perchè, al di sotto, le differenze

(5) Stoffel, Zeitsch. anorg. Chemie Vol. 53° pag. 140 (1907).

TABELLA III.

Calorie di solidificazione e di trasformazione.

Metalli o Leghe.	Cd	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	Sn
Peso gr.	669	677	676	686	671	653	634	626	618	609	597	595	590	586
Intervalli di temperatura	Calore, Δ, svolto in centesimi di caloria per Kg													
315 — 310	**1187**	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
310 — 305	79	182*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
305 — 300	19	431*	5*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
300 — 295	10	204*	331*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
295 — 290	6	129*	232*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
290 — 285	2	82	152*	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
285 — 280	2	60	114*	250*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
280 — 275	4	48	88	164*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
275 — 270	2	37	70	128*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
270 — 265	2	28	55	103*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
265 — 260	1	24	45	86	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
260 — 255	0	21	38	71	6*	—	—	—	—	—	—	—	—	—
255 — 250	0	17	33	59	194*	—	—	—	—	—	—	—	—	—
250 — 245	—	15	27	51	128*	—	—	—	—	—	—	—	—	—
245 — 240	—	13	25	46	111*	—	—	—	—	—	—	—	—	—
240 — 235	—	12	21	40	97*	—	—	—	—	—	—	—	—	—
235 — 230	—	11	18	36	84	—	—	—	—	—	—	—	—	—
230 — 225	—	8	15	28	73	94*	—	—	—	—	—	—	—	**1152**
225 — 220	—	8	15	27	67	134*	—	—	—	—	—	—	612*	298
220 — 215	—	7	12	22	59	106*	—	—	—	—	—	342*	383*	3
215 — 210	—	7	12	21	52	93	—	—	—	—	—	319*	165*	3
210 — 205	—	6	11	18	46	83	6*	—	—	—	394*	205*	65	1
205 — 200	—	6	10	17	42	69	176*	—	—	—	215*	117*	44	1
200 — 195	—	4	9	12	36	62	82*	—	—	3*	146*	73	28	0
195 — 190	—	4	7	12	30	55	71	—	—	199*	103*	51	15	0
190 — 185	—	3	6	11	27	48	68	117*	—	187*	76	36	8	—
185 — 180	—	3	5	8	23	43	55	75*	—	142*	57	30	6	—
180 — 175	—	3	5	9	**368**	**643**	**1108**	**1143**	**1223**	**775**	48	28	4	—
175 — 170	—	2	**65**	**154**	114	202	48	224	273	158	**292**	**117**	**6**	—
170 — 165	—	**28**	15	17	22	21	6	8	9	17	15	16	5	—
165 — 160	—	7	8	7	7	7	1	2	2	5	4	5	4	—
160 — 155	—	**3**	4	4	3	3	0	0	0	1	2	1	1	—
155 — 150	—	**3**	**3**	1	2	2	0	0	0	2	0	1	3	—
150 — 145	—	**8**	**7**	**4**	2	2	0	0	0	0	0	1	5	—
145 — 140	—	1	1	0	**2**	2	0	0	1	2	0	1	4	—
140 — 135	—	0	0	0	0	0	— 1	0	0	0	0	1	2	—
135 — 130	—	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	—
130 — 125	—	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**126**	**40**	—
125 — 120	—	1	0	0	2	2	**86**	**107**	**127**	**145**	**149**	11	6	—
120 — 115	—	**2**	**6**	**16**	**38**	**68**	5	1	0	1	0	1	0	—
115 — 110	—	**4**	4	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	—
110 — 105	—	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—
105 — 100	—	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—
Calore ipereutettico	—	1385	1369	1230	1092	827	490	255	7	630	1039	1206	1332	—
Calore eutettico	—	40	96	185	503	850	1131	1314	1501	861	313	138	30	—
Calore di trasformazione	—	9	11	17	41	71	91	109	128	146	149	138	46	—
Calore totale	**1314**	**1434**	**1476**	**1432**	**1636**	**1748**	**1712**	**1678**	**1636**	**1637**	**1501**	**1482**	**1408**	**1422**

$\Delta = R - R_1$, sono praticamente nulle. Anche in questa tabella sono stampati in carattere grassetto i valori massimi tanto del calore eutettico che del calore di trasformazione.

I calcoli si eseguiscono rapidamente colle tavole di moltiplicazione del Crelle il cui uso è comodissimo, specialmente dopo i perfezionamenti adottati nella edizione del 1907.

Come esempio del calcolo che conduce dai valori della tabella II a quelli della III, riproduco qui sotto il calcolo stesso applicato alla esperienza collo stagno puro.

Tabella IV.

Esempio del calcolo dei valori Δ: (Calore di solidificazione dello stagno).

Peso Sn = Kg. 0.5863. Coefficiente per riduzione in calorie Kg. $\frac{0.217}{0.5863} = 0.370$

Intervalli di temperatura	240 235	235 230	230 225	225 220	220 215	215 210	210 205	205 200	200 195	195 190
Durate di raffreddamento (Tab. II).	28	29	935	282	36	37	38	40	41	42
id. del mercurio ivi	28	29	30	31	32	33	35	37	39	40
Rapporti reali R	1.00	1.00	31.17	9.10	1.13	1.13	1.09	1.09	1.06	1.05
Rapporti normali R_1 (Tab. I)	1.00	1.00	1.05	1.05	1.05	1 05	1.05	1.05	1.05	1.05
$\Delta_1 = R - R_1$	0	0	30.12	8.05	0.08	0.08	0.04	0.04	0.01	0.00
$\Delta = \Delta_1 \times 0.370$	0	0	11.15	2.98	0.03	0 03	0.02	0 01	0.00	0.00

$\Sigma\Delta$ = calorie di solidificazione 14.22.

Noterò come nel calcolo dei rapporti *R* negli intervalli in cui il termometro faceva una sosta notevole, si prendesse per durata di raffreddamento del mercurio quella, corrispondente alla temperatura alla quale era avvenuto il massimo arresto del termometro, che veniva calcolata per interpolazione.

In calce alla tabella III sono raccolte le somme dei valori Δ distinte in tre parti:

I. — Calore di solidificazione, sopra il punto eutettico (*calore ipereutettico*) comprendente il calore sviluppato dal principio della solidificazione fino alla temperatura eutettica; l'ultima parte del calore ipereutettico si rileva dalla tabella V.

II. — Calore di solidificazione al punto eutettico, (*calore eutettico*) comprendente il calore sviluppato dal punto eutettico fino al punto in cui i valori di Δ diventano trascurabili, potendosi ammettere che appartenga alla solidificazione eutettica anche il calore sviluppato negli intervalli immediatamente al di sotto dell'intervallo comprendente il massimo sviluppo di calore.

La somma della I e II parte rappresenta il calore di solidificazione.

III. — *Calore di trasformazione*: in queste leghe molto bene distinto dalle altre parti.

Addizionando le tre parti si ha il *calore totale*.

Rileviamo dalla tabella III che nelle leghe più ricche di cadmio (*A*, *B*, *C*) si ha una debolissima evoluzione termica fra 150° e 145° la quale si rileva appena dalle durate di raffreddamento (v. Tab. II^a^) ma che riesce evidente dal calcolo dei valori Δ. Io la attribuisco, a qualche impurità (probabilmente piombo) contenuta nel cadmio, la quale, formando lega collo stagno, presenterebbe verso 150° la trasformazione propria delle leghe di *Pb Sn*. Col diminuire della quantità di cadmio, l'effetto della presenza di tale impurità si rende insensibile. La piccola entità del fenomeno non mi ha spinto a studiarlo più profondamente, nè a controllare l'ipotesi fatta sulla sua origine, ma osserverò che un fenomeno simile mi si era presentato, come dissi nella memoria precedente, colle leghe di *Sn Zn* e scomparve coll'uso di zinco purissimo.

Dalla stessa tabella risulta che il calore totale di solidificazione, come ha già osservato lo Schleicher (*l. c.* (3)) riesce notevolmente maggiore di quello, medio, dei metalli puri, il che denoterebbe che in questo sistema, analogamente a quanto io ho trovato (1) pel sistema simile *Sn Zn*, la dissoluzione dei metalli deve avvenire con assorbimento di calore.

A maggior dettaglio della tabella III, ho riprodotto nella tabella V, pag. 494, i valori Δ calcolati grado per grado, negli intervalli di 5 gradi più prossimi al punto eutettico; nei casi in cui si aveva recalescenza ho diviso il valore di Δ in due parti: la prima, in carattere grassetto, rappresenta il calore sviluppato dal momento in

(1) D. Mazzotto. *Sui fenomeni termici che accompagnano la formazione delle leghe*, Rendiconti R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. XVIII, pag. 165 (1885).

cui il termometro passò per la temperatura iniziale dell' intervallo, a quando vi ritornò, dopo esser disceso al di sotto e risalito al disopra di essa; la seconda è il calore sviluppato nella successiva discesa del termometro pel grado compreso nell' intervallo.

La prima parte misura il calore di recalescenza; la temperatura iniziale dell' intervallo indica, a meno di qualche decimo di

Tabella V.

Dettagli del calore eutettico grado per grado.

Leghe . .	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Intervalli di temperatura	Calore sviluppato (Δ) grado per grado in centesimi di caloria											
180 — 179	0	1	1	4	8	10	13	0	25	10	6	0
179 — 178	1	1	2	5	8	11	13	1	23	9	6	1
178 — 177	0	1	2	4	8	11	13	1	26	9	5	1
177 — 176	1	1	2	4	8	**667** + 315	13	4	25	10	6	1
176 — 175	1	1	2	**222** + 129	**417** + 194	94	**918** + 162	**747** + 470	**404** + 272	10	5	1
175 — 174	0	1	2	34	66	26	104	119	58	**128**	5	1
174 — 173	0	3	**101** + 21	29	47	7	80	119	38	65	**55**	1
173 — 172	0	3	13	18	52	9	23	23	35	76	**32**	**2**
172 — 171	1	**42** + 9	10	14	25	3	11	8	18	11	**17**	1
171 — 170	1	7	7	19	12	3	6	4	9	12	8	1
170 — 169	1	5	5	10	8	2	2	3	5	5	7	1
169 — 168	**20**	3	4	5	3	1	2	3	5	5	4	1
168 — 167	2	3	3	3	4	1	2	2	3	2	2	1
167 — 166	3	2	3	2	4	1	1	1	2	2	2	1
166 — 165	2	2	2	2	2	1	1	0	2	1	1	1

grado, la temperatura eutettica. Il calore sviluppato al di disopra di detto intervallo può considerarsi come parte del calore ipereutettico.

7.° Applicazione dei risultati all' analisi termica del sistema.

Dalla tabella III risulta evidente la ripartizione del calore di solidificazione rispetto alla temperatura, calore che può ritenersi

proporzionale alla quantità di lega che si solidifica entro i singoli intervalli di temperatura, e vedremo più avanti (§ 8.°) il profitto che si può trarre da tale conoscenza per determinare, con sufficiente approssimazione, la concentrazione del solido deposto, ma per ora fermiamo particolarmente la nostra attenzione sullo sviluppo di calore al punto eutettico.

Siccome la lega che si deposita a tal punto ha composizione sensibilmente costante nelle varie leghe, il calore da essa sviluppato è proporzionale alla quantità di lega che si solidifica in quel punto, quantità che è pure proporzionale alla durata degli arresti al punto eutettico; queste durate, che nel metodo ordinario di calcolo si deducono dalle curve di raffreddamento, sono quelle che servono alla costruzione del Tammann denominata *analisi termica.*

Si può quindi eseguire tale costruzione, e credo con vantaggio della precisione, coi valori sopra trovati pel calore eutettico, invece che colle ordinarie durate di arresto; tale costruzione fu fatta nella Tavola a p. 488 al di sotto del diagramma di equilibrio, segnando coi punti ⊙ ⊙ ⊙ i valori del calore eutettico misurati sopra la scala vicina.

Si vede che dalla parte del cadmio i punti sono praticamente disposti sopra una retta che passa per l'origine $Cd = 100$ il che indica che da quelle leghe si separa del cadmio sensibilmente puro. Dalla parte dello stagno i punti sono disposti lungo una linea E_1 E_2 E_3 E_4 leggermente curva, (la quale però riuscì più regolare della corrispondente ottenuta dallo Schleicher), e che, brevemente prolungata, interseca l'asse della ascisse nel punto corrispondente a circa 3 % *Cd*. È questo presso a poco lo stesso risultato ottenuto dallo Schleicher coll'analisi termica eseguita col mezzo delle durate di arresto al punto eutettico.

Secondo tale risultato adunque, siccome solo la lega a circa 97 % di *Sn* manca di eutettica, la linea eutettica dovrebbe terminare in tal punto, cioè dalla parte dello stagno si depositerebbero dei cristalli misti aventi per concentrazione massima 97 % circa di *Sn*.

È noto però che nel caso della deposizione di cristalli misti, la quantità di eutettica è sempre maggiore di quella che spetterebbe alla condizione di equilibrio, perchè i cristalli misti deposti non hanno in generale il tempo per acquistare la loro concentrazione di equilibrio al punto eutettico, e perciò la costruzione di Tammann conduce ad una orizzontale eutettica più lunga del vero. Dove ter-

minerebbe nel nostro caso, e nell'ipotesi dell'equilibrio la linea eutettica? È una risposta difficile a darsi per via sperimentale; si potrebbe credere che, eseguendo la solificazione lentissimamente, i cristalli misti potrebbero raggiungere la concentrazione di equilibrio e la quantità di eutettica si abbasserebbe al valore normale; ma la lentezza della solidificazione determina in generale la formazione di grossi cristalli, nel cui interno non può stabilirsi, che con straordinaria lentezza, l'equilibrio colle parti della lega esterne ad essi.

Il Guertler (*l. c.* (4)), partendo dal principio teorico che i cristalli più prossimi all'equilibrio sono quelli deposti a temperature meno discoste dal punto eutettico, prolunga in detta costruzione la retta che congiunge il punto di massimo arresto coi punti più prossimi trascurando gli altri, il che equivarrebbe, nella nostra figura, al tracciare dal punto E_1 la tangente $E_1 F$ alla curva passante pei punti esperimentali $E_1 E_2 E_3 E_4$, e prendere per termine della orizzotale eutettica il punto corrispondente alla intersezione F di questa retta coll'asse delle concentrazioni.

Con tale extrapolazione, piuttosto ardita, egli ottiene per limite di saturazione dei cristalli misti quella di 88 at. $^0/_0$ *Sn* corrispondenti a circa 89 $^0/_0$ in peso; accettando tale risultato, la retta rappresentante, nel caso dell'equilibrio, il calore eutettico delle leghe più ricche di stagno, sarebbe appunto la $E_1 F$. Da ciò risulta che la lega I dovrebbe sviluppare 8,00 calorie invece di 8,61, e le leghe J e K non dovrebbero presentare traccia di calore eutettico.

Io tentai, ma invero con scarso successo, di sottoporre le leghe I, J, K a dei trattamenti termici che ritenevo capaci di abbassare il valore del calore eutettico ottenuto coi raffreddamenti totali, verso i valori determinati dalla linea teorica $E_1 F$. Ritenuto vano, per le ragioni dette poco fa, il tentativo di ottenere tale scopo sottoponendo le leghe a raffreddamenti lentissimi, cercai di evitare la formazione di grossi cristalli smorzandole allo stato liquido nel mercurio freddo; le ricuoceva poscia, per almeno 24 ore, ad una temperatura appena inferiore al punto eutettico, per dar tempo, ai piccoli cristalli risultanti dallo smorzamento, di avviarsi alla saturazione a spese dell'eutettica in eccesso; dopo di ciò riscaldava rapidamente le leghe di pochi gradi per fondere l'eutettica rimanente e procedeva al raffredamento nel modo ordinario.

In tal modo il calore eutettico delle tre leghe *I*, *J*, *K* si abbassò alquanto, come lo indica la seguente tabella VI e come

TABELLA VI.

Leghe	I	J	K
	centesimi di caloria		
Calore eutettico:			
prima del trattamento . . .	854	308	142
dopo il trattamento	815	256	43
teorico	748	0	0

è rappresentato nella tavola a pag. 488 dai punti ⊙ ⊙ ⊙ sovrastanti ai punti $E_2 E_3 E_4$, avvicinandosi così al valore teorico quale risulta dalla extrapolazione del Guertler; ma rimane tuttavia superiore ad esso, per quanto, nella lega *K*, il suo valore sia così disceso a meno di $^1/_3$ del valore primitivo.

8.° Determinazione dell'estremità della linea eutettica col metodo del calore di solidificazione.

Vi è però un altro modo di affrontare la questione, il quale si appoggia sopra un metodo da me ideato, alcuni anni or sono, per determinare la concentrazione dei cristalli che si separano nel primo stadio di solidificazione delle leghe (7).

Il metodo fu da me chiamato « *metodo delle calorie di solidificazione* » e per la sua descrizione mi rimetto alla memoria originale, oppure al Vol. II del Trattato di Metallografia del Guertler (in corso di pubblicazione) (8) dove il metodo si trova descritto; qui mi limiterò a dirne quel tanto che è necessario all'applicazione che dobbiamo farne.

Sia a la nota concentrazione della lega, ed a_1 la concentrazione che assume dopo deposto un peso p di cristalli misti passando

(7) D. MAZZOTTO. *Nuovo metodo per determinare i cristalli misti che si separano dalle leghe a varie temperature.* « Nuovo Cimento » Vol. XVIII, pag. 180 (1909).

(8) W. GUERTLER *Metallographie*, Berlin (Bornträger) (1910-12).

dalla temperatura iniziale di solidificazione T ad una temperatura inferiore T_1; si dimostra che la concentrazione media a_2 dei cristalli misti deposti è data dalla formula:

$$a_2 = \frac{a - a_1}{p} + a_1 \tag{1}$$

La concentrazione a_1 si legge direttamente sulla linea del liquidus del diagramma di equilibrio di quel sistema di leghe in corrispondenza alla temperatura T_1.

Il valore di p si determina col mezzo della formula:

$$p = \frac{Q(1 - Q_1/C_1)}{C}. \tag{2}$$

Il significato delle lettere disposte secondo l'ordine in cui entrano nel calcolo è il seguente:

C_1 rappresenta il calore di solidificazione (in cal. kg.) della lega eutettica;

Q_1 rappresenta il calore eutettico della lega considerata;

C rappresenta il calore di solidificazione ipereutettico, cioè il calore svolto dai cristalli depositati sopra il punto eutettico;

Q rappresenta le calorie svolte dalla lega fra le temperature T e T_1.

Evidentemente $Q_1 : C_1$ rappresenterà il peso di eutettica contenuto nella lega considerata; il termine $1 - Q_1/C_1$ rappresenterà il peso dei cristalli deposti sopra il punto eutettico; $C : (1 - Q_1/C_1)$ rappresenterà il numero di calorie svolte per la deposizione di 1 chilogrammo di detti cristalli e finalmente il quoziente

$$Q : \frac{C}{1 - Q_1/C_1} = \frac{Q(1 - Q_1/C_1)}{C} = p$$

che corrisponde alla formula (2), rappresenterà il peso p dei cristalli deposti fra le temperature T e T_1 da introdurre nella formula (1). Notisi che questa determinazione non può dare valori attendibili che per le leghe di concentrazione alquanto diversa dalla concentrazione eutettica.

Nella tabella VII, pag. 499, sono rappresentati i valori esperimentali e quelli risultanti dal calcolo dei valori di p e di a_2 secondo le formule (1) e (2). I valori esperimentali si leggono direttamente nelle

tabelle **II** e **III** all'infuori dei valori di T_1, Q ed a_1 che si ottengono così:

T_1 è scelto arbitrariamente al disotto di T in modo che fra T e T_1 vi sia una notevole erogazione di calore di solidificazione;

ABELLA VII.

Calcolo delle concentrazioni (a_2) dei cristalli deposti.

eghe	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
	Valori esperimentali											
alore di fusione dell'eutettica $= C_1$	—	—	—	—	—	—	—	1507	—	—	—	—
alore eutettico $= Q_1$ . . .	40	96	185	503	850	1131	1314	1501	861	313	138	30
alore ipereutettico $= C$ . .	1385	1369	1230	1092	827	490	255	77	630	1039	1206	1332
emper. iniz. solidific. $= T$.	306	298°	284°	255°	226	205°	188°	177	192	209	218	224
emperatura limite $= T'$.	290°	280°	265°	235°	215°	195°	180°	—	180°	190°	200°	210°
alore emesso fino $T' = Q$.	946	834	654	536	334	264	192	—	531	858	983	1160
oncentrazione iniziale $= a$.	98.0	96.0	92.0	80.0	64.0	50.0	40.0	30.0	20.0	10.0	6.0	2.0
oncentrazione a $T' = a_1$ . .	93.0	90.0	84.2	68.5	56.5	44.0	33.0	—	73.0	78.5	84.0	90.0
	Calcolo delle concentrazioni a_2											
Q_1/C_1	0.027	0.064	0.123	0.333	0.563	0.749	0.870	0.994	0 570	0.207	0.092	0.020
$1 - Q_1/C_1$	0.973	0.936	0.877	0.667	0.437	0.251	0.130	0.006	0.430	0.793	0.908	0.980
$C : (1 - Q_1/C_1) = m$	1425	1465	1402	1639	1890	1955	1960	—	1465	1310	1330	1360
2) $Q : m = p$	0.664	0.570	0.467	0.327	0.177	0.136	0.098	—	0.364	0.655	0.739	0.859
$a - a_1$	5.0	6.0	7.8	11.5	7.5	6.0	7.0	—	7.0	11.5	10.0	8.0
$(a - a_1) : p$	7.5	10.4	16.7	35.2	42.4	44.1	71 0	—	19.2	17.6	13.5	9.4
) $a_2 = \frac{a - a_1}{p} + a_1$	**100.5**	**100.4**	**100.9**	**103.7**	**98.9**	88,1	104.0	—	**92.2**	**96.1**	**97.5**	**99.3**
$T_2 =$	300°	291°	276°	247°	222°	202°	186°	—	188°	203°	212°	219°

il valore di Q si ottiene addizionando i valori Δ fra le temperature T e T_1 e nella tabella **III** sono segnati con * i valori di Δ di ciascuna lega che furono addizionati per ottenere i valori Q;

il valore della concentrazione a_1 corrispondente alla temperatura T_1, si legge, come si è già detto, sul liquidus, che si suppone noto, del diagramma di equilibrio del sistema.

Dai risultati della tabella VII si rileva che dalla parte del cadmio i valori di a_2, più discosti dall' eutettica, risultano prossimi all' unità, il che conferma che i cristalli deposti da questa parte sono del cadmio sensibilmente puro; dalla parte dello stagno i valori di a_2 sono inferiori all' unità ed aumentano coll' elevarsi della temperatura media, T_2, di deposizione dei cristalli, il che indica che da quel lato si deposita una soluzione solida di concentrazione in stagno crescente coll' elevarsi della temperatura. I punti rappresentanti le concentrazioni a_2 date dal calcolo, sono quelli indicati coi segni ╳╳ nella parte superiore del diagramma a pagina 488, al posto delle rispettive temperature medie di deposizione; tali punti devono appartenere alla linea del solidus che parte dal punto di solidificazione dello stagno puro e termina all' estremo punto della orizzontale eutettica.

I detti punti riescono infatti sufficientemente allineati verso il punto di solidificazione dello stagno, e la linea che li congiunge incontra, dall' altra parte, l' orizzontale eutettica nel punto corrispondente alla concentrazione 90 % *Sn*.

Abbiamo così stabilito, per via esperimentale, il punto estremo della orizzontale eutettica che non ci fu possibile determinare esattamente colla costruzione del Tammann; il punto così trovato riesce, come prevede la teoria, spostato verso la concentrazione eutettica rispetto al punto ottenuto con detta costruzione, e coincide quasi perfettamente con quello indicato come più probabile dalla extrapolazione del Guertler (§ 7) il che legittima l' impiego di una simile extrapolazione in casi analoghi.

Noteremo che quasi lo stesso punto 90 % *Sn* si otterrebbe congiungendo nella fig. a pag. 488 il punto E col punto che sta sopra E_2, effettuando cioè sui nostri risultati un' extrapolazione analoga a quella del Guertler.

9.° La trasformazione nei raffreddamenti totali.

Passiamo ora al comportamento delle nostre leghe al disotto del punto eutettico. La tabella III indica che, nei raffreddamenti totali, tali leghe si comportano normalmente fino verso i 125°, al qual punto si manifesta la trasformazione in modo repentino e quasi esplosivo, con notevole sviluppo termico e recalescenza.

Dalla tabella stessa si rilevano le quantità di calore che le singole leghe sviluppano pel detto fenomeno negli intervalli di 5°, però,

conformemente a quanto si è fatto pel calore eutettico nella tabella V, per meglio rappresentare lo sviluppo di calore di trasformazione alle varie temperature, si sono registrati nella seguente tabella VIII, i valori di Δ nelle vicinanze del punto di trasformazione, grado per grado, restando così meglio determinata la temperatura di massima trasformazione, e la distribuzione del calore che l'accompagna. A colpo d'occhio si vede per es. che la temperatura di trasformazione non è assolutamente costante, ma va gradatamente elevandosi colla con-

TABELLA VIII.

Dettagli del calore di trasformazione, grado per grado.

Leghe. . . .	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Intervalli di temperatura	Calorie (Δ) sviluppate di grado in grado											
130 — 129	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
129 — 128	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
128 — 127	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
127 — 126	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
126 — 125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	114 + 12	5
125 — 124	0	0	0	0	0	0	0	0	0	138 + 7	5	3
124 — 123	0	0	0	0	0	0	0	117 + 4	129 + 9	2	2	2
123 — 122	0	0	0	0	0	0	96 + 7	3	5	1	2	1
122 — 121	1	0	0	1	0	1	3	3	1	1	1	0
121 — 120	0	0	0	1	2	79 + 6	1	0	1	0	1	0
120 — 119	0	0	1	34	58 + 5	2	0	0	1	0	0	0
119 — 118	0	0	3	2	3	2	1	0	0	0	0	0
118 — 117	1	1	5	2	1	1	0	1	0	0	1	0
117 — 116	0	1	6	0	1	0	0	0	0	0	0	0
116 — 115	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
115 — 114	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
114 — 113	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
113 — 112	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
112 — 111	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
111 — 110	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

centrazione in *Sn*, insieme al calore di trasformazione. Su tale fatto ritorneremo più innanzi (§ 11).

Col mezzo dei valori di $\Sigma\Delta$ per tutto l'intervallo di trasformazione, registrati in calce alla tabella **III**, si può eseguire la costruzione di Tammann come si è già fatto pel calore eutettico.

Tale costruzione è eseguita in calce alla fig. di pag. 488 col mezzo dei punti ⊕ ⊕ ⊕ rappresentanti il calore di trasformazione delle singole leghe; la linea che congiunge i detti punti, accenna ad un massimo ben accentuato del calore di trasformazione verso la concentrazione di 92 % *Sn*. La forma di tale linea diversifica assai dalla corrispondente data dallo Scheicher, essendo questa, nella parte che più interessa, cioè fra la concentrazione eutettica e l'asse dello stagno, molto irregolare e smussata, con un massimo, ben poco accentuato, verso 80 *at.* % *Sn* quindi più discosto dall'asse dello stagno che non il punto terminale della orizzontale eutettica. Dai valori numerici dati dallo Schleicher sembrerebbe però, che la forma poco decisa di tale curva, dipendesse più da una correzione, apparentemente poco felice, applicata dall'A. ai risultati delle osservazioni che ad imperfezione delle osservazioni stesse.

Comunque sia il Guertler, appoggiandosi a ragioni teoriche che giustificano le imperfezioni ottenute nella linea esperimentale, applica su di essa una extrapolazione assai più ardita di quella applicata alla linea degli arresti eutettici, col mezzo della quale, innalza il massimo della curva di circa la metà del suo valore, rendendolo bene accentuato e lo sposta notevolmente verso l'asse dello stagno, portandolo cioè dalla concentrazione dell'80 *at.* % *Sn* a quella di 92 *at.* % *Sn* che corrisponde a circa 93 % *Sn* in peso. Con ciò il detto massimo, che si trovava fra la concentrazione eutettica ed il termine della orizzontale eutettica, venne a portarsi fra questo termine e l'asse dello stagno, e così il solidus del diagramma di equilibrio viene ad assumere una forma più rispondente alle leggi dell'equilibrio eterogeneo.

La grafica ottenuta direttamente dai miei esperimenti accenna, come si disse, ad un maximum verso 92 % *Sn*, valore assai vicino a quello ottenuto dal Guertler con detta extrapolazione e che potrebbe anche ritenersi come definitivo; il calore di trasformazione corrispondente a questo maximum è di circa 150 centesimi di caloria, vedremo però che i risultati delle ulteriori mie ricerche spostano

questo massimo ancor più verso l'asse dello stagno, portandolo a 94,5 % *Sn* circa ed elevandone il valore.

10.° Trattamenti termici ai quali furono sottoposte le leghe.

Resta dimostrato da quanto sopra si è detto: che le leghe di *Sn-Cd* nel solidificarsi depositano, da una parte, del cadmio praticamente puro, e dall'altra una soluzione solida di *Cd* nello *Sn*, (che diremo soluzione γ,) avente una concentrazione massima di circa 90 % *Sn* in peso, e che la trasformazione presenta il massimo sviluppo di calore nella lega avente la concentrazione di circa 92 % *Sn*.

Resta a vedere se questi risultati sono in parte modificati dal comportamento delle nostre leghe rispetto ai varii trattamenti termici cui si possono sottoporre per far loro raggiungere più perfettamente lo stato di equilibrio.

Abbiamo sopra veduto (§ 7) come il calore eutettico delle nostre leghe venga poco modificato dai trattamenti termici cui furono sottoposte, per quanto la lieve modificazione ottenuta fosse nel senso preveduto dalla teoria, cioè nel senso di diminuire il calore eutettico. Saranno le nostre leghe altrettanto insensibili anche rispetto al calore di trasformazione?

I risultati ottenuti nello studio preliminare colla lega di *Sn Cd* al 50 %, la quale si dimostrò quasi insensibile ai trattamenti termici, indurrebbero a rispondere affermativamente a tale domanda, ma, se osserviamo il diagramma del sistema, p. 488 vediamo che detta lega è fra quelle che depositano fino al punto eutettico del cadmio puro, e deve quindi solidificarsi in condizioni assai prossime a quelle di equilibrio; non è perciò lecito arguirne che uguale insensibilità sia pure presentata dalle leghe più ricche di stagno dell'eutettica, le quali, per raggiungere la condizione di equilibrio, devono attendere che i cristalli deposti nel primo stadio della solidificazione, assorbano la maggiore percentuale di cadmio che loro compete alle temperature inferiori.

Nella mia ricerca preliminare si è infatti veduto che le leghe le quali depositano inizialmente dei cristalli misti, quali per es. le leghe di *BiSn*, presentano, dopo i trattamenti termici tendenti ad avvicinarle alle condizioni di equilibrio, un calore di trasformazione considerevolmente *maggiore* di quello svolto, dalle stesse leghe,

quando erano più lontane dall'equilibrio; diedi anche del fatto la ragione teorica, nell'ipotesi che la trasformazione consistesse nella separazione parziale o totale del metallo disciolto nella soluzione solida, considerando, che tale separazione dovrà essere tanto più copiosa, quanto più sarà grande la quantità di quel metallo assorbita dalla soluzione solida per approssimarsi all'equilibrio.

Pel calore di trasformazione vale adunque una legge opposta a quella del calore eutettico, il quale, come sappiamo, deve invece *diminuire* di mano in mano che le soluzioni solide si avvicinano alla condizione di equilibrio.

Non ostante quindi i risultati, quasi negativi, forniti dalla lega al 50 %, sottoposi tutte le leghe studiate ai trattamenti termici per rilevare le eventuali variazioni che subisse il calore di trasformazione, nonchè la sua distribuzione nella scala delle temperature, ed il risultato ottenuto fu, come vedremo, positivo.

I trattamenti termici che lo studio preliminare dimostrò più efficaci per aumentare il calore di trasformazione, furono:

I. *la maturazione* (arresto in discesa) al punto eutettico, che si effettuava arrestando il raffreddamento della lega, precedentemente fusa, quando avea raggiunto il punto eutettico, e mantenendola a tal punto per molte ore.

II. *la ricottura* (arresto in salita) al punto eutettico, che si effettuava riscaldando la lega fino al punto eutettico e mantenendola per molte ore a quella temperatura.

III. *lo smorzamento* e successiva ricottura al punto eutettico, che si effettuava immergendo il crogiuolo contenente la lega, ancor liquida ma vicina a solidificarsi, nel mercurio freddo, finchè si fosse completamente solidificata, e riportandola poi al punto eutettico al quale si manteneva per molte ore.

Per le leghe che devono compiere la solidificazione al di sopra del punto eutettico, tali arresti in discesa od in salita si devono effettuare alla temperatura finale di solidificazione.

A tali trattamenti, diretti allo scopo di raggiungere il massimo normale della trasformazione, altri ne aggiunsi aventi mire differenti e sono:

IV. *il raffreddamento* della lega appena smorzata, che si effettuava immergendo nel solito ambiente di raffreddamento, la lega, subito dopo solidificata collo smorzamento; studiate in tali condizioni

le altre leghe, e specialmente quella di ***PbSn***, aveano mostrato, nella ricerca preliminare, una trasformazione graduale e decrescente in intensità coll' abbassarsi della temperatura, e quindi senza il consueto massimo ad una temperatura determinata, ma quella di ***SnCd*** non aveva manifestata variazione nel modo di sviluppare il suo calore di trasformazione.

V. *le ricotture e le maturazioni a temperature varie* comprese fra l' ordinario punto di trasformazione ed il punto eutettico, eseguite per riconoscere se, come si era riconosciuto per altre leghe, la trasformazione, potesse compiersi in parte sopra ed in parte al di sotto della temperatura di arresto.

Dividerò la relazione dei risultati di tali esperienze in due parti: la prima che comprende i trattamenti I°-IV° e la seconda che si riferisce ai trattamenti del n. V°.

11.° Trattamenti termici per ottenere il massimo di trasformazione.

Il numero delle esperienze eseguite coi trattamenti termici I-IV fu di oltre un centinaio, comprese le repliche per controllo e gli insuccessi, non rari, poichè, trattandosi di mantenere la lega a temperatura quasi assolutamente costante per molte ore, fra le quali spesso quelle di notte, la sorveglianza non poteva essere sempre così attiva da impedire che la costanza della temperatura, affidata alla costanza della corrente degli accumulatori alimentante la stufa, non venisse meno, mandando a vuoto l' esperimento. Tuttavia le esperienze utili sono ancora abbastanza numerose che non potrei, senza occupare uno spazio eccessivo, riferirne i risultati nei loro principali dettagli, come si fece nelle tabelle II, III, IV e V per le esperienze con raffreddamenti totali. Mi limiterò quindi a riprodurre in un' unica tabella i risultati finali che più interessano la nostra discussione. Noterò che nella serie delle esperienze eseguite colla stessa lega, il primo e l' ultimo esperimento della serie erano ordinariamente due raffreddamenti totali; i risultati del primo sono quelli stessi registrati nella tabella II e calcolati nella III, quelli dell' ultimo servivano solo di controllo onde accertarmi che durante la serie, talvolta lunga, di esperienze, le condizioni di esse non fossero mutate, e che le variazioni eventualmente osservate nelle leghe fossero realmente l' effetto dei trattamenti cui erano state soggette.

Nella tabella IX, pag. 507, che riepiloga questi risultati, ho notato per ciascuna lega in quattro righe successive:

1.° il N.° d'ordine dell'esperienza;

2.° la temperatura massima raggiunta dal termometro dopo la recalescenza dovuta alla trasformazione, che può considerarsi come la temperatura di trasformazione, nelle condizioni dell'esperienza;

3.° il N.° di gradi della recalescenza: in questa riga il segno ~ indica che il termometro rallentò ma non si arrestò; la segnatura 0,0 indica che il termometro si arrestò senza risalire;

4.° il calore di trasformazione in centesimi di caloria per chilogrammo di lega, calcolato, nel solito modo, addizionando i valori Δ di tutto l'intervallo, generalmente però molto ristretto, in cui avveniva la trasformazione.

Nell'ultima colonna della tabella IX sono esposti i valori normali (medî o massimi) delle quantità esposte nelle colonne precedenti.

L'osservazione principale da farsi sulla tabella IX è quella riguardante le variazioni subite dal calore di trasformazione, stampato a questo scopo in carattere grassetto.

Nelle leghe A, B, C, D, E, F, G, H, I il calore di trasformazione non viene sensibilmente alterato dai trattamenti termici, infatti le piccole differenze non superano i limiti degli errori di osservazione; sono queste le leghe, che secondo il diagramma, si possono ritenere in istato di equilibrio, perchè non depositano che del cadmio puro ed una soluzione solida satura o pressochè tale. Per queste leghe si prese per calore normale di trasformazione la media dei valori osservati.

La variazione del calore di trasformazione incomincia a rendersi sensibile nella lega J e si accentua nelle leghe successive, fino a che nella lega I il calore di trasformazione, dopo smorzamento e ricottura, diventa quasi doppio di quello che era dopo il raffreddamento diretto; e questa una notevole conferma esperimentale delle previsioni teoriche sopra ricordate (§ 10). Infatti queste leghe, secondo il diagramma, devono, nel raffreddamento rapido, depositare cristalli di concentrazioni, in cadmio, man mano crescenti col diminuire della temperatura, e quindi la quantità totale di cadmio che tali cristalli tengono disciolta è minore di quella che loro spetterebbe nella condizione di equilibrio, nella quale tutti i cristalli de-

TABELLA IX.

Effetto dei trattamenti termici al punto eutettico.

Leghe e concentrazione		Raffreddamenti totali da 300° iniziali	Raffreddamenti totali da 300° finale	Raffreddamenti dopo lunghe ricotture al p. eutettico	Raffreddamenti della lega smorzata subito dopo solida	Raffreddamenti della lega smorzata dopo lunga ricottura	Valori normali
A 2 % Sn	Esperienza N.	136.a 137.a	142.a	139.a	140.a	141.a	—
	Temper. Mass.	111° 111°	111°	110°	145°	130°	111°
	Recalescenza	∾ ∾	∾	∾	∾	∾	∾
	Calore trasf.	9 10	10	9	11	11	10
B 4 % Sn	Esperienza N.	143.a	151.a	145.a 146.a	147.a	148.a	—
	Temper. Mass.	115°	115°	113° 114°	113°	115°	115°
	Recalescenza	∾	∾	∾ ∾	∾	∾	∾
	Calore trasf.	11	11	11 12	12	12	12
C 8 % Sn	Esperienza N.	153.a 154.a	—	155.a 156.a	163.a		—
	Temper. Mass.	117° 117°	—	113° 117°	117°		117°
	Recalescenza	∾ ∾	—	∾ ∾	∾		∾
	Calore trasf.	16 16	—	14 16	15		15
D 20 % Sn	Esperienza N.	164.a 165.a	184.a	168.a 171.a	182.a	183.a	—
	Temper. Mass.	119° 119°	119°	116° 118°	122°	119°	119°
	Recalescenza	0°.1 0°.0	0°.0	0°.5 4°.0	0°.8	0°.8	0°.8
	Calore trasf.	39 40	39	40 39	38	39	39
E 36 % Sn	Esperienza N.	187.a 188.a	203.a	189.a 190.a 191.a	200.a	201.a	—
	Temper. Mass.	120° 120°	120°	120° 122° 119°	124°	123°	122°
	Recalescenza	0°.8 0°.6	0°.6	2°.7 2°.5 2°.3	1°.8	2°.8	2°.8
	Calore trasf.	70 69	67	67 67 68	66	69	68
F 50 % Sn	Esperienza N.	204.a 206.a	227.a	205.a 213.a	223.a	225.a	—
	Temper. Mass.	121° 121°	121°	123° 123°	126°	125°	123°
	Recalescenza	1°.6 1°.7	1°.6	4°.5 4°.7	1°.9	4°.1	4°.7
	Calore trasf.	88 92	86	95 96	85	94	91
G 60 % Sn	Esperienza N.	118.a 119.a	128.a	233.a	126.a		—
	Temper. Mass.	123° 123°	123°	123°	127°		123°
	Recalescenza	4°.2 4.°5	4°.5	4°.7	3°.4		4°.7
	Calore trasf.	108 109	111	111	108		110
H 70 % Sn	Esperienza N.	77.a 78.a 79.a	103.a	80.a 81.a	97.a	102.a	—
	Temper. Mass.	124° 124° 124°	126°	125° 124°	125°	126°	125°
	Recalescenza	5°.0 4°.9 5°.0	5°.9	5°.6 5°.1	4°.1	6°.0	5°.6
	Calore trasf.	128 125 124	128	125 129	125	126	126
I 80 % Sn	Esperienza N.	66.a	74.a	67.a 68.a 69.a	70.a		—
	Temper. Mass.	125°	126°	125° 126° 125°	128°		125°
	Recalescenza	5°.5	5°.2	4°.9 5°.1 5°.1	5°.6		5°.6
	Calore trasf.	146	146	145 145 145	143		145
J 90 % Sn	Esperienza N.	26.a	36.a	37.a	28.a	31.a 32.a 33.a 34.a	—
	Temper. Mass.	126°	126°	126°	126°	128° 127° 127° 127°	127°
	Recalescenza	7°.3	6°.3	7°.7	6°.0	7°.0 7°.8 7°.6 8°.0	8°.0
	Calore trasf.	149	149	152	149	160 159 160 160	160
K 94 % Sn	Esperienza N.	52.a	61.a		53.a	58.a 54.a 59.a 60.a 57.a	—
	Ore	—	—		—	1h 8h 24h 48h 20h	—
	Temper. Mass.	126°	127°		127°	127° 127° 128° 128° 127°	128°
	Recalescenza	3°6	3°.9		5°.8	3°.2 4°.8 8°.0 8°.1 7°.1	8°.0
	Calore trasf.	138	135		142	159 166 168 167 160	167
L 98 % Sn	Esperienza N.	42.a 48.a	49.a		43.a	44.a 47.a	—
	Temper. Mass.	128° 128°	128°		127°	130° 131°	130°
	Recalescenza	∾ ∾	∾		∾	0°.4 0°.0	0°.0
	Calore trasf.	46 46	46		57	85 88	86

N. B. — Il segno ∾ indica rallentamento senza arresto nè recalescenza — 0°.0 indica arresto senza recalescenza.

vono contenere disciolta la quantità di cadmio corrispondente alla temperatura più bassa raggiunta nella solidificazione.

Mantenendo per lungo tempo costante tale temperatura, i cristalli deficienti di cadmio ne assorbiranno a spese del cadmio libero formante la lega eutettica, cosicchè coll' aumentare della durata dell' arresto aumenta la quantità di cadmio disciolto.

Ora se, giusta la nostra ipotesi (§ 10), al punto di trasformazione si separa tutta o la massima parte del cadmio disciolto nella soluzione solida, il calore di trasformazione dovrà aumentare colla durata dell' arresto.

Una prova che l' effetto delle *ricotture* e delle *maturazioni* si accumula col tempo, la offrono le più dettagliate esperienze fatte colla lega *K* dopo lo smorzamento.

Nelle esperienze 58ª, 54ª, 59ª, 60ª le ricotture a 150° durarono rispettivamente 1, 8, 24 e 48 ore, e la trasformazione andò gradualmente crescendo raggiungendo il massimo dopo 24 ore. Nell' esperienza 57ª la ricottura si fece per 20 ore a temperatura più alta (191°) ma con effetto alquanto minore.

Nella parte inferiore della tav. a pag. 488 sono rappresentati coi punti ✳✳✳ i tre valori massimi del calore di trasformazione ottenuti dalle leghe J, K, L dopo i trattamenti termici. I nuovi punti sostituiti a quelli primi ottenuti coi raffreddamenti totali, modificano un poco la linea rappresentativa del calore di trasformazione, innalzandone il vertice e rendendolo più acuminato. Per quanto tali nuovi valori di $\Sigma\lambda$ non abbiamo probabilmente ancora raggiunto con ciò il loro massimo assoluto, si può arguire che il massimo calore di trasformazione si abbia con una lega di concentrazione assai prossima a 94,5 % *Sn* e che il suo valore sia di circa 1,73 calorie per chilogrammo di lega.

La concentrazione del 94,5 % *Sn* cui corrisponde il massimo sviluppo di calore, deve coincidere con quella del corpo che si trasforma, e credo che il suo valore elevato escluda l' ipotesi che a quel punto avvenga una combinazione o decomposizione chimica fra i due metalli, perchè il composto, per avere la concentrazione suddetta, dovrebbe avere una formula vicina a Sn^{13} *Cd*, il che è poco verosimile.

Sulla tabella IX faremo qualche altra osservazione:

La temperatura del massimo di trasformazione aumenta gradatamente da lega a lega (da 111° a 127°) coll' aumentare della per-

centuale in stagno, senza presentare massimo corrispondente al massimo assoluto di trasformazione; questo fatto che interpreteremo fra poco, si rileva anche meglio osservando la ripartizione di grado in grado del calore di trasformazione indicata nella tab. VIII. (pag. 501) Per ciascuna lega poi la temperatura di trasformazione viene debolmente elevata dai trattamenti termici; solo nella lega *A* (2 % *Sn*) la trasformazione da 111° salì a 145° dopo lo smorzamento, ma trattandosi in questo caso di trasformazione debolissima non credo di insistere su tale fenomeno.

La recalescenza, nei raffreddamenti totali, incomincia a rendersi sensibile nella lega D (20 % *Sn*) e cresce poi di pari passo col calore di trasformazione, raggiungendo il maximum insieme a questo nella lega J (90 % *Sn*) e diminuendo poi rapidamente fino ad annullarsi nella lega L (98 % *Sn*).

I trattamenti termici, anche nelle leghe in cui non modificano il calore di trasformazione, aumentano sensibilmente la recalescenza, cosicchè, dopo i detti trattamenti, il maximum assoluto di recalescenza (8°) si ha colla lega K, per la quale raggiunge pure il suo massimo il calore di trasformazione. Anche la lega L, che nel raffreddamento totale non presenta che un rallentamento durante la trasformazione, dopo i trattamenti termici presenta un arresto al punto di trasformazione, ed in qualche caso anche una debole recalescenza.

Noterò che la temperatura della lega, appena raggiunto il culmine della recalescenza, non vi si arresta, ma si abbassa con andamento quasi normale; ciò si può rilevare dalla tabella VIII confrontando, negli intervalli di massima trasformazione, le due parti in cui è diviso il calore di trasformazione: la prima parte, riferentesi al calore di recalescenza, è sempre assai maggiore dell' altra che rappresenta il calore emesso nella ridiscesa del termometro. Ciò testifica la repentinità con cui avviene la trasformazione, ed induce a credere che la temperatura del massimo di recalescenza possa essere ancora inferiore alla temperatura *vera* di trasformazione, cioè alla temperatura alla quale incomincerebbe la trasformazione se non fosse ritardata dall' *isteresi fasica* (9); per le nostre leghe tale temperatura

(9) Herrero e Casaus nel loro Trattato in corso di pubblicazione *Principios teóricos y aplicaciones praticas de la metalografia* (Madrid 1912) propongono questa espressione per indicare i fenomeni di soprafusione, soprasaturazione, sottoraffreddamento ed analoghi.

dovrebbe adunque essere superiore ai 30°, e vedremo che questa conclusione è confermata dalle esperienze descritte in seguito (§ 13).

L' aumento della recalescenza, da una lega all' altra, col calore di trasformazione, mi pare si spieghi facilmente ammettendo che, quanto maggiore è tale quantità di calore, tanto più essa eleverà la temperatura verso la temperatura normale di trasformazione; e l' aumento di recalescenza di una stessa lega per effetto dei trattamenti termici, può considerarsi come un effetto dell' aumento nella omogeneità e nella grossezza dei cristalli, prodotto dai trattamenti stessi.

In modo analogo mi pare si possa spiegare il fatto, rilevato dalla tabella VIII, dell' aumento che subisce la temperatura di trasformazione coll' aumentare della percentuale di stagno. Infatti, quella che noi assumiamo per temperatura di trasformazione non è altro che la temperatura finale di recalescenza; ora, nelle leghe povere di stagno, questa temperatura sarà bassa, perchè il loro calore di trasformazione è debole e non è sufficiente a portare la temperatura della lega molto al di sopra della temperatura minima raggiunta nell' isteresi fasica; ma coll' aumentare della percentuale in stagno, aumentando il calore di trasformazione, aumenterà pure la temperatura finale di recalescenza cioè la temperatura di massima trasformazione. Notisi che quest' ultima temperatura può essere, anche nei casi più favorevoli, inferiore alla *vera* temperatura di trasformazione, più sopra definita.

Per quanto riguarda i raffreddamenti eseguiti immediatamente dopo la solidificazione per smorzamento, osserveremo che essi danno, come si era già osservato nella ricerca preliminare, quasi gli identici risultati del raffreddamento totale, tanto per il calore di trasformazione come per la recalescenza, e solo la temperatura di massima trasformazione appare leggermente rialzata. Questo fatto, che indica con quanta rapidità queste leghe, a differenza di altre, assumono una condizione pressochè definitiva, è degno di nota, e pare dipenda dall' essere la concentrazione del corpo che si trasforma quasi indipendente dal processo di solidificazione.

Un' ultima osservazione intorno a questa serie di esperimenti si è che alcune leghe, dopo una lunga ricottura, presentarono dei rapporti di raffreddamento, R, di circa due unità superiori ai normali. Questo fatto si è già manifestato nella ricerca preliminare, poichè la lega IV (l' attuale F) presentava, specialmente dopo la maturazione a

177°, uno strascico ed una coda notevoli. Con replicate esperienze e verifiche mi accertai della realtà del fatto, che ha il suo analogo in quello già accennato nel § 4 a proposito del valore un po' elevato assunto dai rapporti stessi nelle leghe più ricche di cadmio. Anche ora escludo il dubbio, sortomi in sulle prime, che quel debole aumento del rapporto sia dovuto ad una debole reazione esotermica e preferisco attribuirlo ad un ritardo, appena sensibile, nel raffreddamento, prodotto da diminuzione nella conduttività termica della lega; è lecito infatti ammettere che, durante la maturazione, i cristalli si ingrossino e la conduttività termica rimanga perciò diminuita.

È a lamentarsi che tali possibili variazioni di conduttività, tolgano al metodo del raffreddamento quell' alto grado di sensibilità di cui sarebbe capace.

12.° Completamento del diagramma al di sotto della orizzontale eutettica.

Ora potremo applicare i risultati ottenuti al completamento del diagramma del sistema del quale abbiamo già tracciato a p. 488, il liquidus *Cd E Sn*, l' orizzontale eutettica ***AEB*** e la linea di solidificazione ***Sn B***. L'orizzontale corrispondente alla trasformazione la faremo passare per 130° per quanto sopra si è detto, estendendola da 0 a 98 % ***Sn***, poichè anche la lega di tale concentrazione ha fornito trasformazione sensibile.

Su questa linea segniamo il punto *G*, alla concentrazione 94,5 % *Sn* corrispondente al massimo di trasformazione, e tenuto conto che una linea del solidus deve discendere dell' estremo ***B*** dell' orizzontale eutettica, ed un' altra deve partire da 161° circa, punto in cui lo stagno subisce la trasformazione allotropica da stagno γ a stagno β, la regione della soluzione solida γ resta così chiusa dalle linee ***BG***, ***GD***, che, discendendo ripidissime, poco differiranno da linee rette.

Il punto *G* si presenta così come un punto *eutectoide*.

Con tale costruzione si viene ad ammettere, col Guertler, (l. c. (4)) che la trasformazione delle leghe ***Sn Cd*** sia una conseguenza della trasformazione allotropica dello stagno a 161°, la quale avverrebbe secondo le linee ***DG*** (***major***) cioè ad una temperatura che va abbassandosi coll' aumentare della quantità di cadmio disciolto.

Accolta questa ipotesi, non resta che costruire il *minor DH* della linea di trasformazione *DG*; se la solubilità dello stagno β nel cadmio fosse nulla, il *minor* si confonderebbe coll' asse dello stagno discendendo perciò verticalmente, così che il cadmio si separarebbe completamente dallo stagno in cui era disciolto, sviluppando il calore di soluzione che sarebbe il nostro calore di trasformazione. Ma ciò, secondo il mio parere, urta col fatto della nota reversibilità del fenomeno di trasformazione, fatto che vedremo confermato nel paragrafo seguente. Infatti se dalle leghe, al punto di trasformazione, si separasse dallo stagno β puro, insolubile nel cadmio, nel riscaldamento, la soluzione dello stagno nel cadmio non potrebbe effettuarsi che al di sopra di 161°, punto in cui lo stagno ritorna allo stato di stagno solubile γ, mentre l' esperienza dimostra, come vedremo, che basta portare la lega a 137° perchè la trasformazione inversa avvenga con energico assorbimento di calore; quindi, se non può essere dello stagno β puro che si discioglie a tal punto, non potrà essere che una soluzione, sia pure assai diluita, di cadmio e stagno β; quindi il *minor* partente dal punto *D* discenderà obliquamente verso l' estremo *H* della orizzontale di trasformazione. Questo estremo lo fisseremo a 99 % *Sn* dovendo esso, per quanto si è detto, esser compreso fra 98 e 100 % *Sn*; però la linea *DH* la tracceremo punteggiata, per indicare che non è stata determinata sperimentalmente. Il diagramma resta completato, sotto la linea di trasformazione, dalla curva che discende dal punto *H* verso l' asse dello stagno, e rappresenta la debole e decrescente solubilità del cadmio nello stagno β; tale curva è indicata punteggiata perchè semplicemente ipotetica.

Il diagramma così ultimato ci permette di calcolare il calore di soluzione del cadmio nello stagno in base al valore assoluto di 1,73 calorie sopra trovato (§ 11) pel massimo calore di trasformazione e corrispondente alla lega di concentrazione 94,5 % *Sn*. Siccome al punto di trasformazione avviene la quasi completa separazione del cadmio, il detto numero di calorie corrisponderà alla separazione di 5,5 grammi di cadmio da 94,5 di *Sn* cioè di 58 gr. del primo da un chilogrammo del secondo. Da ciò risulta che il calore di dissoluzione del cadmio nello stagno è di circa 30 calorie per chilogrammo, valore più che doppio del calore di fusione del cadmio stesso. L' elevatezza di questo valore mi sorprende, tanto che, per giustificarla, suppongo che esso possa comprendere anche il calore

di trasformazione dello stagno γ in stagno β, per quanto l'esperienza non abbia ancora dimostrato che tale trasformazione sia accompagnata da sviluppo termico.

Noteremo infine che, se l'ipotesi secondo la quale, al punto di trasformazione avverrebbe il passaggio dello stagno γ in stagno β quasi insolubile nel cadmio, è teoricamente logica e corretta essa non è necessaria. Si fa accettare perchè ha nel suo attivo un argomento fortissimo quale è quello che, come ho riconosciuto nella ricerca preliminare, trasformazioni simili non si sono osservate che in leghe di stagno, e si è quindi tratti subito a pensare che siano collegate alla trasformazione allotropica che subisce lo stagno a 161°; però ho già dimostrato in altra nota (*l. c.* (2)) per le leghe di *Pb Sn*, e nella ricerca preliminare (*l. c.* (1)) anche per altre leghe, che il fenomeno può più semplicemente interpretarsi come dovuto a soprassaturazione dei due metalli allo stato solido, e tale ipotesi ebbe già la sanzione di autorità scientifiche (10) (11).

Nel caso delle leghe *Sn Cd* tale interpretazione è invero meno sostenibile, per il grande intervallo fra il punto eutettico ed il punto di trasformazione, quantunque avendosi una linea di saturazione solida con una discesa tanto rapida come quella della *BG*, una isteresi fasica allo stato solido di una cinquantina di gradi sia tutt'altro che assurda. Avvertasi, che anche nell'ipotesi che la trasformazione della lega sia dovuta alla trasformazione dello stagno in essa contenuto, si deve ammettere una isteresi altrettanto intensa, altrimenti, secondo il diagramma, il raffreddamento fra il punto eutettico e quello di trasformazione non riescirebbe normale.

Nell'ipotesi della soprassaturazione, il massimo calore di trasformazione dovrebbe corrispondere alla concentrazione del punto estremo *B* della orizzontale eutettica, che è la concentrazione dei cristalli misti saturi e quindi contenenti la massima quantità di cadmio disciolto. Lo stato attuale delle esperienze ha portato detto massimo un po' a destra del punto suddetto, ma non dobbiamo illuderci di aver raggiunto con esse una precisione tale da escludere in modo assoluto che il piccolo spostamento esista in realtà.

(10) Vedi Guertler, *Metallographie*, vol. I, pag. 732, Berlin 1911.
(11) Parravano e Sirovich, *Gazzetta chimica italiana*, Anno XLII, Parte I, pag. 5 (1912).

13.° Trattamenti termici fra il punto eutettico ed il punto di trasformazione.

Dalla forma del diagramma di equilibrio ottenuto risulterebbe, che nelle leghe di questo sistema, a temperature comprese fra il punto eutettico e quello di trasformazione, la quantità di cadmio disciolto dovrebbe esser minore di quella che compete alla temperatura eutettica. Come conseguenza dovrebbe risultarne una diminuzione nell' equivalente termico della trasformazione dopo che la lega abbia assunto una condizione di equilibrio compresa fra dette temperature.

Per verificare ciò, e dedurne possibilmente la legge secondo la quale la solubilità del cadmio diminuisce colla temperatura, eseguii l' ultima serie di esperienze, sottoponendo le leghe a ricotture e maturazioni a temperature comprese fra i limiti suddetti. Questa serie è per sua natura incompleta, poichè il completarla esigerebbe un numero stragrande di esperienze, dovendosi nelle varie leghe, oltre al modo di trattamento, variare la temperatura e la durata del trattamento stesso.

Non ho neppure potuto seguire colle varie leghe un ordine sistematico prestabilito, perchè il programma inizialmente propostomi andava successivamente modificandosi a seconda dei risultati ottenuti nell' applicarlo. Così per es., se, dopo un arresto ad una data temperatura, risultava trasformazione nulla o piccolissima, era inutile procedere ad esperimenti di più lunga durata a quella temperatura od a temperature inferiori, e se da un esperimento risultava la trasformazione inalterata rispetto al massimo corrispondente a quella lega, era inutile eseguirne altri, con più lunghe durate di arresto o con arresti a temperature più elevate. Si doveva quindi eseguire, calcolare e discutere ogni esperimento, per poi giudicare l' indirizzo da dare all' esperimento successivo.

Del resto il procedimento seguito è ovvio; le maturazioni e le ricotture si facevano nel modo indicato al § 10, se non che il raffreddamento od il riscaldamento venivano arrestati alla temperatura prestabilita, alla quale si portava preventivamente la stufa, e si manteneva fissa il più possibile tale temperatura per il tempo determinato, trascorso il quale, si effettuava il raffreddamento nel modo consueto.

I risultati di tali esperimenti sono raccolti nella tabella X, pag. 517, che è divisa in due parti; la prima per gli arresti in discesa; l'altra per gli arresti in salita; le esperienze sono registrate orizzontalmente, lega per lega, in ordine di temperatura d'arresto crescente.

Si riconosce subito dalla tabella che, nelle leghe più studiate, si effettuarono gli arresti a temperature alte e basse, mentre in altre leghe sono più copiosi gli esperimenti alle alte che non alle basse cemperature o viceversa; in genere sono più copiosi gli esperimenti ton arresti in salita perchè riuscirono più interessanti.

Per ogni lega i risultati sono contenuti in 5 righe orizzontali che contengono rispettivamente: il numero d'ordine dell'esperienza, la durata dell'arresto, la temperatura massima dopo la recalescenza, il numero dei gradi della recalescenza ed il calore di trasformazione.

Nell'ultima colonna è riprodotta, per comodità di confronto, l'ultima colonna della tabella IX, contenente per le singole leghe i valori normali delle quantità misurate.

Sui risultati degli arresti in discesa, osserviamo anzitutto che un arresto sufficientemente prolungato alla temperatura di 130° annulla la trasformazione; questo fatto, confermato da quello che gli arresti in salita alla stessa temperatura, anche se molto prolungati (lega ***H***, esper.ª 86.ª), non producono trasformazione, ci portano a concludere, che la temperatura normale di trasformazione deve trovarsi al di sopra di 130°, ciò che si era già desunto per altra via (§ 11).

Gli arresti in discesa alla temperatura 132° fanno scemare gradualmente e fortemente, la trasformazione ma non l'annullano (lega ***F***, esper.ª 208ª, 209ª); in quest'ultimo caso per es. dopo tre ore la trasformazione si è ridotta a poco più del decimo del suo valore, ma pare che non si annullerebbe completamente neppure con arresti di durata maggiore, perchè dopo gli arresti in salita alla stessa temperatura (lega ***F***, esper.ª 210ª) si ottenne qualche traccia di trasformazione. Si può quindi ritenere come temperatura normale di trasformazione quella di 132°.

Gli arresti alla temperatura di 134° abbassano, ma non di molto, il valore termico della trasformazione rispetto al valore normale (es. da 126 a 73, lega ***H***, esper.ª 82ª) mentre gli arresti a 137° lo lasciano inalterato; ma ciò deve essere dovuto ad uno stato metastabile prodotto da isteresi fasica, poichè vediamo che coi numerosi e prolungati arresti in salita effettuati a questa temperatura, non si

raggiunsero che valori della trasformazione minori del normale. Così nella lega *D* il valore termico non sorpassò 32 centesimi di caloria mentre il normale era 39; nella *E* con un normale di 68 non si sorpassò il 42 e nella *F* con normale di 91 non si sorpassò il 71. Trascurando alcune piccole irregolarità, derivanti dalla incostanza della temperatura, e più ancora dalla difficoltà di ottenere nelle esperienze successive gli arresti a temperature rigorosamente uguali, si osserva che il limite così raggiunto aumenta colla durata dell' arresto, tendendo, verso un massimo che aumenta da una lega all' altra coll' altezza del corrispondente valore normale, e quindi colla percentuale in *Sn*.

Siccome a tale temperatura di 137° si ebbero nel riscaldamento variazioni assai sensibili, e non troppo lente nè troppo rapide nel calore di trasformazione, abbondai alquanto nelle esperienze a tale temperatura, anche per risolvere un' altra questione che m' interessava quella cioè di riconoscere se gli effetti di una ricottura si sovrapponessero o no a quelli della successiva, effettuata senza riportare, fra l' una e l' altra, la lega allo stato liquido.

L' esperienza rispose negativamente; così vediamo per es. che nella lega *D*, dopo tre ricotture successive di ore 1, 1, $^1/_2$ (esp.^{e} 174, 175, 176) si ebbero rispettivamente trasformazioni di 30, 29, 20 centesimi di caloria, e colla lega *E* dopo tre ricotture successive di 1, 1, 2 ore (esp.^{e} 194, 195, 197) si ebbero rispettivamente 22, 16, 28 centesimi di caloria, dove non si osserva sovrapposizione di effetti.

Questo fatto stabilisce una differenza notevole fra le leghe di *Sn Cd* ed altre leghe studiate nel lavoro preliminare, (p. es. la *Pb Sn*) nelle quali, al contrario, le ricotture successive, effettuate senza ricondurre fra l' una e l' altra la lega allo stato liquido, risentivano l' effetto delle precedenti, cosicchè più ricotture successive, di durate uguali ed alla stessa temperatura, accumulando i loro effetti, producevano nel calore di trasformazione effetti di mano in mano maggiori.

Quest' azione cumulativa, nelle leghe che le manifestano, può spiegarsi in due modi:

1.° ammettendo che la trasformazione non si completi anche riconducendo la lega alla temperatura ordinaria, e resti quindi una parte di lega non trasformata che si accumula con quella che ci trasforma nella ricottura successiva;

BELLA X.

Effetto dei trattamenti termici, fra il punto eutettico e quello di trasformazione.

	ARRESTI in DISCESA					ARRESTI in SALITA						Valori normali
Temper.	130°	132-134°	137°	140°	153°	130-132°	137°	140-145°	147-152°	160°	172°	
Esp. N.									149.ª 150.ª			—
Ore									$0^h.0$ 2^h			—
Tem. Mass.									121° 117°			115°
Recal.									∼ ∼			∼
Cal. trasf.									7 5			12
Esp. N.	160.ª				159.ª			162.ª 161.ª	158.ª			—
Ore	7^h				14^h			1^h 10^h	8^h			—
Tem. Mass.	—				115°			119° 119°	117°			117°
Recal.	—				∼			∼ ∼	∼			∼
Cal. trasf.	0				16			15 15	13			15
Esp. N.						166.ª 172.ª	176ª 174ª 175ª 173ª 178ª	169.ª	179.ª	181.ª	180ª	—
Ore						1^h 4^h	$\frac{1}{2}^h$ 1^h $+1^h$ 4^h 12^h	3^h	1^h	1^h	1^h	—
Tem. Mass.						— —	124° 124° 124° 125° 123°	121°	121°	121°	119°	119°
Recal.						— —	∼ ∼ ∼ ∼ ∼	0°.2	∼	0°.6	1°.8	0°.8
Cal. trasf.						0 0	32 30 29 20 32	34	35	37	38	39
Esp. N.			197.ª			193.ª	194ª 195ª 197ª 196ª	198.ª 199.ª				—
Ore			1^h			1^h	1^h $+1^h$ 2^h 6^h	1^h 4^h				—
Tem. mass.			121°			—	128° 128° 128° 128°	124° 125°				122°
Recal.			1°.4			—	0 0 0 0	1°.1 1°.2				2°.8
Cal. trasf.			67			0	22 16 28 42	63 62				68
Esp. N.		208.ª 209.ª	211.ª 214.ª	120.ª		210.ª	217ª 215ª 216ª	218.ª 219.ª	221.ª 222.ª		207.ª	—
Ore		1^h 2^h	1^h 4^h	1^h		1^h	$\frac{1}{2}^h$ 1^h 3^h	$\frac{1}{2}^h$ 1^h	$\frac{1}{2}^h$ 1^h		6^h	—
Tem. mass.		122° 130°	121° 121°	122°		—	128° 128° 128°	128° 127°	126° 127°		124°	123°
Recal.		∼ ∼	1°.5 1°.6	1°.1		—	0 0 0	0°.0 0°.3	0°.5 0°.5		2°.4	4°.7
Cal. trasf.		79 19	84 84	84		6	34 71 59	76 76	80 80		88	91
Esp. N.		122.ª		123.ª				124.ª				—
Ore		3^h		5^h				3^h				—
Tem. mass.		124°		124°				128°				123°
Recal.		0		4°.7				3°.1				4°.7
Cal. trasf.		13		102				96				110
Esp. N.		82.ª		84.ª	83.ª	86.ª		87.ª 85.ª				—
Ore		14^h		22^h	22^h	23^h		2^h 23^h				—
Tem. mass.		123°		125°	124°	—		127° 129°				125°
Recal.		0		5°.1	5°.1	—		4°.4 3°.3				5°.6
Cal. trasf.		73		114	117	0		111 108				126
Esp. N.								73.ª	72.ª 71.ª			—
Ore								$0^h.0$	$0^h.0$ 12^h			—
Tem. mass.								131°	130° 138°			125°
Recal.								2°.4	3°.8 5°.6			5°.6
Cal. trasf.								126	124 137			145
Esp. N.								29.ª 30.ª	35.ª			—
Ore								$0^h.0$ 4^h	15^h			—
Tem. mass.								133° 121°	129°			127°
Recal.								0°.6 2°.0	5°.6			8°.0
Cal. trasf.								123 189	149			160
Esp. N.									46.ª	45.ª		—
Ore									23^h	9^h		—
Tem. mass.									123°	112°		130°
Recal.									∼	∼		0°.0
Cal. trasf.									34	34		86

N. B. — Il segno ∼ indica rallentamento senza arresto nè recalescenza — **0°,0** indica arresto senza recalescenza.

2.° ammettendo che la trasformazione costituisca un fenomeno *metattetico* (unione di due forme cristalline in una sola) nel qual caso, durante la trasformazione inversa che avviene nella ricottura, vengano a poco a poco a riunirsi componenti che erano distanti, i quali, pur separandosi nel raffreddamento successivo, restano però a contatto, e tale vicinanza facilita la trasformazione inversa successiva. Se la trasformazione consistesse invece in un fenomeno *distettico*, (separazione di una forma cristallina in due forme distinte), l'effetto cumulativo non avrebbe luogo, perchè dopo ogni trasformazione, i cristalli separati rimarrebbero allo stesso posto, cosicchè non vi sarebbe ragione per cui, di due trasformazioni successive, la seconda fosse più celere della prima.

La mancanza di effetto cumulativo nelle leghe di *Sn Cd* esclude l'una e l'altra di tali spiegazioni; bisogna quindi conchiudere, in armonia con quanto si è sopra trovato (§§ 4 e 12), che la trasformazione sia completa alla temperatura ordinaria, e che consista in un fenomeno distettico.

Da ciò si comprende come la presenza od assenza dell'effetto cumulativo possa costituire un carattere per riconoscere la natura e l'estensione del fenomeno della trasformazione.

Non avendo gli arresti in discesa a 137° alterato il valore normale della trasformazione, erano superflue le esperienze cogli arresti in discesa a temperature superiori; se ne fece solo qualcuna per verifica, la quale riuscì confermativa, a 140° ed a 153°. Non è così per le esperienze cogli arresti in salita, i quali al contrario, producono nella lega una trasformazione crescente di intensità coll'aumentare della durata e della temperatura di arresto; il massimo corrispondente ad ogni singola temperatura d'arresto viene raggiunto in un tempo molto breve ($^1/_2$ ora circa) sebbene non brevissimo; si notino infatti nelle leghe *I*, *J*, le esperienze in cui la durata dell'arresto è indicata con $0^h,0$, nelle quali il raffreddamento fu effettuato appena la lega avea raggiunto la temperatura di arresto, e si osserverà, che la trasformazione riscontrata nel raffreddamento, è sempre alquanto minore di quella ottenuta dopo un arresto più lungo alla stessa temperatura.

I massimi raggiunti alle varie temperature non arrivano però al valore della trasformazione normale corrispondente a quella lega, se non quando la temperatura di ricottura, coincide od è molto

vicina alla sua temperatura iniziale di fusione: cioè alla temperatura eutettica, per le leghe con più di 10 % di cadmio, e ad una temperatura superiore per le altre. Si vede infatti p. es. che la lega *J* con 10 % *Cd*, che incomincia a fondersi al punto eutettico, dopo lunghe ricotture verso 150° (Esp.ª 29, 30, 35) presenta un calore di trasformazione di 1,49 calorie, di poco inferiore a quello normale di 1,60 cal., mentre la lega *L* con 20 % di cadmio, che incomincia a fondersi a 220°, dopo un trattamento simile (esp.ª 45, 46) presenta una trasformazione ancora molto inferiore alla normale, cioè di cal. 0,34 in confronto del normale di 0,86.

Tutto questo è conforme, almeno qualitativamente, all'ipotesi che la trasformazione sia proporzionale in intensità alla quantità di cadmio che si separa dallo stagno, poichè la linea *B G* del diagramma, la quale rappresenta la solubilità del cadmio nello stagno, ha tal direzione da indicare una solubilità crescente coll'aumentare della temperatura; la trasformazione dovrà quindi essere tanto più intensa quanto più alta è la temperatura alla quale la lega fu portata, e presentare un massimo alla temperatura di massima concentrazione cioè alla temperatura eutettica.

Ma possiamo anche darne una verifica quantitativa poichè i risultati della tabella X, ottenuti colle leghe *D* ed *F*, per le quali la serie di determinazioni è più completa, permettono, in base alla ipotesi suddetta, di costruire i punti successivi della linea *B G* a partire da 137°.

Infatti se raccogliamo, come è fatto nella seguente tabella XI, i valori di massima trasformazione trovati colle dette due leghe alle

TABELLA XI.

Temperatura di arresto in salita	Lega D		Lega F	
	Massimo di trasformazione	Riduzione proporzionale	Massimo di trasformazione	Riduzione proporzionale
137°	100	8.1	208	8.2
143°	106	8.6	222	8.7
153°	109	8.6	235	9.2
172°	123	10.0	256	10.0

varie temperature, e calcoliamo dei valori ad essi proporzionali in modo che il massimo assoluto di ciascuna lega corrisponda a 10,0,

che è l'ascissa del punto B misurata dall'asse dello stagno, otteniamo per le varie temperature i valori indicati nelle colonne III^a e V^a; questi valori sono rappresentati nel diagramma dai punti ⊙ ⊙ che partono dal punto B, e sono disposti lungo una linea cha discende rapidamente verso il punto G. Tale linea deve rappresentare la solubilità del cadmio nello stagno γ entro l'intervallo di temperatura considerato, e con essa rimane stabilita esperimentalmente la forma della linea BG del diagramma la quale però, per la sua ripidità, ben poco differisce dalla retta BG dapprima costruita in base alla semplice conoscenza dei punti B e G.

Finalmente, riguardo alle variazioni che gli arresti nell'intervallo di temperatura considerato producono negli altri valori normali caratteristici delle varie leghe, osserveremo che, in generale, la temperatura di trasformazione riesce sensibilmente innalzata dopo gli arresti eseguiti alle basse temperature, e discende gradualmente al punto normale coll'innalzarsi della temperatura di arresto verso la temperatura di fusione. La recalescenza, al contrario, si trova diminuita dopo gli arresti, a meno che anche questi non avvengano in vicinanza della temperatura di fusione.

Questi fatti si interpretano rammentando che durante gli arresti, specialmente se abbiano luogo a bassa temperatura, la trasformazione si compie in parte, se l'arresto ha luogo in discesa, e si inizia solamente se ha luogo in salita; l'uno e l'altro fatto hanno evidentemente per effetto di diminuire l'isteresi fasica nel successivo raffreddamento, cosicchè la trasformazione avviene a temperatura più alta e con recalescenza minore.

14.° Riepilogo e conclusioni.

Le esperienze preliminari eseguite su varie leghe di differente natura presentanti il fenomeno esotermico della *trasformazione allo stato solido*, aveano additato le leghe di *Sn Cd* come le più opportune per iniziare lo studio complementare da estendersi a leghe di concentrazioni differenti; esse infatti presentavano il detto fenomeno in condizioni più favorevoli al suo studio: 1.° per esser esso localizzato entro ristretti limiti di temperatura, poco variabili per trattamenti termici: 2.° per la grande distanza (50° circa) fra la temperatura eutettica e quella di trasformazione, ciò che rende il calore

di trasformazione ed il calore eutettico ben separati l' uno dall' altro, da un tratto con raffreddamento normale, fra essi interposto: 3° perchè era risultata come molto probabile l' assenza di reazioni termiche al disotto della temperatura di trasformazione.

Si studiarono col metodo del raffreddamento in ambiente a 0°, confrontandole col mercurio, N.° 12 leghe di concentrazioni comprese fra 2 % e 98 % *Sn*, e si sottoposero ad egual processo anche i metalli puri dai quali erano costituite, per trarne dei dati molto utili pel calcolo delle esperienze. Tale calcolo si effettuò, non già col solito mezzo della costruzione delle curve di raffreddamento, ma colla determinazione delle calorie di solidificazione o di trasformazione successivamente emesse nel raffreddamento, indipendentemente da quelle dovute al semplice calore specifico delle leghe.

Oltre alle consuete esperienze di *raffreddamento totale*, dallo stato liquido alla temperatura ordinaria, si eseguirono dei *raffreddamenti frazionati*, arrestando per lungo tempo nel riscaldamento o nel raffreddamento la temperatura della lega a punti determinati onde permetterle di raggiungere più completamente le condizioni di equilibrio a quella temperatura, e poter quindi nel successivo raffreddamento, studiare la lega nelle migliori condizioni raggiunte.

Dai raffreddamenti totali si dedussero anzitutto le temperature iniziali di solidificazione che servirono a costruire il *liquidus* del diagramma di equilibrio del sistema, il quale risultò costituito da due rami incontrantisi in un punto eutettico cui corrispondeva una temperatura di 178° ed una concentrazione di 70 % circa di *Sn*, conformemente a quanto è stato trovato dallo Schleicher contemporaneamente all' esecuzione di tali esperimenti.

I valori parziali delle calorie di solidificazione e di trasformazione emesse in successivi intervalli di 5° di temperatura, addizionati per tutto l'intervallo di solidificazione o di trasformazione, fornirono i valori delle *calorie di solidificazione e* di quelle *di trasformazione* delle singole leghe. La somma di questi valori per ciascuna lega, rappresentante il suo *calore totale di solidificazione*, riuscì sempre superiore al calore di solidificazione dei metalli che la compongono; ciò indica che la soluzione dei due metalli si deve effettuare con assorbimento di calore, come avviene nel caso del sistema analogo *Sn Zn*, da me altra volta studiato.

I valori delle calorie emesse al punto eutettico, e quelli delle calorie di trasformazione, furono, separatamente applicati alla costruzione denominata *analisi termica* del sistema, in luogo delle durate di arresto ordinariamente usate, con minor sicurezza, a questo scopo. Dalla parte del cadmio le due costruzioni diedero una serie di punti allineati verso l'origine $Cd = 100$, indicando così che dalle leghe il cadmio si separava sensibilmente puro, e che la trasformazione si riduceva gradatamente a zero proporzionatamente alla quantità di stagno disciolto.

Ma dalla parte dello stagno si ebbero risultati più complicati.

I punti rappresentanti il *calore eutettico* indicarono chiaramente la presenza di una soluzione solida, ma non si disposero in linea retta così da indicare con precisione la concentrazione della soluzione solida satura alla quale termina la orizzontale eutettica.

È questa l'ordinaria difficoltà causata dalla presenza di cristalli misti, di concentrazione inferiore a quella dell'equilibrio, formatisi nei primi stadî della solidificazione, per cui le quantità di lega che si solidifica al punto eutettico risulta maggiore della normale.

Riuscitomi poco efficace il tentativo di ricondurre la quantità di eutettica al valore normale, collo smorzare la lega nel mercurio freddo e poi ricuocerla lungamente al punto eutettico, applicai alla determinazione del punto di saturazione dei cristalli misti il *metodo del calore di solidificazione* da me in altra occasione proposto per costruire la *linea del solidus* detta *di solidificazione completa*; tale linea determina la concentrazione dei cristalli misti successivamente deposti durante la solidificazione, ed il suo incontro coll'orizzontale eutettica determina il punto di saturazione ricercato. Questo metodo, che per essere applicato non esige che i cristalli misti deposti si mettano in equilibrio alla temperatura eutettica, ha condotto, in base ai valori parziali del calore di solidificazione già calcolati, alla determinazione di alcuni punti bene allineati della detta linea del solidus, la quale, partendo dal punto di fusione dello stagno puro, intersecò la orizzontale eutettica nel punto di concentrazione 10 % *Sn*, che rappresenta il punto di saturazione ricercato.

La linea passante pei punti rappresentativi del *calore di trasformazione* ottenuto coi raffreddamenti totali, presentò, dalla parte dello stagno, un massimo evidente per leghe di concentrazione poco differente dal 10 % di stagno; ma per meglio definire tale massimo

e la concentrazione che gli corrisponde, eseguii una speciale serie di esperienze determinando il calore di trasformazione sopra leghe meglio condotte ad una condizione prossima all'equilibrio, seguendo il metodo, già suggerito dalle esperienze preliminari, di solidificarle rapidamente smorzandole nel mercurio freddo e poi ricuocerle lungamente alla loro temperatura iniziale di fusione. Da questa serie di esperienze risultò che tali trattamenti non modificavano sensibilmente il calore di trasformazione delle leghe più ricche di cadmio dell'eutettica, nè di quelle poco più ricche di stagno di essa, in altre parole delle leghe che, o non depongono cristalli misti, o ne depongono di quelli pressochè saturi; tali trattamenti aumentavano invece sensibilmente, come prevede la teoria, il calore di trasformazione delle leghe deponenti cristalli misti non saturi, ed in ragione della maggior diluizione dei cristalli misti stessi. I valori più elevati del calore di trasformazione così ottenuti, sostituiti nella corrispondente costruzione grafica a quelli determinati coi raffreddamenti totali, diedero alla curva risultante un massimo molto meglio accentuato, e dell'intensità corrispondente a 1,73 calorie per chilogrammo di lega ed alla concentrazione di 94,5 $^0/_0$ di *Sn*. Questa è la concentrazione che deve attribuirsi al corpo che si trasforma nel fenomeno studiato.

Escluso che il calore di trasformazione dipenda dalla formazione di un composto chimico, al quale spetterebbe in base a questa concentrazione la formula poco verosimile $Sn^{13}Cd$, l'ipotesi più semplice è quella che durante la trasformazione il cadmio contenuto nei cristalli misti si separi dallo stagno in cui è disciolto; la causa di tale separazione sarebbe a ricercarsi, come in altre leghe di *Sn*, nella trasformazione allotropica da stagno γ a stagno β che questo metallo subisce, secondo Tammann e Degens, alla temperatura di 161°, e dall'essere il cadmio quasi insolubile nello stagno β. Il diagramma di equilibrio resterebbe, in base a tale ipotesi, arricchito (vedi fig. pag. 488) da due linee, partenti: l'una dal termine già fissato della orizzontale eutettica (10 $^0/_0$ *Sn*) e l'altra dall'asse dello stagno alla temperaratura 161°, ed incontrantesi in un punto eutettoide posto sulla orizzontale di trasformazione a 130° e corrispondente alla concentrazione di 94,5 $^0/_0$ *Sn*.

Di queste due linee, aventi percorso molto ripido, la prima rappresenta la solubilità, decrescente colla temperatura, del cadmio

nello stagno fra il punto eutettico ed il punto di trasformazione, l'altra rappresenta l'abbassamento del punto di trasformazione dello stagno per effetto del cadmio in esso disciolto.

Al detto punto eutettoide avverrebbe la trasformazione dello stagno γ in stagno β, ed il cadmio, per la supposta sua insolubilità nello stagno β, si separerebbe quasi completamente da esso con uno sviluppo di calore equivalente a quello che sarebbe assorbito dalla soluzione del cadmio allo stato solido nello stagno; tale calore, calcolato dal massimo trovato pel calore di trasformazione, risulta di 30 calorie per chilogrammo di cadmio.

La orizzontale di trasformazione, partendo dall'asse del cadmio, deve arrivare per lo meno alla concentrazione 98 $^0/_0$ *Sn*, poichè anche la lega di tal concentrazione presentò trasformazione sensibile, e siccome d'altra parte è evidente che la fase che si separa al punto eutettoide non può essere dello stagno β puro, poichè altrimenti la trasformazione nel riscaldamento dovrebbe ritardare per lo meno fino a 161^0, risulta che la orizzontale di trasformazione deve arrestarsi fra 98 $^0/_0$ e 100 $^0/_0$ *Sn* cioè all'incirca a 99 $^0/_0$ *Sn*. Il diagramma viene quindi ultimato da due linee, partenti da questo termine della orizzontale di trasformazione l'una delle quali sale alla temperatura di 161^0 sull'asse dello stagno e l'altra discende quasi verticale vicinissima all'asse stesso.

La forma di questo diagramma è quasi identica con quella costruita dal Guertler in base alle esperienze dello Schleicher, se non che, il termine della linea eutettica e la posizione del punto eutettoide sulla linea di trasformazione, da me ottenuti sperimentalmente, furono dal Guertler in base a ragioni teoriche notevolmente spostati dalla posizione nella quale erano riusciti dalle esperienze dello Schleicher.

Un'ultima e dettagliata serie di esperienze fu da me eseguita effettuando delle ricotture e maturazioni delle leghe a temperature interposte fra i punti eutettici e di trasformazione. Da queste esperienze risultò che gli arresti in discesa, anche prolungati, se avvengono al di sopra di 132^0 non alterano il valore della trasformazione, poichè la lega rimane in stato di soprassaturazione, ma se avvengono a 132° od a temperature inferiori la trasformazione cessa completamente, quantunque nei raffreddamenti ordinari, in causa della soprassaturazione, la lega discenda al di sotto di 120° prima che inco-

minci la trasformazione; da ciò risulterebbe che la temperatura normale di trasformazione deve considerarsi non inferiore a 132°.

Dagli arresti in salita risultò, che non avviene trasformazione se la temperatura d'arresto non supera i 132°, il che conferma il risultato precedente, ma da tale temperatura in su la trasformazione raggiunge, col tempo, per ogni singola temperatura d'arresto, un massimo relativo tanto più elevato quanto è più alta la temperatura, e raggiunge il massimo assoluto, uguale al valore normale della trasformazione in quella lega, quando l'arresto ha luogo in prossimità al punto eutettico.

Da questi fatti si riconosce che la trasformazione a temperatura crescente si presenta con tutti i caratteri della soluzione di un corpo in un altro, tanto che si può, in base ai valori massimi raggiunti dalla trasformazione alle varie temperature, costruire per punti la linea di saturazione del cadmio nello stagno nel tratto che discende dal punto estremo dell'orizzontale eutettica, ottenendosi così esperimentalmente, anche la linea che congiunge tal punto col punto eutettoide.

Dall'ultima serie di esperienze risultò pure che le ricotture innalzano alquanto la temperatura di trasformazione mentre abbassano il valore della recalescenza rispetto ai valori che presentano nei raffreddamenti totali, fatti tutti che dimostrano come la soprassaturazione abbia una importanza dominante nel fenomeno, tanto che è possibile considerarlo, come già fu da me fatto per altre leghe, come un fenomeno di semplice soprassaturazione, prescindendo dall'intervento della trasformazione allotropica dello stagno.

INDICE

Prof. ALESSANDRO LATTES

LA FORMAZIONE DEL CODICE PENALE ESTENSE

§ I. — Negli ultimi anni del suo principato Francesco V rivolse molte cure alla grande opera della compilazione e pubblicazione dei cinque codici per formare una legislazione che rispondesse ai bisogni dei tempi e fosse in armonia con quella degli Stati limitrofi. In un precedente lavoro furono già esposti i risultati delle mie ricerche intorno alla formazione del codice civile (1) e il presente studio sul codice penale, per la maggior importanza sociale e politica della materia, varrà a dare un' idea più precisa dell' opera legislativa del duca, la quale si potrà poi intendere nella sua compiutezza quando siano esaminati anche gli altri codici, specialmente i processuali. Le fonti sono le medesime per tutti, i fogli di annotazioni ducali e le lettere scambiate dal principe colla commissione legislativa, che si conservano nell' unica busta all' Archivio di Stato in Modena (2): pel codice criminale che fu oggetto di cure particolari, il numero dei documenti è alquanto maggiore e tra questi si riscontra ancora per buona ventura uno dei progetti completi colle annotazioni autografe del duca.

Una sola commissione legislativa, quella nominata col chirografo 6 agosto 1849 (3) e composta del Palmieri presidente, di Toschi, Manini, Cocchi, Battilani consiglieri, provvide a tutti i codici, e sebbene le prime cure fossero rivolte al civile, gli studi si iniziarono poco dopo per tutti: nel giugno 1850, mentre il civile era già ultimato e se ne preparavano le cinque copie per la revisione, erano

(1) LATTES, *La formaz. del Cod. civile estense* nel primo volume della *Miscellanea di studi storici in onore di A. Manno* (Torino 1912).

(2) *Ivi* p. 1 (199).

(3) *Ivi* 2, 3 (200, 1). Non so donde altri abbiano tratto notizia di codici penali pubblicati nello Stato estense nel 1835 (CRIVELLARI, *Il cod. pen. ital. interpretato*, vol. I p. XXXVI) o nel 1846 (GUIDI in *Digesto ital.* s. v. Codice penale p. 789).

già finite le discussioni su quello di procedura civile e il Palmieri attendeva alla redazione del testo, il Manini aveva messo mano ai lavori preparatorii per il penale e il Toschi pel codice di procedura criminale. Così scriveva appunto il presidente al ministro di grazia e giustizia per dimostrargli che l' opera procedeva senza biasimevoli indugi e per respingere talune critiche omai pervenute all' orecchio del Sovrano (4).

Tuttavia, mentre il codice civile si promulgò nel 1851 e quello di procedura civile nell' anno seguente con decreto 14 giugno 1852, il lavoro venne condotto assai più lentamente pei due codici penali e forse restò in sospeso per quasi tre anni, poichè il primo progetto fu presentato solo alla fine del '53 o sui primi del '54. È impossibile determinare la causa del ritardo e forse ad un certo momento vi contribuì la malattia del consigliere Toschi morto il 2 aprile 1853: però la vacanza non durò a lungo e quando il Palmieri al 6 dello stesso mese chiese al ministro se doveva sospendere il lavoro o continuarlo, il duca prima rispose che non aveva per ora intenzione di sostituire il defunto e si proseguisse pure colla commissione ridotta, poi il 22 aprile nominò a quinto membro di essa Bartolomeo Veratti, professore di diritto patrio nell' università, *di cui riconosciamo i meriti e in ispecie il retto pensiero politico.* (5). Dopo la presentazione del primo progetto il lavoro continuò attivamente ma lentamente per le molte correzioni introdotte o richieste dal duca, come diremo: il secondo progetto gli fu sottoposto alla fine del marzo 1854, un terzo agli ultimi d' agosto, l' ordine per la stampa venne dato nell' aprile dell' anno seguente e, poichè essa fu terminata nell' ottobre, si emanò il decreto di promulgazione il 14 dicembre 1855, decreto unico pei due codici penali che dovevano formare un corpo solo di leggi ed entrarono in vigore al 1.° maggio 1856 (6).

Appena promulgati i due ultimi codici, la commissione fu subito sciolta mediante il chirografo 22 dicembre 1855 (7), coi dovuti e meritati elogi ai membri di essa e in particolar modo al presidente,

(4) R. Arch. di Stato in Modena. Minist. di grazia e giustizia, busta n. 183, fasc. I, 8 VI '50. Cfr. LATTES, *l. cit.* 7 (205).

(5) *Docum. riguardanti il governo degli Austro-Estensi in Modena* v. III, sez. I, p. 25.

(6) R. Arch. Busta cit. Fasc. III, 30 III, 17 IV e 9 VIII '54: fasc. II, 12 VI e 26 VIII '54. — Segreteria di Gabinetto, filza A, fasc. IV, n. 1665, 11 IV '55. — *Doc. Austro Estensi* cit. p. 45.

(7) R. Archiv. Segreteria di Gabinetto, filza A fasc. IV n. 5359.

mentre poi il codice di commercio, promulgato il 3 marzo 1859 e non attuato pei rivolgimenti politici, fu compilato a cura dei ministri di grazia e giustizia e delle finanze (8).

§ II. — Il Pessina, nel suo magistrale lavoro sulla storia della legislazione criminale nei secoli XVIII e XIX (9), attribuisce il merito delle buone innovazioni che egli nota nel codice estense al Palmieri che usò ogni arte per indurre il duca a mitezza, al Veratti, al giureconsulto Lodovico Bosellini, al dottore Gaetano Gandolfi professore di medicina legale.

Dai documenti conservati nella nostra busta dell'Archivio, da quella parte dei lavori preparatorii che pervenne a nostra conoscenza si rileva che l'opera personale del Palmieri fu veramente assai grande: dopo il primo lavoro di redazione, fatto in comune cogli altri commissari, egli ebbe spesso a decidere da solo senza riunire ufficialmente i colleghi intorno ai mutamenti ordinati dal duca e comunicatigli dal ministro di grazia e giustizia, accettandoli o discutendoli e modificando il codice quando non riusciva a convincere il Sovrano, cosicchè una volta rispose a questo che per certo cambiamento da lui richiesto si sarebbe alterata l'economia del codice e sarebbe stato necessario convocare l'intera commissione (Cfr. più innanzi § 11). Del Veratti, che era considerato dal Mancini uno dei luminari della scienza italiana e molto stimato dal Carrara (10), sappiamo solo che fu membro della commissione dopo la morte del Toschi ed avrà cooperato cogli altri nella preparazione dei progetti: degli altri manca nelle carte succitate qualsiasi cenno e, quanto al Bosellini, il Veratti suo amicissimo ne tace affatto nella necrologia che di lui scrisse nel 1871 (11).

Anche pel codice penale si hanno tracce di consultazione di persone estranee, poichè in una minuta di lettera senza firma si legge che i sottoscritti, invitati a dare il loro parere intorno a due punti speciali, lo espongono per uno di essi approvando con lieve modificazione le proposte della commissione, quantunque non conoscano l'insieme del codice (prova manifesta che si tratta di persone che non formano parte di quella), nulla hanno da osservare sul-

(8) Collez. generale delle leggi per gli stati estensi XXXVII p. 15.

(9) Pessina, *Il dir. pen. in It. da C. Beccaria* ecc. *Enciclop. del dir. penale* II, 627.

(10) *Diritto cattolico* 1889 n. 78. Necrologia di B. Veratti.

(11) *Opuscoli religiosi, letterari e morali,* sez. III, t. III, 299 e segg.

l' altro punto a cui provvedono con norme analoghe anche codici di altri Stati (Busta dell' Arch. Modenese, fasc. II, 3 VI '54).

§ III. — L' azione personale di Francesco V fu assai più forte, persistente ed efficace nel campo penale di quello che era stata pel codice civile. Già con un chirografo 22 aprile 1853 (f. II) il duca aveva determinato per norma della commissione le pene criminali e correzionali (12), e con altri fogli autografi senza data anteriori al primo progetto (f. III) espose diffusamente il suo pensiero intorno a reati e pene maggiori e minori (13). Ricevuto quel progetto, lo rinviò colle sue osservazioni; ebbe il secondo colle risposte della commissione e le spiegazioni sulle sue proposte non accettate, e replicò nuovamente con altre note e richieste di nuove esplicazioni, dichiarandosi non soddisfatto, perchè i mutamenti introdotti erano non conformi ed in parte affatto contrari alle norme già date.

In un chirografo 12 giugno '54 (f. II) scrisse queste parole: *Volendo noi che nella nuova legislazione da stabilirsi in materia penale abbiano da prevalere quelle regole che ne rendano più semplice il sistema e per le quali ne risulti una più spedita regolare ed energica amministrazione della punitiva giustizia, abbiamo determinato di prescrivere alla commissione in via di massima generale alcune norme ulteriori con le quali si ponga mano all' ultima riforma di entrambi i codici.*

Al terzo progetto che gli viene trasmesso, e che è probabilmente quello conservatoci nella busta dell' Archivio (14), il duca fa nuove correzioni e si lagna che la commissione, invece di mandargli le sue osservazioni in iscritto, con poca lealtà, quasi a sorprendere la sua buona fede, abbia ricopiato alcuni articoli senza i mutamenti da lui imposti e senza esporre le ragioni del dissenso, ond' egli diffidente deve con gran fatica riveder tutto minutamente, *non mi fido dei nuovi testi e ci guardo le cuciture*, per verificare se le correzioni da lui volute furono eseguite (f. III, 7 VIII '54).

Alla metà di ottobre del '54 dà ordine che si disponga ed incominci alacremente la stampa coll' aggiunta di qualche altra variazione indicata di sua mano, ma il lavoro ducale di revisione non

(12) *Docum. Austro Estensi* cit. 2.

(13) *Ibid.* sez. II, p. 254 e segg.

(14) Il documento in data 18 XII '54 col titolo *Sovrane osservazioni sul nuovo cod. crimin.* non è che la copia di tutte le annotazioni marginali che si leggono nel progetto conservato, di cui Francesco ordina che si trasmettano al ministro per la inserzione in quello.

era ancor compiuto ed una nuova serie di correzioni ed osservazioni fu trasmessa (f. II, 18 XII '54), tale che il presidente dovette allora rimandare il progetto ai singoli commissari per un esame preliminare individuale e riunirli poi nuovamente in collegio per la discussione (15). Di qui appunto il nuovo e più grave ritardo al compimento dell'opera, che non potè esser ultimata se non alla fine del 1855.

Vivo è lo scambio di lettere fra il duca ed il Palmieri, intermediario sempre il ministro Scozia. Il secondo adopera la consueta forma riverente ed ossequiosa e presenta sempre *rispettose e sommesse osservazioni:* il primo usa assai spesso pel codice penale il verbo *volere* e dà ordini *assoluti* ed esclude ogni opposizione, molto più raramente scrive *proponiamo* o *propendiamo*, e solo nei foglietti autografi suaccennati ad opera appena incominciata si vale del condizionale (*opinerei*) (16). Due motivi l'indussero senza dubbio a tale contegno, l'importanza dell'opera assai più grave che non il codice civile nelle condizioni dei tempi e secondo le sue idee politiche, e la maggior diffidenza sorta nell'animo suo per alcune grosse novità introdotte nel civile sotto i suoi occhi, specialmente per la lunga controversia sulla forma della celebrazione del matrimonio, risoluta col decreto ducale del 7 novembre 1855, come dissi altrove (17). Perciò vediamo ordinare che a lui si rimandino di volta in volta i fogli colle sue annotazioni, ad evitare che alcuna potesse esser dimenticata nella verifica: egli aggiunge di sua mano l'*approvato* in ogni foglietto e ad ogni proposta quando è soddisfatto, scrive e fa scriver più volte che non darà licenza di cominciare la stampa finchè non siano state introdotte tutte le correzioni da lui richieste od egli non sia stato persuaso e convinto di ritirarle e il codice non sia *ridotto secondo la mente sua, finchè io non tocco con mano che tutto è a modo mio* (18): anche quando dà licenza di por mano alla stampa, vuole che successivamente gli si sottoponga ciascun foglio prima della tiratura definitiva (19).

Chiaramente espressivo è a tale proposito il decreto di promulgazione del codice criminale: La Commissione incaricata della com-

(15) Fasc. III, 21 I '55: fasc. II, 1 III '55.

(16) *Docum. Austro estensi* cit. p. 254.

(17) Lattes, *l. cit.* 6, 14 (204, 212).

(18) Fasc. II, 4 e 17 X '54.

(19) Fasc. III, 17 IV '54; f. II, 12 VI '54. *Doc. Austro Estensi* cit. sez. I p. 45.

pilazione del nuovo codice criminale..... ha dato compimento al lavoro ad esso affidato, nel modo che secondo la Nostra Mente valga meglio a reprimere i delitti ed a rendere più spedita e regolare ad un tempo l'amministrazione della punitiva giustizia.

§ **IV.** — Tanta e così minuta ed assoluta fu l'azione personale di Francesco V nella formazione del codice penale estense, che la conclusione di queste mie ricerche potrebbe quasi apparire contraddittoria: l'opinione ripetuta da parecchi scrittori (20), che soltanto l'opera di lui abbia contribuito a rendere il codice più crudele e in larga misura più severo, è contraria alla verità storica, come provano gli stessi documenti, i quali, essendo in buona parte autografi, ci danno notizia certa, benchè un po' frammentaria, di quella azione. Tale mia affermazione deve però intendersi in senso limitato, teorico e scientifico più che pratico e politico.

Francesco V non fu certamente di grande ingegno, — e se apparisse alcun documento autografo contraddicente, dovrebbe reputarsi sospetto —: non ebbe alcuna cultura giuridica, come notai altrove (21), onde le sue osservazioni e le spiegazioni ch' egli richiede sono molto facili, piane e ristrette: era capace di agire direttamente sull' animo dei *suoi* giudici chiamati ad applicare il *suo* codice per trarli a rigore e crudeltà, e ne diede prova più volte, e da principe assoluto, qual era, poteva pur derogarvi cogli editti ad arbitrio: nè può in modo alcuno venir attenuata la sua nefasta azione contro i martiri del nostro Risorgimento, contro i patriotti che lottavano per la libertà e per l'unità, contro tutti i suoi sudditi e le loro libertà civili. Ma chi confronti minutamente le proposte della commissione, le osservazioni del duca, le norme scritte definitivamente nel codice, deve ammettere non solo che l'azione di lui avrebbe potuto esser assai peggiore, poichè molti articoli furono accettati senza opposizione quali erano stati formulati dalla commissione, gli aggravamenti dovuti alla volontà del duca non furono molti nè forti, ed alcuni da lui proposti si poterono ancora evitare, ma altresì che parecchie norme tra le più rigorose sono dovute direttamente all'opera

(20) Bosellini, *Francesco IV e V di Modena* (I contemporanei italiani, n. 14) 133, 134 ed *Elogio del conte L. Valdrighi*, 87; cfr. Bayard de Volo, *Vita di Franc. V*, IV 516 — Crivellari, *Il cod. penale per il regno d'It. interpretato* I p. XXXVII — Calisse, *Digesto Ital.* s. v. Codice, 434.

(21) Lattes, *l. cit.* 6 (204); cfr. Bosellini, *Franc. IV e V* p. 104.

della commissione e qualche pur lieve mitigazione è da attribuirsi allo stesso duca.

Non io vorrei certo negare che i compilatori si mantennero senza dubbio conformi alla mente ducale nello spirito del loro lavoro, sia perchè erano scelti fra le persone *ben pensanti*, e Filippo Cocchi e Bartolomeo Veratti vi meritano il primo posto, sia perchè il duca avrebbe senz' altro respinto proposte troppe distanti dalle sue idee: però chi voglia giudicare secondo giustizia della redazione teorica del codice criminale estense deve dare merito o colpa di molti articoli alla commissione e non al duca. Questa è la sola parte che spetta alla storia giuridica e la sola ch' io vorrei qui mettere in luce: l'applicazione del codice nei tre anni che corsero dal 1856 al '59 appartiene piuttosto alla storia politica e civile del ducato per la qualità dei tempi e delle persone che furono travolte sotto il suo rigore, e di essa purtroppo i documenti sono altrettanto noti quanto eloquenti: i moti di Carrara informino.

§ V. — Quali principii scientifici abbia seguito la commissione legislativa nel deliberare intorno ai gravi problemi che man mano si presentavano, non è possibile determinare con certezza. Le espressioni che si leggono nel decreto di promulgazione sopraccitato mostrano come nel pensiero del principe e dei giureconsulti da lui scelti lo scopo della pena non potesse esser altro che la intimidazione; ma le carte a noi pervenute non ci offrono il menomo indizio di alcuna discussione nè intorno a norme generali nè sui punti speciali, nessuna traccia vi è rimasta pel codice penale, mentre pur qualcuna apparisce pel civile (22). Probabilmente il timore di possibili denuncie e sospetti, o il pericolo di perdere il favore del sovrano avrà tratto i commissari a deliberare senza parlare di motivi, tentando di conciliare le esigenze della giustizia penale colle volontà note o supposte del principe, nè alcuna ragione giuridica doveva o poteva utilmente esser addotta nel rispondere alle obiezioni di lui che non uscivano da un campo strettamente pratico. La commissione non tenne presente solo il codice parmense, com' era stato suggerito in principal modo dal duca nel decreto costitutivo, ma anche gli altri allora vigenti nella penisola: sia da qualche dichiarazione esplicita, sia dal minuto raffronto degli articoli si riconosce che tutti furono

(22) Lattes, *l. cit.* 4 (202).

consultati, e specialmente l'albertino del 1839, e in qualche punto seguiti ed anche letteralmente imitati. L'autorità di essi non aveva però alcun valore pel duca, il quale una volta alla risposta che un articolo da lui criticato era conforme alle norme vigenti negli altri Stati, replicò: ***Poco c' importa cosa pongano alcuni altri codici*** (23), mentre altre volte egli medesimo espresse il desiderio (non soddisfatto) che s'introducessero norme analoghe a determinati articoli del cod. austriaco (§ 15).

Afferma il Bosellini (24) che dai commissari vennero consultati i lavori dei giureconsulti che prepararono nei primi anni del sec. XIX il progetto del codice penale pel regno d'Italia (25). L'asserzione, quantunque non confortata da alcuna prova, merita fede, perchè il giurista modenese fu amicissimo del Veratti più volte ricordato, ma tuttavia nel confronto dei due codici, sia per la divisione dei reati o per la scala delle pene, sia per i principii generali o per le sanzioni applicate ai singoli malefizi, una sola analogia mi parve di riscontrare, rilevante ma unica. La determinazione del concetto di delitto, ispirata ad un retto e lodevole criterio scientifico, quale si legge nel codice estense e soltanto in esso fra tutti i codici italiani, è notevolmente simile a quella del progetto 1807: infatti nel primo articolo di questo si dice che la violazione di una legge penale, o si commetta l'atto che vieta o si ometta quello che comanda, è un delitto, come il primo articolo del codice estense dispone che la commissione o l'omissione di un'azione vietata o comandata dalla legge è un delitto. La somiglianza non potrebbe esser più evidente, massime di fronte alle definizioni assai differenti date negli altri codici italiani, ma, come dissi, è pur la sola; di qualche altro indizio che vi si può aggiungere, dirò più innanzi (§§ 13 e 18).

§ **VI.** — I caratteri generali del codice penale estense ed il posto che gli spetta fra gli altri anteriori all'unificazione vennero già esposti dal Pessina (26), e mi pare inutile qui ripeterli per disteso, tanto più perchè non si trova nelle nostre carte alcun ricordo di cure spe-

(23) Fasc. II. Nota marginale autografa alle *Rispettose osservazioni*.

(24) *Elogio del Conte L. Valdrighi*, 125.

(25) *Collezione dei travagli sul codice penale pel regno d' Italia*, vol. I.

(26) PESSINA, *op. cit.* 628. — Un minuto confronto fra le disposizioni del cod. nostro e dell'estense si trova, titolo per titolo, nella cit. opera del CRIVELLARI, fino al titolo dei Delitti contro l'amministraz. della giustizia; nella parte successiva il SUMAN, che continuò l'opera, trascurò sia il codice parmense sia l'estense e non ne fa più menzione.

ciali usate dalla commissione nei punti da lui accennati. Giova invece esaminare minutamente quel codice, sia per esporne insieme colle norme particolari già rilevate dal Pessina anche altre pur degne di nota, sia per dare le prove della mia precedente affermazione e determinare in quali punti Francesco V abbia fatto prevalere la sua volontà ed in quali altri importanti l' opera della commissione sia rimasta intatta. Per uno speciale carattere di quel codice in cui vennero omesse le contravvenzioni, è necessario a scopo di compiutezza considerare insieme con esso il Regolamento di polizia pubblicato durante la preparazione del codice, con editto 12 febbraio 1854, dopo una minuta revisione di mano ducale (27), coll' intento di *ottenere più regolare ed uniforme applicazione delle disposizioni di polizia e lasciar più campo alla magistratura giudiziaria ad occuparsi della investigazione dei delitti di maggior momento.*

§ **VII.** — Il principio fondamentale *nullum crimen, nulla poena sine lege*, che vale ad escludere ogni applicazione o mutamento di pena non prestabilita in legge positiva anteriore al delitto, manca nel cod. estense e manca solo in esso, mentre si legge in tutti gli altri a cominciare dal napoleonico, ma non può per tale omissione reputarsi contraddicente allo spirito di quello, e nessun articolo del cod. penale o di procedura penale vi apparisce contrario. Solo nel regolamento di polizia si dà facoltà al ministro del buon governo di applicare le pene stabilite anche per contravvenzioni non esplicitamente nominate se siano analoghe per parità di ragione ad altre comprese in quello (art. 4).

Fu già riferita la definizione del delitto, quale è data dal codice estense, e qui deve notarsi che tale nome unico si applica a tutti i fatti previsti dal codice, abbandonata ogni distinzione di categorie tradizionali, crimini e delitti, ed esclusa la materia delle contravvenzioni, che viene riservata allo speciale regolamento, come nel sistema toscano. Fino dai primi tempi (28) il duca aveva espresso la sua intenzione che si tenessero separate le pene criminali applicabili dai magistrati ordinari e le correzionali riservate ai tribunali di polizia, ed anche nei foglietti autografi (fasc. III) egli si allunga minutamente sulla giurisdizione e la procedura innanzi a questi ultimi.

(27) *Doc. Austro Estensi* cit. sez. I, p. 130, 131.
(28) Fasc. III, 30 III 54: fasc. II, 12 VI '54.

La proposta della commissione di separare materialmente le due specie di atti illeciti in due compilazioni diverse, il codice e il regolamento (come era stato fatto in Toscana (29), venne accettata senza obbiezioni, ma qui fu pur mantenuta la distinzione delle giurisdizioni, mentre in Toscana la giurisdizione spettava sempre per tutti gli atti in modo uguale ai giudici ordinari. Era dessa una porta largamente aperta all' arbitrio per la mala fama della polizia, ma senza un grave pericolo di danno sociale, perchè le azioni comprese nella seconda categoria erano di lieve importanza e moderate le pene che potevano essere applicate. Il duca alieno da ogni criterio giuridico voleva che la separazione fosse fatta secondo la pena e che la giurisdizione della Polizia o Buon governo si estendesse a tutti i delitti puniti più lievemente, anche se il processo fosse stato iniziato innanzi all' autorità giudiziaria, cosicchè questa avrebbe dovuto trasmettere a quella tutti gli atti colla relazione per l'applicazione della sanzione (30). Il Palmieri resistette e replicò più volte che tale rinvio dai tribunali alla Polizia appariva poco conveniente, ingiusto e pericoloso ed eccessivamente dilatorio, e che spesso a reati per sè gravi si diminuisce nella sentenza la pena per mancanza di dolo o della piena esecuzione o per altre circostanze attenuanti, le quali non possono determinarsi *nel vero aspetto e in tutta verità* prima e fuori del processo: contemporaneamente in più articoli egli elevò senz' altro la durata minima della pena (carcere) proposta, affinchè i delitti non potessero mai cadere per qualsiasi diminuzione di essa sotto la giurisdizione della Polizia e restassero sempre compresi in quella della magistratura ordinaria. Di ciò si lagnò fortemente il duca, trovando ingiusta e intollerabile tale diffidenza verso la Polizia, *che sarebbe ben triste cosa*, ma alla fine si lasciò persuadere, accettò che i fatti punibili si distinguessero e si assegnassero all' una od all' altra giurisdizione secondo la qualità loro prima del giudizio, ed il Palmieri ridusse subito le sanzioni artificiosamente aumentate a tal uopo (31).

Manca nel codice estense ogni classificazione dei delitti, anche quella generale dei delitti contro l' ordine pubblico e contro i privati che s' incontra nel codice francese e nel parmense: i reati sono collocati uno dopo l' altro, seguendo tacitamente un certo ordine di analogia intrinseca od estrinseca.

(29) Cfr Regolam. di polizia punitiva del 20 giugno 1853.

(30) Docum. cit. alla nota 28 e fasc. III, 17 IV '54.

(31) Fasc. II. Rispettose osservaz. — Fasc. III, XI '54.

§ **VIII.** — Altre novità minori nella parte generale passarono probabilmente senza osservazioni del duca per la natura strettamente giuridica. La più rilevante si riferisce alla recidiva, per la quale si accettarono regole in parte più miti, in parte più severe degli altri codici. Non ogni delitto vi dà luogo nè essa dipende dalla qualità della pena già pronunciata contro lo stesso colpevole, ma si richiede secondo la migliore dottrina che il secondo reato appartenga alla stessa specie del primo, nelle categorie stabilite esplicitamente dal codice (a. 76, 77): la novità è degna di nota, anche perchè risponde al principio generale suaccennato che gli atti si considerano secondo la gravità loro e non secondo la pena assegnata. Tale riforma si incontra anche nel cod. toscano (a. 82, 84) ma non fu accolta nell' estense nella sua ampiezza, perchè basta la condanna precedente anche se la pena non fu espiata (a. 76, 80), e non si fa alcun conto dello spazio di tempo trascorso fra il primo e il secondo delitto, che pur potrebbe esser tanto lungo da attenuare od annullare il danno sociale prodotto dal primo e togliere ogni fondamento di giustizia alla maggior punizione del recidivo. Inoltre si aggiunge un aggravamento di cui ci offre solo esempio questo nostro codice, ammessa la recidiva se la prima sentenza fu emanata da tribunali esteri (a. 80): questa retta applicazione del principio essenziale contraddice alla gelosa cura dei legislatori per tutelare l' indipendenza della propria sovranità specialmente nelle materie penali.

Notevole differenza fra il codice criminale e il regolamento di polizia intorno all' età minore. L' imputabilità comincia sempre per ambedue dopo il decimo anno compiuto; fino a 14 anni secondo il codice il giudice deve esaminare se il colpevole agì con discernimento, in caso negativo ne ordina la consegna ai parenti con opportuni provvedimenti o la detenzione in casa di correzione, in caso affermativo lo condanna alla chiusura nella stessa casa entro i limiti di tempo fissati dal codice secondo il delitto: quanto ai maggiori sino a diciotto e ventun anni si determinano vari gradi di colpa e di punizione. Invece il regolamento (a. 3, 11) distingue solo se furono compiuti i quattordici anni o meno senza far cenno di esame del discernimento, dichiara che oltre alle vere contravvenzioni, anche anche taluni delitti minori si considerano contravvenzioni quando l' autore ha meno di quattordici anni, e determina sempre la pena

nella forma numerica di una frazione di quella stabilita dal regolamento o dal codice nei casi ordinari.

Quanto ai minorenni fra diciotto e ventun anni, il codice estense prescrive, secondo l'antico principio dell' atrocità del malefizio, che taluni delitti più gravi siano puniti colla pena ordinaria, nonostante l'età non ancora perfetta. E qui è da notare che il numero di essi andò successivamente aumentando per espressa volontà del duca, poichè la commissione aveva proposto di comprendere solo i reati contro la religione e quelli di lesa maestà, il duca vi aggiunse con successivi chirografi durante la preparazione del codice l'omicidio premeditato o commesso senza provocazione, il veneficio e l'omicidio dei parenti, dei superiori, e delle autorità costituite, e anche dopo la promulgazione del codice stesso l'omicidio commesso in occasione d'una grassazione, invasione o ruberia di qualsiasi specie (32). L'uccisione dei superiori e delle autorità costituite, che era stata indicata nel chirografo del 27 settembre 1855, non apparisce poi nell'art. 61, § 2 probabilmente perchè il duca vi rinunciò, non essendo tali qualità personali della vittima indicate nelle norme generali fra le cause aggravanti dell'omicidio.

Possiamo anche ricordare che la ubriachezza viene considerata nel codice soltanto in relazione all'omicidio colla triplice distinzione di accidentale, abituale, preordinata, mentre sia nelle antiche costituzioni (33) sia nel regolamento di polizia (a. 111), l'ubbriachezza casuale od abituale è ricordata, come causa rispettivamente attenuante o no, per tutte le azioni punibili senza distinzione.

§ IX. — Anche intorno alle pene il duca espresse la sua precisa volontà e ne determinò le specie sino dal principio dell'opera legislativa nei suoi chirografi e foglietti autografi (34). Esse sono le consuete, senza alcuno speciale aggravamento, e nessuna è dichiarata infamante, a differenza di quanto si legge negli altri codici italiani, salvo il toscano.

I malefizi puniti coll'ultimo supplizio secondo il codice estense sono i seguenti:

(32) R. Archivio, Segreteria di Gabinetto filza A, fasc. 4 n. 3912 e 3460, chirogr. 27 agosto e 7 settembre 1855. — Collez. generale delle leggi per gli stati estensi XXXV 99, decreto 9 agosto 1856.

(33) Costituz. modenesi 1771, IV 17. 9 e 10.

(34) Fasc. II, 26 IV '53 e 12 VI '54: fasc. III, fogli autografi senza data.

il più grave fra i delitti contro la religione, cioè l' atto materiale sacrilego sulle ostie consacrate,

l'attentato contro il principe o qualunque membro della casa regnante, la cospirazione e congiura contro la persona o il potere del sovrano e l' ordine di successione, la formazione di bande armate a tale scopo, la fondazione di società segrete e l' obbligare altri ad aggregarvisi,

l'omicidio, quando sia unito a qualche aggravante di persona, mezzo, modo, scopo, o si compia in duello, o per evirazione, o con grassazione, incendio o sommersione, o con falsificazioni di documenti per ottenere un' esecuzione capitale, l' incesto violento su persona minore di 14 anni, l' incendio doloso applicato a determinati edifizi (pubbliche chiese e palazzi reali), anche se non vi fu alcuna vittima umana.

Non può dirsi a parer mio che i legislatori estensi abbiano ecceduto (35) e siano usciti, salvo per l' ultimo indicato, dalla serie dei delitti più gravi che hanno in sè l' elemento di atrocità, a cui più facilmente si può ammettere applicabile la pena capitale, se essa non voglia abolirsi in modo assoluto. Manca p. es. ogni accenno di morte o condanna perpetua in materia di falso nummario, quale pur si incontra nel codice francese ed in alcuni codici italiani (parmense, albertino, pontificio).

In due soli casi il duca insiste ed impone la sanzione capitale, e sono veri casi d' omicidio di cui si hanno esempi negli altri codici, nel duello quando il provocato sia morto sul campo o nelle ventiquattr' ore (a. 253 § 4, cfr. regolam. pontificio a. 296), nella evirazione che abbia prodotto veramente la morte nel consueto termine di quaranta giorni (a. 405 § 2, cfr. codice napoletano e parmense).

La pena di morte viene aggravata coll' esemplarità del capo coperto da velo nero e dei piedi nudi nel parricidio e nell' omicidio anche tentato del sovrano regnante (a. 114, 357 § 2). Il codice estense ammette (a. 15), come il parmense (a. 15), l' esecuzione simbolica della pena capitale pel condannato contumace o suicida colla erezione del patibolo per affiggervi un cartello con tutte le indicazioni relative al reo, al reato ed alla pena. In due soli casi si aggiunge a quella pena

(35) SALVIOLI, *Trattato di storia del dir. ital.* § 128 Codice criminale . . . . prodigo di pena capitale, galera perpetua.

la confisca, nell'attentato contro la vita del sovrano e nella congiura contro il potere supremo (a. 114, 117), ma per volontà esplicita del duca furono riservati e salvi i diritti dei successori legittimari e gli alimenti per la vedova. Anzi nei primi progetti la commissione propose la confisca anche in altri delitti, ma il duca vi si dimostrò contrario e ne volle le cancellazione (36).

§ X. — Una pena proposta dalla commissione come accessoria, l' interdizione perpetua da pubblici uffici per quelli che non fossero di nomina sovrana, era stata accettata dal duca, ma fu poi da lui stesso esclusa e cancellata in qualsiasi caso, forse per timore che potesse comunque estendersi ad ufficiali nominati dal principe (37). Per sua volontà scomparve anche ogni traccia di semplice sospensione dall'esercizio di arti e professioni, salvo una sola eccezione nel codice (a. 457) e la perdita delle licenze per esercizi di caffè, alberghi e simili stabilita dal regolamento di polizia.

I castighi corporali esclusi nel codice vennero introdotti nel regolamento secondo l' opinione dello stesso duca (v. § 11). Nè l'uno nè l'altro fanno menzione della berlina proposta dal duca per i ladri e per chi insulta o si oppone alla forza pubblica (38).

Due piccole particolarità possono ricordarsi in materia di pene afflittive. Mentre nel codice parmense i condannati ai lavori forzati sono legati a due a due e le donne portano un leggero anello di ferro, l' estense permette che i primi lavorino da soli colla catena e non parla d' anello per le donne, le quali scontano la pena dell' ergastolo nella casa di forza secondo le regole di questa. Inoltre mentre il codice austriaco ordina l' uso del bastone pei maschi adulti e riserva le verghe per le donne e pei giovani sino a diciott' anni, il regolamento di polizia estense stabilisce l' opposto (39).

Quanto alle pene pecuniarie, il duca notò più volte che erano a suo giudizio troppo scarsamente usate (40), ma non apparisce che nella redazione definitiva del codice alcuna pena di tale specie venisse aggiunta od aumentata.

---

(36) Fasc. II, 22 IV '53. Cfr. *Doc. Austro Estensi* loc. cit. sez. I, p. 2. — Fasc. II, osservazioni ducali ordinate numericamente senza rinvio agli articoli cui si riferiscono.

(37) Fasc. II, 12 VI '54 e annotaz. marginali del duca nel progetto.

(38) *Doc. Austro Estensi* cit. p. 254. — Fasc. III, osservaz. del duca: In genere crederei di limitare le pene corporali alla polizia correzionale.

(39) Cod. parm. 18: cod. est. 18: cod. austr. 24: regolam. est. 221.

(40) Fasc. III, 17 IV '54; f. II, 3 V e 12 VI '54.

§ XI. — I limiti estremi delle singole pene furono determinati in generale dal duca e sono fissati nei primi articoli del codice, ma nella revisione dei progetti questo non parve a lui ancora sufficiente e giudicò fossero troppi gli articoli (centoundici) in cui s' indicava solo la qualità della pena, lasciata facoltà al giudice di muoversi tra il massimo ed il minimo. Perciò in molti aggiunse di sua mano la ripetuta annotazione dei limiti e restrinse spesso l' intervallo tra quelli, dichiarandosi assolutamente contrario all' arbitrio del giudice, *perchè in caso diverso vediamo rivivere sotto altro nome il sistema delle pene straordinarie da Noi sempre trovato difettoso* (fasc. II, 27 XI '54). Era veramente l' antico sistema di pene straordinarie cosa molto diversa da una moderata libertà del giudice secondo le circostanze del fatto, ma l' affermazione del duca è sempre notevole indizio del suo pensiero. Manca quindi naturalmente nel codice ogni norma generale che accenni a tale ragionevole libertà del giudice, quantunque abbia sempre facoltà di determinare la pena fra limiti più o meno larghi, ma non si ha alcun esempio di sanzione intangibile nella specie e nella durata. Anche quando il duca propose che nel reato di stupro violento si distinguessero alcuni minuti particolari, p. es. se il colpevole si avvicinò alla vittima con qualche pretesto, o se la vittima si liberò da sè o per l' accorrere di gente in aiuto, la commissione rispose e il duca accettò che fosse rimesso al giudice l' esame di tali fatti particolari e compreso nella latitudine concessagli, secondo la gravezza delle circostanze (a. 433).

Inoltre, mentre la commissione aveva solo stabilita la scala penale e l' ordine del passaggio da una all' altra pena nei casi di aumento e diminuzione come nel codice parmense, il duca impose che si determinassero per ciascuna specie i singoli gradi ed in parte li fissò egli medesimo, nè volle cedere alle obiezioni del Palmieri, il quale del resto non opponeva contro tale graduazione ragioni giuridiche, ma solo la conformità delle norme proposte agli altri codici italiani, e la necessità di convocar di nuovo la commissione con una maggior perdita di tempo, per riordinare tutta l' economia del progetto che ne sarebbe stata alterata (fasc. II, 18 XI '54). Non sono però molti gli articoli nei quali la modificazione della durata della pena avvenga per gradi e la norma aggiunta per volontà del duca rimase in molta parte non applicata.

Fu pure voluta ed imposta dal principe (41) la disposizione che a parità di durata la pena dell'ergastolo si reputa più grave dei lavori forzati e questi più del carcere (a. 53 § 1). È una norma teorica che corrisponde all'altra che dichiara equivalenti un giorno d'ergastolo, due di lavori e tre di carcere (a. 36 § 2) ed ha nel codice toscano una speciale applicazione pratica nei regolamenti carcerari per il trattamento dei detenuti (42). E per l'azione diretta del duca e di sua mano (43) fu pure introdotto il criterio economico nella commisurazione di certe pene in relazione al danno sofferto, per cui nei reati di falso la durata dei lavori forzati è proporzionale ad esso e nell'incendio l'ergastolo si aumenta nella proporzione eccessiva d'un anno per ogni cento lire di danno (a. 306, 318, 522, 531 e segg.).

Anche il computo del carcere preventivo venne disciplinato per volere del duca collo stabilire che esso può calcolarsi nella pena soltanto quando equivalga al sesto della pena inflitta. Il duca insiste perchè tale norma venga introdotta non tanto per benevola persuasione della giustizia di simile computazione, quanto allo scopo di frenare l'arbitrio dei giudici e limitarne anzi l'eccessiva indulgenza, come prova qualche documento in cui se ne lagna (44): il presidente Palmieri giudicò poi che tale disposizione avesse posto più conveniente nel codice di procedura criminale (a. 332 § 2), dove apparisce anche in quella forma incerta (*può calcolarsi*) che non risolve il dubbio se il giudice abbia obbligo o solo facoltà di computare nel caso ammesso (45).

§. **XII.** — Nel regolamento di polizia il campo aperto all'arbitrio del Buon governo era abbastanza largo per la determinazione dei fatti punibili, come fu già detto; nell'applicazione delle pene quel magistrato poteva giungere fino ad un anno di detenzione in

(41) Fasc. III, osservaz. marginale nel progetto: Ordiniamo assolutamente che si inserisca il seguente articolo.

(42) Cod. toscano 1853 a. 18. Rispetto al vitto, al vestiario, alle mercedi del lavoro e alla quota disponibile di essa, le condizioni del condannato all'ergastolo sono più gravi di quelle del condannato alla casa di forza e le condizioni del condannato alla casa di forza sono più gravi di quelle del condannato alla carcere. Tali differenze sono determinate dal regolamento (degli stabilimenti penali) annesso al presente codice.

(43) Fasc. III. Progetto con osservaz. margin. — Fasc. II, 18 XII '54.

(44) *Docum. Austro Estensi* l. cit. p. 7 (22 III '56).

(45) F. II, 2 III 55 e lettera del Palmieri 4 III '55 ove si parla di *facoltà* del giudice. Il CRIVELLARI, *op. cit.* III 212, scrive quindi a torto che il codice estense non si occupa del computo del carcere preventivo.

casa di forza ed a sei mesi di carcere, poichè il limite d' un anno fisssato in principio dal duca anche per quest' ultimo venne poi ridotto a metà per le insistenze della commissione legislativa.

I castighi corporali, che si usavano di fatto anche prima, sono ammessi nel regolamento, in un' aggiunta fatta di pugno del duca (46), sia come pene accessorie al carcere, sia come sanzione unica, che può usarsi a giudizio del ministro del Buon governo e dei direttori di polizia, specialmente contro le persone di basso stato, garzoni, domestici, operai che vivono del loro lavoro ed hanno da sostener la famiglia, perchè troppo sarebbero danneggiati dalla detenzione (in modo conforme alle disposizioni del codice criminale austriaco, a. 248). È degno di menzione e lodevole pel suo contenuto l' articolo 222 del regolamento che regola le facoltà del magistrato nel modo seguente, molto meglio che non si facesse per le autorità giudiziarie: per decretare la pena maggiore o più mite o anche minima sempre entro i limiti stessi, il magistrato medesimo prende norma dalle circostanze del fatto e specialmente dal danno o pericolo del fatto medesimo e dalla malvagità e dalla forza della volontà dell' agente, a seconda ancora della di lui età

§ XIII. — Nella parte speciale tre sono le categorie dei delitti da cui si può più facilmente ricavare qualche indizio sulle opinioni e sulle intenzioni dei compilatori del codice e determinarne i particolari caratteri, sempre tenuto conto dei tempi, cioè i reati contro la religione, quelli contro la sicurezza dello Stato e quelli compiuti da pubblici ufficiali.

I reati contro la religione sono puniti severamente ma non eccessivamente, e la pena di morte è sancita solo nel caso accennato di sacrilegio gravissimo contro le ostie consacrate, la pena a vita solo pel furto in cui si riuniscano insieme tre qualifiche, della qualità delle cose, del luogo sacro e del valore (sopra cento lire per le cose sacre, sopra mille per quelle dedicate o destinate al culto) (a. 480). Il punto più censurabile è quello che si riferisce alle bestemmie, poichè il codice punisce le ereticali coi lavori forzati che possono arrivare al massimo di vent'anni nel caso di diffusione colla stampa (a. 104), mentre le altre che non includono alcuna proposizione ereticale sono rimesse al regolamento di polizia (a. 3).

(46) *Doc. Austro Estensi* sez. I p. 130 — Bosellini, *Franc. IV e V*, cit. p. 131.

Nella materia *flagrans* dei delitti politici assai dura fu la prima proposta del duca, quale si legge nei foglietti autografi più volte ricordati (f. III), che dovessero tutti, dalle cospirazioni alle satire contro il principe, esser giudicati da tribunali militari secondo le regole di guerra e il codice militare. Negli anni seguenti si provvide con due editti speciali del 17 marzo 1853 e del 4 gennaio '54 (47), mantenute le commissioni straordinarie pei reati di lesa maestà e per tutti gli offensori dei pubblici funzionari: le sanzioni del codice sono molto severe ma, fatta ragione dei tempi, non feroci in alcun modo nè soggette a speciali arbitrii di giudici, secondo la lettera del codice, lo ripeto ancora una volta, e non secondo l' applicazione che possa esserne stata fatta, ed io non trovai tracce che il duca abbia fatto osservazioni e critiche al progetto presentato dalla commissione o ne abbia in alcun modo aggravate le proposte. Il duca insiste perchè si citi nel codice l' editto del '54 insieme col precedente che vi era allegato e confermato, *la qual legge non è una notizia storica ma una legge vigente .... e che probabilmente dovrà restare in vigore per lungo tempo, mentre ogni giorno di più ci persuadiamo della di lei necessità* (48). Il Palmieri oppone sommessamente (f. I, 5 IV '55) che in tal materia spetta al ministro di grazia e giustizia provvedere e se la cava con questo espediente, cosicchè nel corpo del codice non se ne fece parola e solo nel decreto di promulgazione l' editto fu citato e mantenuto in vigore, soprattutto per accontentare Francesco V, benchè in fatto apparisse quasi inutile per essere omai colpiti nel codice quasi tutti gli atti in esso considerati.

In questo titolo dei delitti di lesa maestà e d' alto tradimento sono compresi gli stessi delitti che si leggono negli altri codici italiani, copiata in particolare dal codice toscano la distinzione fra cospirazione e congiura ed applicandosi sempre la pena capitale pel secondo reato, in alcuni casi particolari anche nel primo. Qui è da notare che dove si parla (a. 119 § 2) di assassinio di qualche autorità pubblica in odio del sovrano o del suo governo, il duca aveva aggiunto in margine del progetto che si doveva considerare in odio del principe e del governo ogni assassinio anche di persone private per causa ignota e non provata, specialmente se la vittima fosse

(47) Collez. generale delle leggi per gli stati estensi XXXII p. 131 e XXXIII p. 3.
(48) Fasc. III, 17 IV '54: 1, 3, 31 III '55.

persona proba notoriamente affezionata al suo sovrano, ma egli stesso cancellò poi l'aggiunta e tale presunzione non fu accolta nè introdotta nel codice. Invece le speciali sanzioni per la ricettazione dolosa dei rei di maestà o tradimento, punita più gravemente che per altri delinquenti (a. 131, 229), furono stabilite dalla commissione per espresso desiderio del duca (f. III, 2 VI '55).

Anche per le società segrete l'azione personale di Francesco V fu secondata e forse in parte esagerata dalla commissione. Da una osservazione di lui è lecito dedurre che nel primo progetto si parlasse solo dell'obbligo di denunciare al Buon Governo ed ottener licenza di costituirsi per le associazioni superiori a venti persone (secondo le norme del codice francese, parmense, albertino): il duca notò che *venti galantuomini e più non faranno mai male, tre birboni lo ponno fare* (49), ed impose quindi siffatto obbligo a qualsiasi associazione, anche per accettare membri nuovi, come si legge appunto nel regolamento di polizia (a. 109). Quanto alle società segrete, egli prescrisse che nel codice si ricordassero le espressioni generali usate dal padre suo nel decreto del 1822 (50), *onde non resti un solo modo di cospirare che non possa avere la sua sanzione penale* (f. III, 17 IV 54), e la commissione legislativa ricorse subito all'imitazione d'un degno modello, trascrivendo letteralmente gli articoli del regolamento pontificio del 1832 (51), il primo dei quali stabilisce senz'altro il principio che ogni società segreta con o senza nome proprio si presume tendente a promuovere la ribellione contro il sovrano (a. 136). Anzi essa vi aggiunse pure una lieve estensione della pena capitale, la quale è comminata bensì nell'una e nell'altra legge per chi obbliga alcuno colla violenza ad aggregarsi a tali società e dà o riceve mandato pur gratuito di uccidere, ma nel solo codice estense anche per chi fonda o ripristina una società segreta (a. 140), mentre secondo il regolamento pontificio questi viene punito invece colla galera per vent'anni.

Nel codice estense, come negli altri italiani, si punisce — coi lavori forzati — chi non denuncia entro ventiquattr'ore i delitti di carattere politico di cui abbia notizia in qualsiasi modo, fatta solo eccezione per le persone legate ai colpevoli da stretti vincoli di pa-

(49) Fasc. III. Osservazioni numerate senza data.

(50) La citaz. ducale è forse errata, perchè nella Collezione generale si hanno solo due editti del 20 IX '20 e del 1 III '24.

(51) Fasc. III. Lettera 30 III '54 del Palmieri che fa esplicita dichiarazione dell'imitazione

rentela (a. 133, 134). Qui la commissione aveva proposto un'attenuazione (quale si legge pure nel codice austriaco, § 61), che la pena venisse esclusa nel caso in cui non fosse da temersi alcuna conseguenza perniciosa per l'omessa denuncia, ma il duca volle cancellata tale limitazione (52). Manca al contrario nella legge positiva, e la mancanza è degna d'esser rilevata, ogni dichiarazione intorno all'impunità o diminuzione di pena per i correi rivelatori nei delitti politici; il fatto apparisce singolare, mentre vi accennano le costituzioni estensi (53), vi provvedono esplicitamente i codici francese, napoletano, parmense, austriaco ed albertino (54), e tale impunità è ammessa negli editti di Francesco IV e V per la repressione degli incendi (§ 16) e nello stesso codice estense, come negli altri d'Italia fino al sardo del 1859, pei rivelatori di falsificazioni di monete, sigilli ed ordini ducali e cartelle di Stato (a. 287, 298). Anche qui non è da pensare che il silenzio del codice potesse reputarsi un ostacolo all'uso pratico dell'infame e pernicioso spediente di polizia e di istruttoria: piuttosto sarebbe lecito dubitare che i commissari abbiano seguito pur qui le tracce dei compilatori del progetto di codice italico 1807, i quali palesemente dichiarano di aver omesso ogni norma intorno a quell'impunità, per riservare piena libertà alla suprema saggezza del sovrano, quasi esplicazione del suo diritto di grazia quando *importi di conoscere e di punire* (tali delitti) *in alcuni se non in tutti coloro che li commisero* (55). E Francesco V forse tacque anch'egli, pensando che nessun codice gli avrebbe mai impedito nè di prometter l'impunità ai correi nè di negarla eventualmente dopo le rivelazioni, forse fu pur egli esitante intorno al principio di quella disposizione, poichè fra le sue osservazioni si legge: *Non saprei ancora se convenga nel codice assicurare tale impunità e tal premio al denunziante* (56).

Negli articoli che si riferiscono ai pubblici ufficiali il confronto con altri codici dimostra come siano stati omessi alcuni provvedimenti per frenare i loro abusi. Manca ogni accenno a pena speciale per la violazione di domicilio che possa compiersi da essi

(52) Osservaz. marginali al progetto; fasc. III, 27 XII '54.

(53) Costituz. modenesi 1771, IV 9, 5.

(54) Cod. franc. 108, napoletano 143, parm. 129, austr. § 62, albertino 209.

(55) *Collez. de' travagli pel codice pen.* cit. I, 207 e segg.

(56) Fasc. III. Osservaz. numerate senza data. Cfr. *Doc. Austro estensi,* loc. cit. sez. II, p. 177, ove si ha l'esempio pratico dell'impunità accordata nel 1858 ad un denunciatore.

(a. 241): dove si punisce l'arresto e la detenzione illegale (a. 235), furono aggiunte dalla mano ducale le parole ***non investito di legittima autorità*** che escludono l'applicazione di quell'articolo agli agenti della forza pubblica: nel titolo del rifiuto di servizio legalmente dovuto fu omesso l'articolo relativo al comandante di quella forza che legittimamente richiesto dall'autorità civile ricusi di far agire i suoi dipendenti secondo gli ordini di essa. È una prova manifesta quest'ultima di una condizione privilegiata in cui vien messa l'autorità militare e di polizia nel ducato, e probabilmente la norma fu senz'altro pretermessa dalla commissione, perchè sarebbe stata certo esposta al frego cancellatore della matita ducale.

Nel titolo del peculato il duca ebbe occasione di manifestare le sue idee pratiche lontane da ogni concetto giuridico. In alcuni codici a tale delitto si assegna una pena speciale determinata, e questo aveva proposto la commissione: in altri si prescrive l'applicazione delle pene stabilite pel furto qualificato: il duca impose ostinatamente che depositari e tesorieri pubblici colpevoli fossero parificati in modo esplicito ai ladri, *si avranno come rei di furto* (a. 179) (57). Il Palmieri insisteva opponendo che il furto e la prevaricazione coll'abuso del denaro pubblico erano delitti diversi e dovevano tenersi ben distinti, quando il colpevole avesse avuto l'intenzione e la possibilità economica di reintegrare la somma appropriatasi, e che, seppure circostanze avverse sopravvenute glielo avessero impedito, egli aveva diritto alla mitigazione della pena: il duca volle invece tener conto soltanto della fede pubblica offesa e violata ed impose che quei colpevoli dovessero sempre punirsi più gravemente dei semplici ladri, salvo nel caso in cui la sottrazione non eccedesse i limiti della cauzione e l'erario non ne avesse alcun danno (a 180, 181).

§ **XIV.** — Intorno alle altre specie di delitti è da notare che nelle osservazioni ducali numerate (f. III) la pena indicata dalla commissione è giudicata talora troppo mite, tal'altra troppo forte, anche se per la mancanza del preciso riferimento agli articoli del progetto non si può riconoscere a quale specie di reati si riferisca ogni annotazione.

Le proposte intorno al duello non piacquero al duca, il quale fece preparare dal ministro di grazia e giustizia un progetto alquanto

(57) Fasc. III, 10 X '54 fasc. II, 27 XI '54.

diverso nella forma, nelle distinzioni, nella misura delle pene, che venne poi inserito con lievi correzioni nel codice (58). Il duca desiderava che si lasciassero esenti da pena coloro che non si presentano o si ritirano senza combattere, conforme al § 165 del codice austriaco (f. II 27 XI 54), ma la commissione più rigorosa fissò una sanzione anche per coloro che venuti sul campo non danno principio alla pugna (Cod. a. 251), mentre la semplice sfida senza ritrovarsi nel campo fissato è contravvenzione rimessa al regolamento (a. 200). Invece gravissima pena fu minacciata secondo il pensiero del duca a padrini, testimoni e cooperatori, i quali non sono considerati complici, ma sono puniti come i duellanti, come il più colpevole dei due, in modo variabile secondo l'esito del duello, non esclusa neppure la morte (a. 257); notevole anche l'articolo contro il combattimento sleale (che manca in tutti gli altri codici, salvo il toscano, a. 346), nel quale il duello si punisce per omicidio o ferimento premeditato, quando siansi usati mezzi fraudolenti preparati prima della pugna (a. 256). Dal posto assegnato nel codice estense al titolo sul duello si può credere che la commissione l'abbia collocato piuttosto fra i reati attenenti alla cosa pubblica, che tra quelli contro i privati.

Degna di nota per mitezza la sanzione fissata in un punto assai controverso, per chi presta giuramento falso in materia civile. Essa viene ridotta alla sola indegnità di giurare e deferir giuramento, esser chiamato come perito o testimonio, a cui *potrà* esser aggiunto il carcere (come nel codice albertino), mentre il codice francese stabilisce la *dégradation civique* infamante che produce anche altri effetti più gravi, e gli altri codici italiani prescrivono pene afflittive della libertà, carcere e reclusione, nel codice austriaco fino al limite massimo a vita (a. 58).

§ XV. — Fra i delitti contro i privati s'incontra l'unica specie di reati che mancava nel primo progetto e fu veramente introdotta per volontà del duca (f. II, 6 IX 54) in omaggio alla grave condanna pronunciata contro di essa dalla religione, cioè il suicidio. Però il Palmieri aveva preparati alcuni articoli ispirati alle idee più arretrate e conformi in parte alle costituzioni estensi ed al codice albertino (59),

(58) F. II e III, 24 e 27 IX, 13 XI '54.

(59) Costituz. modenesi V 4, 34: cod. albertino 1839 a. 585 — F. II, 6 IX '54 col progetto autografo del Palmieri.

i quali comprendevano l'erezione della forca per affiggervi il cartello con tutti i dati relativi alla persona del suicida, la privazione degli onori funebri, ed il carcere sino alla massima durata per il solo tentativo; invece il ministro Scozia propose e fece accettare al duca la imitazione dell'unica norma contenuta nel regolamento pontificio del 1832 (a. 317), cioè la detenzione per chi si ferisce soltanto per un tempo non maggiore di tre anni e sotto speciale sorveglianza, con intento affatto diverso di espediente preventivo contro ogni ripetizione del triste proposito e non come sanzione penale (a. 413) (60).

Oggetto di ripetute annotazioni ducali fu l'infanticidio, poichè la commissione considerò tale figura di reato come degna di aggravamento di pena (a. 351) e la mantenne entro limiti assai ristretti, cioè solo quando fosse compiuto dalla madre sui bambini illegittimi, conforme al codice toscano. Il duca non voleva persuadersi in alcun modo, e il Palmieri vi riuscì a grande stento, che le restrizioni introdotte per quel particolare delitto non impedivano l'applicazione delle regole generali sull'omicidio e sul parricidio a difesa de' bambini legittimi e contro qualsiasi altro colpevole. Invece nell'articolo 332 che tratta della occultazione o sostituzione della prole, il duca impose assolutamente la cancellazione delle parole *soppressione d'infante*, le quali significavano a parer suo non già la privazione dello stato civile, come sosteneva il Palmieri, ma la soppressione materiale dell'essere vivente, dimostrando così maggior senso pratico dei suoi oppositori e dei compilatori ed interpreti degli altri codici (fino al nostro più recente, in cui venne introdotta una espressione molto più chiara all'a. 361) (61).

Per la bigamia il duca insiste perchè si aumenti la pena e si lagna che l'articolo sia stato ricopiato senza variazioni da un progetto all'altro, ma alla fine esso passò anche nel codice senz'alcun mutamento (a. 424). Invece nella punizione dell'incesto si aumentarono le sanzioni e si accolsero nuove distinzioni che mancavano nei primi progetti, secondo i vari gradi di parentela; però una di esse che era stata aggiunta di mano del duca, fra il seduttore e la sedotta, con qualche diminuzione di pena per questa, non fu accettata,

(60) Bayard de Volo, *op. cit.* II 53, tacitamente censura la mitezza del codice pel falso giuramento civile e pel suicidio.

(61) Codd. franc. a. 136, albert. 388, parm. 406, pontificio 165, toscano 270, austriaco §§ 199, 204.

e si mantenne anche nonostante qualche opposizione di lui la nuova regola dell' esclusione dell' azione pubblica, quando non vi sia stata violenza, imitata dalle Costituzioni estensi del 1771 (V 11, 8) allo scopo di aiutare le persone interessate a serbare il segreto in argomento tanto delicato per l' onore delle famiglie (62).

§ **XVI.** — Nel campo dei delitti patrimoniali è da ricordare primieramente che fu conservato il reato di usura in relazione alle disposizioni del cod. civile. Inoltre mentre i codd. parmense (a. 494) e sardo (a. 516) puniscono soltanto i recidivi quando l' atto usurario sia stato ripetuto tre volte, il codice estense punisce anche il colpevole d' un atto unico per la prima volta, sia che abbia riscosso un interesse superiore al legale od abbia indotto il debitore ad anticipare le rate di capitale o stipulato quei contratti che il codice penale e civile reputano usurari (a. 513 e segg.). E fra tutti i delitti minori il reato d' usura è il solo pel quale sia introdotta la prescrizione di trent' anni, quale è stabilita pei delitti più gravi puniti colla morte od a vita (a. 92 § 2).

Nella materia degli incendi, quantunque nel periodo di tempo fra il 1841 e il 49 gravissima sia stata la frequenza di essi e i duchi abbiano tentato di porvi riparo con severissime pene, premi crescenti ai denunciatori, giudizi statari (63), il codice è molto meno severo e non commina la morte se non quando nell' incendio siano veramente perite vittime umane, o quando il fuoco sia stato appiccato a palazzi reali o chiese (a. 520).

Intorno al fallimento il codice penale estense aggiunge alle norme comuni cogli altri codici una sanzione particolare pel creditore colpevole di qualsiasi collusione sia col fallito sia con altre persone. La pena del fallimento viene pur estesa secondo giustizia e ragione al privato non negoziante che dissipa il patrimonio con maliziosi inganni o l' aggrava di debiti eccessivi, in corrispondenza colle norme del cod. civile che si applicano ugualmente a tutti i falliti, siano o non siano commercianti (a. 343, 345).

§ **XVII.** — Debbono infine qui venir rilevate alcune deficienze ed una aggiunta che si riscontrano nel codice estense.

(62) Fasc. II, 20 I '55 Rispettose osservaz. — Annotazioni marginali del duca la progetto.

(63) Decr. 23 I 41, 12 XII '46, 15 IX '49. *Doc. Austro Estensi* cit. vol. I p. 42, 47, 65.

Mancano alcuni gruppi di norme che si leggono negli altri codici a tipo francese: quelle intorno alle associazioni di malfattori, agli oziosi, mendicanti, vagabondi, ai giuochi proibiti furono comprese nel regolamento di polizia (64), altre invece relative al commercio, arti e manifatture mancano sia nel codice che nel regolamento, e perciò non si provvede in alcun modo ad un argomento abbastanza rilevante, agli accordi e concerti fra compratori o venditori di lavoro, fra imprenditori od operai.

Invece il codice estense presenta un titolo *delle prove*, ultimo del terzo libro e separato da tutto il resto, dal quale non v'è traccia in alcun altro dei codici italiani. Notevole pel contenuto, poichè vi si danno regole intorno al valore materiale delle prove, cui provvede per la parte formale il codice di procedura criminale, e si ripristina interamente il principio delle prove legali, determinati precisamente i requisiti perchè possano far piena prova la confessione dell'imputato, le deposizioni dei testi, gli indizi concorrenti, la denuncia dei correi. Notevole per la forma, perchè la commissione trascrisse letteralmente alcuni articoli di una legge promulgata nella Repubblica italiana il 23 febbraio 1804 (65), e questo può esser nuovo indizio dello studio fatto da quella sui lavori pel codice penale italico, giacchè appunto il rapporto dei giureconsulti sul progetto da essi compilato e presentato al ministro Luosi fa menzione della legge 1804 e richiamò forse sopra di questa l'attenzione dei compilatori del codice estense (66). I quali introdussero poche modificazioni negli articoli copiati, surrogando la parola *imputato* all'altra *reo* e richiedendo che i correi denunciatori siano almeno in numero di tre, e vi intercalarono due articoli delle costituzioni estensi del 1771 sullo stesso argomento. L'identità apparisce manifesta nel confronto degli art. 551 § 2 e 554 del codice penale estense coi testi delle costituzioni lib. IV, tit. VI, 21, 29 e degli art. 542, 543-49, 550, 552, 553, 555 cogli art. 60, 61, 62, 63, 64, 65 della legge citata.

Questo titolo delle prove rappresenta dunque un regresso verso teorie anticamente prevalenti nel diritto processuale, non più accolte dagli altri legislatori italiani, quantunque vigenti sempre in fatto negli Stati estensi, dove le costituzioni rimesse in vigore nel 1814

(64) Regolam. di polizia a. 87 e segg. 96, 113, 117: cfr. *Doc. Austro Estensi* III sez. I, p. 130.

(65) Bollettino delle leggi della Repubblica italiana, III par. I, p. 106.

(66) *Collez. dei travagli nel cod. penale pel regno d' It.* I 136.

non avevano mutato i principii del diritto comune. Anzi quelle teorie erano state subito abbandonate nello stesso Regno d'Italia, poichè il regolamento organico della giustizia punitiva emanato da Napoleone nel 1806 e il codice di procedura penale promulgato dal vicerè Eugenio di Beauharnais nel 1807 concedono ai giudici piena libertà di decidere intorno al fatto ed alle prove di esso secondo la loro convinzione intima (67). Per il carattere strettamente giuridico di simile aggiunta nel cod. estense, essa deve essere attribuita interamente alla commissione, senzachè il duca vi abbia avuto parte alcuna: così pure il principio che la sola qualità di agenti della forza pubblica non infirma in alcun modo la loro capacità a testimoniare, se non sono soggetti ad alcun'altra eccezione legale, e che essi possano far piena prova quando siano in numero di tre concordi, si legge sia nelle costituzioni sia in parecchi editti e venne trascritto inalterato dalla commissione nel codice penale (68), mentre lo stesso duca, pur molto propenso ad elevare l'importanza ed i privilegi di tali persone, non era lontano da qualche dubbio in proposito, ed insistendo su quella norma accetta il requisito del numero (tre concordi) *per omaggio al vecchio pregiudizio e perchè forse in fatto meritano meno fede che altre persone* (69).

Quest' ultimo esempio viene a miglior conferma del giudizio già espresso, che forte fu senza dubbio l'azione personale del duca, in molte parti efficace, in altre mitigata dalla commissione e specialmente dal Palmieri, ma nel tempo stesso molte disposizioni, anche tra le più severe e censurabili, furono opera esclusiva e spontanea della commissione legislativa nominata dal duca certamente secondo la sua mente ed ad immagine sua.

(67) Regolam. organ. della giustizia punitiva 13 giugno 1806 art. 73 e Cod. proc. penale promulg. 8 settembre 1807 in *Coll. dei trav.* cit. vol. VI art. 300.

(68) Cfr. editto 15 IX '49 e 22 X '55 in *Doc. austro estensi I* p. 65, III sez. 1 p. 45, 69. Decr. di promulgaz. del cod. penale.

(69) Decr. 22 X '55 citato nella nota preced.

A. BÉGUINOT ed A. VACCARI

Secondo contributo alla Flora della Libia

con notizie sulle piante utili osservate

Nella presente memoria enumeriamo 172 specie provenienti da varie località della costa libica. Vi sono comprese piante raccolte dal secondo di noi dal Luglio al Dicembre dello scorso anno nella Marmarica (Tobruck e dintorni), nella Cirenaica (Derna e Bengasi) e nella Tripolitania p. d. (Tripoli, Homs, Misurata, Zuara e Penisola di Macabez), più alcune poche già raccolte nei precedenti mesi ma non ancora studiate ed elencate. Esse furono collezionate durante le brevi fermate della R. Nave-ospedale « Regina d'Italia » (in cui il secondo di noi era imbarcato in qualità di maggiore medico della R. Marina) nell'ultima fase della guerra per la conquista della Libia, durante i preliminari e subito dopo la conclusione della pace, che sanzionò a Losanna il definitivo possesso della nuova colonia alla madre patria. Vi includiamo pure una novantinadi specie raccolte dal dott. Francesco Béguinot, membro della Missione archeologica italiana, nei dintorni di Bengasi nella primavera del 1911. Piante rimaste nella casa della Missione fino all'ottobre dello scorso anno e miracolosamente scampate al saccheggio operato dai turco-arabi pochi giorni innanzi lo sbarco italiano in quella località. Perquanto i dintorni di Bengasi si possano considerare floristicamente abbastanza esplorati, tuttavia la piccola collezione conteneva qualche entità nuova o poco nota per il Bengasino e tutte un valore storico che il lettore vorrà ad esse riconoscere ed accordare. Più proficue riuscirono le ricerche fatte dal secondo di noi in località poco esplorate come Misrata, Homs, i dintorni di Zuara e Macabez e noi siamo lieti di portare altri dati a quelli consegnati nel nostro primocontributo che vide la luce alcuni mesi or sono (1).

(1) A. Béguinot ed A. Vaccari, *Contributo alla flora della Libia in base a piante raccolte dall'ottobre 1911 al luglio 1912*. Ministero degli Affari Esteri. Monografie e Rapporti coloniali. N. 16. Agosto 1912. Roma, Tip. Naz. di G. Bertero, 1912.

Dalla enumerazione da noi fatta in confronto con quanto è riportato nel lavoro riassuntivo sulla flora libica di Durand e Barratte (1) e con quello che i botanici italiani pubblicarono prima o dopo la stampa del nostro primo contributo (2), risultarono nuove e cioè non ancora segnalate per la Libia le seguenti entità:

Aristida ciliata Desf. di Macabez.

Bromus scoparius L. var. HUMILIS (Cav.) Lge di Bengasi.

Scilla obtusifolia Poir. var. *intermedia* (Guss.) di Derna.

Asparagus officinalis L. di Bengasi (coltivato).

Colchicum Ritchii R. Br. var. PUSILLUM Bég. et Vacc.

Emex spinosa L. var. PUSILLA Bég. et Vacc.

Amarantus gracilis Desf. di Tripoli (avventizio).

Mirabilis Jalapa L. di Derna (coltiv. e subspontanea).

Biscutella didyma L. var. OBOVATA (Desf.) di Bengasi.

Lathyrus Cicera L. var. ANGUSTIFOLIUS Rouy di Bengasi.

Statice delicatula De Gir. var. minor Bég. et Vacc. n. comb.; var. subrotundifolia Bég. et Vacc. di Derna.

Heliotropium curassavicum L. di Bengasi (avventizio).

Artemisia Herba-alba Asso var. LAXIFLORA Boiss.

Carlina lanata L. form. ACAULIS Bég. et Vacc. di Derna.

---

(1) E. DURAND et G. BARRATTE, *Florae Libycae Prodromus ou Catalogue raisonné des plantes de Tripolitaine etc.* Genève, 1910.

(2) Oltre le due note del primo di noi sulle *Romulea* e sulle *Ononis* della Libia (in « Bull., Soc. Bot. Ital., », p. 105 e 129) ed una nostra nota preliminare (Padova, 1912), videro la luce le seguenti:

1.° R. PAMPANINI, *Un manipolo di piante della Cirenaica* (in Bull. Soc. Bot. Ital., 1912, p. 115). E' un elenco di una settantina di specie raccolte attorno a Derna da M. Longa, sergente del battaglione « Edolo » del 5.° reggim. Alpini, nel quale, oltre a qualche varietà, compaiono nuove *Allium Longanum* Pamp. n. sp.; *Hibiscus geranioides* A. Cunn. var. *darnicus* Pamp. n. var.; *Vicia dasycarpa Ten.*, e *Stapelia europaea* Guss. (quest' ultima, come l'A. stesso ebbe poi a riconoscere, vi era già nota da un pezzo!).

2.° A. TROTTER, *Notizie sui « Terfàs » della Libia.*, (ibid., p. 139). Vi sono aggiunte due specie e cioè *Terfezia Claverevi* Chat. e T. *Metaxasi* Chat.

3.° Id., *Addizioni alla Flora Libica* (ibd., p. 193). Elenco di una cinquantina di specie raccolte dallo stesso A., nei dintorni di Tripoli e di Homs e delle quali sono da aggiungere al Prodromo di Durand e Barratte: *Koeleria Rohlfsii* Murb., *Pennisetum asperifolium* Kbb., f. *leviuscula* Hack., *Stipa barbata* Desf., *Asparagus albus L.*, *Helianthemum guttatum L.*, *Lonchophora Capiomontana* D. R ?, *Papaver glabrum* Koch! (= *P. Argemone* L. B. *glabrum* Koch od anche *P. dubium* L. B. *glabrum* Koch?), *Genista capitellata* Coss. var. *tunetana* Coss., *Robinia Pseudacacia* L., *Eucalyptus globulus* L. ?, *Ailanthus glandulosa* Desf., *Melia Azederach* L., *Nicotiana Tabacum* L., *Plantago squarrosa* Murr., *Atractylis humilis* L.: più alcune varietà tra le quali riconduciamo *Helianth. ellipticum* Pers. (di *H. Lippii* Pers).

4.° Id., *Mycetum Tripolitanorum pugillus* (in « Annales Mycologici » vol. X [1912], n. 5).

Sono da aggiungere alla Tripolitania p. d.: *Atriplex mollis* Desf., *Salsola longifolia* Forsk., *Noaea spinosissima* Moq. alla Cirenaica: *Polygonum aviculare* ed *Amaranthus retroflexus* L.; alla Marmarica: *Solanum nigrum*. L.

Fra i tipi stabiliti dal Viviani, oltre alcuni di quelli già riportati nel primo nostro contributo, ricordiamo *Hypecoum aequilobum* (uno dei pochi che abbiano resistito alla critica!) e *Thymus hirtus* corrispondente a *Salvia aegyptiaca* L. e fra quelli di recente creazione citiamo *Spergularia Munbiana* Pom., *Cyclamen Rohlfsianum* Asch., *Onosma cyrenaicum* Dur. et Barr., *Valerianella Petrovichii* Asch. ap. Rohlfs ed *Anthemis cyrenaica* Coss.: i quali ultimi quattro rappresentano, allo stato attuale delle conoscenze, interessanti endemismi della Cirenaica.

Le raccolte fatte dal secondo di noi durante i mesi estivo-autunnali e, quindi, in un epoca dell'anno in cui la nostra Libia fu poco percorsa ed esplorata dai botanici hanno un certo interesse dal punto di vista della fenologia dei periodi antesici e qui riassumiamo le osservazioni che avemmo occasione di compiere a tale riguardo.

Il primo fatto che ci ha colpito è che, alle fioriture tardive, il più cospicuo contributo è dato dalle alofite a qualunque gruppo si-

---

Vi sono elencate 36 specie delle quali due sole riportate nel Prodromo di Durand e Barratte e 10 proposte come nuove per la scienza, tutte raccolte dall' A., d. s.

5.° A. Nannizzi, *Contributo alla Flora della Libia. Piante della regione di Homs.* Siena, 1912. Elenco di 33 specie raccolte d. s. dall'ex-maresciallo dell'11.° Bersaglieri A. Andreucci e fra le quali 9 risultarono da aggiungere e di queste due fanerogame: *Centaurea sphaerocephala* L. e *Pennisetum longistylum* Hochst.

6.° E. Chiovenda, *Una piccola collezione di piante fatta in Libia da ufficiali combattenti nel R. Esercito* (in Ann. di Bot. di R. Pirotta, vol. XI, fasc. I [genn. 1913], p. 183). Elenco di 71 specie raccolte in vari punti della costa libica da Tripoli a Derna, tra le quali due varietà ed una sottospecie descritte come nuove e due addizioni e cioè *Fumana arabica* (L.) Boiss. [1867], o più esattamente: (L.) Spach in Ann. Sc. Nat. 2.ª ser., VI (1836), p. 359, e *Launaea resedifolia* (Boiss. sub *Zollikoferia*), la terza e cioè *Erodium glaucophyllum* Ait. essendo stato già da noi indicata nel primo nostro contributo (agosto 1912).

Nell' ultimo Bullettino della Società Botanica Italiana dello scorso anno (p. 313), S. Sommier ha comunicato l' importante scoperta della *Melitella pusilla* Somm., fatta dal professore A. Borzì a tre chilometri ad occid. di Derna; genere monotipico noto sin qui solo per Malta.

Tenendo presente che nel nostro primo contributo apportammo un incremento di 12 specie e nel presente (comprese le coltivate, naturalizzate ed avventizie) di 7, se ne può concludere che, nel primo anno di occupazione della Libia e quindi durante il periodo della guerra, i botanici italiani hanno accresciuto il patrimonio della Flora libica, oltre che di un cospicuo numero di varietà, di ben 86 entità specifiche, delle quali 13 descritte come nuove.

Non sarà superfluo avvertire che nel più volte citato Prodromo della Flora Libica di Durand e Barratte mancano alcune entità già indicate per la Libia dallo Spigai, Levi-Morenos e De-Toni, Baroni e Gasperini, i cui lavori non furono compulsati o solo in parte dai due botanici francesi.

stematico esse appartengono (Chenopodiacee, Tamaricacee, Zigofillacee, Plumbaginacee, Composte ecc.). Come si deduce dai dati sui periodi antesici consegnati nel citato Prodromo di Durand e Barratte, la massima parte delle piante di questa categoria od, iniziata in primavera, prolunga l'antesi in estate o dessa è estivo-autunnale proseguendo per qualche specie anche nel tardo autunno e nella prima parte dell'inverno.

Fioriture estivo-autunnali normali presentano, inoltre, le seguenti specie:

Scilla obtusifolia var. *intermedia* (isteranta); *Smilax aspera*; *Asparagus stipularis*; *Urginea maritima* (isteranta); *Pancratium maritimum*; *Colchicum Ritchii*; *Amarantus silvestris*, *retroflexus* e *caudatus*; *Acacia Farnesiana; Cyclamen Rohlfsianum* (isteranta); *Mirabilis Jalapa*; *Artemisia Herba-alba*; *Inula viscosa*; *Varthemia candicans.*

In questo elenco risulta il cospicuo numero delle Monocotiledoni (si tenga presente il % delle stesse rispetto alle Dicotiledoni) due delle quali sono isterante; isteranzia che investe anche una Dicotiledone (*Cyclamen*), queste e quelle con materiali di riserva immagazzinati in organi sotterranei.

Sinanzio fu descritto il *Colchicum Ritchii* e tale si rivela nei numerosi esemplari raccolti il 16 Novembre dello scorso anno sulle colline sabbiose di Henni: in qualche individuo, però, la fuoruscita del perigonio dalle foglie vaginiformi precede quella dei monofolli ed in parecchi altri il definitivo allungamento di questi avviene alcuni giorni dopo l'espansione del perigonio: negli individui depauperati raccolti il primo del mese dell'anno corrente sui colli aridi sopra Derna, perfettamente fioriferi, non vi è ancora traccia di foglie. Esse giacciono ancora sepolte in fondo della tasca vaginale e la loro fuoruscita deve verosimilmente aver luogo ad antesi avanzata o forseanche quando non vi è più alcuna traccia di perigonio. Ne deduciamo che il carattere è in fluttuazione.

I saggi di *Artemisia Herba-alba* raccolti a Derna a mezzo Ottobre erano ancora in boccio, in fiore quelli vegetanti a mezzo Novembre a Zuara e Macabez: secondo Durand e Barratte l'antesi della specie avverrebbe dal Settembre all'Aprile e nell'affine *A. campestris* L. (sin qui da noi non rinvenuta) dal Novembre all'Aprile. Willkomm e Lange indicano per la Spagna, per la prima, i mesi

di Settembre-Ottobre (1) e per la seconda, in Italia, sono di solito designati i mesi dal Luglio all' Ottobre. Esemplari di ***Artemisia Herba-alba*** raccolti a Derna a mezzo il Gennaio del corrente anno rivelano un' antesi avvenuta nel colmo dell' inverno. ***Acacia Farnesiana*** nel pieno culmine della fioritura vide il secondo di noi nell' Oasi di Tripoli il 6 Novembre ed è invernale anche secondo i due nominati botanici francesi. Vale quanto a dire che essa ha mantenuto il periodo antesico della sua patria d' origine, mentre un' altra specie del genere, l' ***A. dealbata***, sec. le interessanti ricerche del Brandis, trasportata dall' Australia, dove fioriva nell' Ottobre, in India ha, durante il periodo di un mezzo secolo, lentamente retrocesso sino a fiorire nel mese di Giugno.

Prolungamenti di antesi primaverili in estate ed estive in autunno e quindi relitti di stagione (oltre a parecchie alofite di cui sopra fu parola) presentano, in base al materiale a nostra disposizione e di confronto con i periodi antesici riportati dal Durand e Baratte, le seguenti entità:

	Periodi antesici secondo Durand e Barratte	Antesi da noi constatate	Osservazioni
Andropogon hirtus var. *pubescens*	IV - aut.	X	
Aristida ciliata	III - VI	XI	Secondo Batt. et Trab. *Fl. Alg.*
Pennisetum typhoideum	IV - V		
Cyperus rotundus	Quasi tutto l'anno	Fine di X	
Polygonum equisetiforme	»	XI	
Chenopodium murale.	»	XI	
Tunica compressa	V - VIII	X	
Malcolmia aegyptiaca	XII - VI	XI	
Helianthemum Lippii	III - VI	Fine di VIII	
Pituranthos tortuosus	III - IX	X	
Heliotropium curassavicum . . .	V - IX	Fine di VIII	Sec. Britt. e Br. *Fl. Un. St. of America*.
H. villosum.	III - VI	»	
Lycium europaeum	Quasi tutto l'anno	Fine di VIII	
Datura Stramonium	III - IX	»	
Ononis vaginalis	III - V	»	
O. angustissima	I - VII	XI	
Plantago crassifolia	III - VII	X	
Thymus capitatus	IV - VII	Fine di VIII	
Satureja incana	VI - IX	»	
Cressa cretica	III - XI	»	
Scabiosa arenaria	III - VI	»	

(1) Del ciclo fu pure descritto una *A. valentina* W. che, sec. Boissier (Fl. or., III, p. 365), sarebbe una forma serotina con antesi dal settembre al novembre. Vedansi i dati sistematici nell' elenco delle specie.

Da questo elenco, che ulteriori e più accurate esplorazioni sono per certo destinate ad aumentare, si ricava che la flora littoranea della Libia non è priva di piante, sec., la nomenclatura del Tomaschek, ***acrone***, in fiore cioè quasi tutto l'anno in parecchie generazioni successive, e di piante ***policrone*** a lenta e successiva fioritura dei vari rami di uno stesso individuo e dei vari fiori di uno stesso ramo e sono appunto queste due categorie, e specialmente la seconda, se il così detto « deserto » e cioè la steppa, nel culmine stesso dell'estate, non è del tutto destituito di fioriture. Di ***Malcolmia aegyptiaca*** gli individui perennanti raccolti a Zuara a mezzo novembre presentano, assieme a silique già da tempo mature, gli ultimi fiori dell'anno e quelli di Macabez, raccolti circa un mese dopo all'inizio dell'antesi ed appartenenti ad una pianta annuale (o più esattamente ad una pianta diventata sessualmente matura qualche mese dopo la germinazione!), iniziano in pieno inverno le fioriture precoci di cui ci siamo occupati nel primo nostro contributo. Alla morte succede la vita con una rapidità maggiore di altre plaghe più privilegiate del pianeta!

Nella piccola, ma interessante, collezione riunita nei dintorni di Bengasi da F. Béguinot ci ha sorpreso l'accentuato nanismo che investe la maggior parte delle piante di quella località. Lo dimostrano eloquentemente le dimensioni (minime e massime del fusto) presentate da oltre 30 specie che qui elenchiamo:

	Minime cm.	Massime cm.
Lamarckia aurea	3 1/2	—
Bromus scoparius var. *humilis*	20	—
Sclerochloa memphitica var. *dichotoma*	5	17
Phalaris minor var. *gracilis*	12	28
Lagurus ovatus	7	14
Cyperus aegyptiacus var. *nanus*	7	—
Silene colorata var. *Olivieriana*	8	12
Adonis microcarpa	3	10
Matthiola humilis var. *cyrenaica*	2	7
Rumex bucephalophorus	2	8
Polygonum maritimum	6	7
Emex spinosa var. *pusilla*	2	5

	Minime cm.	Massime cm.
Cakile maritima var. *aegyptiaca*	7	10
Sisymbrium Irio	7	16
Enarthrocarpus strangulatus	3	4
Papaver hybridum	7	14
Hypecoum aequilobum	3	15
Biscutella didyma var.	3	10
Lathyrus Aphaca	8	20
L. Cicera var. *angustifolius*	5	11
Linum decumbens	6	10
Lotus pusillus	3	7
Reseda propinqua	3	6
Mercurialis annua	10	15
Linaria triphylla	3	9
Anchusa aggregata	5	10
Plantago Lagopus	5	6
Galium Vaillantia	2	15
Valerianella Petrovichii	2 1/2	5
Calendula aegyptiaca var.	2	20
Asteriscus spinosus	6	—
Senecio coronopifolius	5	—
S. gallicus var. *laxiflorus*	4	10
Matricharia aurea	4 1/2	5 1/2
Chrysanthemum coronarium	7	12
Anacyclus alexandrinus	1	7

Gli aggettivi di « nanus, gracilis, humilis, pusillus ecc. » applicati ad alcune delle varietà e talvolta a delle specie (***Lotus pusillus*** Viv., ***Matthiola humilis*** DC. *ecc.*) esprimono in maniera eloquente questo stato di riduzione somatica e di denutrizione fisiologica. Al quale, come il primo di noi ha esaurientemente dimostrato per i rami di alcune ***Plantago*** (1), non di rado si accompagnano, specialmente nell' apparato fogliare, fenomeni di semplificazione e di giovanilismo, contraddistinti con i nomi di pedocarpia o neocarpia. Così le forme più ridotte di ***Cakile aegyptiaca*** sono integrifogliari; tutte

(1) A. Béguinot, *Il nanismo nel genere « Plantago » e le sue cause.* Nuov. Giorn. Bot. Ital., n. ser., vol. XV (1908), p. 205.

intere, comprese le foglie fiorali, sono quelle di ***Valerianella Petrovichii***; brattee più sviluppate del solito e ben distinte dal feltro dei peli, presenta ***Plantago Lagopus***; difilli e non trifilli in corrispondenza di ciascun nodo sono i nani di ***Linaria triphylla***; affatto identiche alle primordiali sono le foglie adulte della var. ***pusilla*** (fusto di 2-5 cm.), di ***Emex spinosa*** ecc. Facciamo, inoltre, osservare che la var. ***Olivieriana*** è una forma stenofilla di ***Silene colorata*** (ridotta nei nani a 2 soli fiori!), e che stenofillo è la var. ***angustifolius*** di ***Lathyrus Cicera*** per probabile perpetuazione di caratteristica giovanile e quindi per arresto dell'apparato fogliare nel tipo primordiale (diciamo, probabile, perchè sin qui non ci fu dato di seguire in coltura la successione fogliare). Nonostante il nanismo, netta eteroblastia, quasi come negli individui normali, presentano ***Senecio gallicus*** e ***coronopifolius***, ***Reseda propinqua***, ***Chrysanthemum coronarium***, ***Adonis microcarpus***, ***Matthiola humilis***, ***Papaver hybridum*** ecc. Istruttivi esempi di basianzia (rizocefalia) offrono gli individui di ***Anacyclus alexandrinus*** di Bengasi, qualunque il loro sviluppo, ma nei nani il fenomeno si rende più evidente, tutta l' infiorescenza essendo ridotta ad un solo capolino sessile. In ***Plantago notata***, pure di questa provenienza, alcune spighe sono del tutto sessili ed altrettanto ha luogo in forme ridotte di ***Trifolium tomentosum***. Quasi affatto acauli sono gli individui di ***Carlina lanata*** raccolti presso Derna. Dei tre esemplari comunicati al primo di noi, uno è monocefalo, due pluricefali e cioè con una calatide centrale sessile ed altre laterali brevissimamente peduncolate. Nel primo caso l'allungamento dell'asse principale (ed unico) conduce a ***C. Pola*** Hacq. Pl. rar. Carn. p. 16, tab. IV (= ***C lanata*** β ***monocephala*** DC. Prodr. VI, pagina 546), quello degli assi secondari, restando sessile il capolino centrale, a ***C. lanata*** γ ***prolifera***, DC. op. c., quale è intesa da alcuni botanici. Il primo di noi vide nell'Erb. Centrale di Firenze esemplari, esattamente corrispondenti a quelli di Derna, dell' isola di Lampedusa (leg. Aiuti 30, IV, 1873). In saggi di Gullma (leg. E. G. Paris, It. bor.-afric. n. 462), uno è perfettamente acaule e corrisponde alla nostra var. *acaulis*, due alla var. *prolifera*. Trattasi, quindi, di stadi diversi di basianzia, estrinsecantesi in piante viventi, come deduciamo dalle etichette, in terreni molto aridi: carattere in fluttuazione nella specie, ma che tende a fissarsi e quindi può essere trasmesso nel seguito delle generazioni in altre note specie del

genere (*C. gummifera*, *C. Fontanesii*, *C. acanthifolia*, *C. acaulis* ecc.). In quest'ultima, come è ben risaputo, il tipo è sabacaule, ma nel ciclo della stessa è ricondotta la *C. alpina Jacq* (= C. caulescens Lam!) a fusto più o meno sviluppato e la *C. aggregata* W. con un capolino centrale sessile ed altri laterali più o meno lungamente peduncolati.

Sulla durata della vita, oltre quanto abbiamo già esposto nel nostro primo contributo, ci preme qui di fare rilevare come la flora estivo-autunnale sia improntata a piante perenni e perennanti e la forte percentuale delle perenni rispetto alle annue nelle piante alofite (alcune delle quali suffruticose o, come nei *Tamarix*, arboree) a qualunque gruppo sistematico appartengano.

In base al materiale da noi raccolto ed ai dati consegnati nel Prodromo di Durand e Barratte, si ricava che tutte le Chenopodiacee, più o meno alofile, sono perenni, fatta eccezione di due *Atriplex*, di *Salicornia herbacea* e di *Salsola Kali* (quella spesso crescente nello stesso *habitat* dell' affine e perenne *Salic. fruticosa*, questa notoriamente alofilo-psammofila), tutte le Zigofillacee, fatta eccezione di *Tribulus terrestris* (che, del resto, è una psammofila) e di *Zigophyllum simplex*, tutti i *Limoniastrum* e le *Statice* e quanto ha carattere alofitico nei gen. *Plantago* (*Pl. crassifolia*), *Sonchus* (*S. maritimus*), *Inula* (*I. crithmoides*), *Juncus* (*J. acutus* e *J. maritimus*). L' asserzione di qualche botanico (Masclef, Warming ecc.). che nelle alofite l' annualità e, quindi, il monocarpismo ha una larga estrinsecazione dipende, a nostro modo di vedere, dall'avere confuso le alofilo-psammofile con le alofilo-igrofile. La predominante perennità di queste ultime fa strano contrasto quando si comparano, ad esempio, le Chenopodiacee di tipo alomorfo con le ruderali-nitrofile (*Chenopodium polyspermum, Vulvaria, hybridum, glaucum, album, Cycloloma, Polycnemum* ecc., e dicasi altrettanto della massima parte delle più caratteristiche nitrofile. Il che vuol dire che fra le due categorie di piante, ambedue viventi in terreni con soluzioni saline molto concentrate e che innegabilmente offrono qualche carattere di adattamento in comune, devono intercedere differenze strutturali e fisiologiche, di cui la diversa durata della vità è indice eloquente!

Il materiale di *Malcolmia aegyptiaca* da noi raccolto è un esempio, tra i molti che potremmo citare, della grande adattibilità delle piante subdesertiche o steppiche alle varie e variabili contingenze

del mezzo. Sulla durata della vita della pianta crescente nel deserto egiziano il De Visiani (1) ebbe già a scrivere: « In speciminibus junioribus radix videtur annua, caules herbacei, in aliis radix perennans, caulesque basi lignescentes ». Ed aggiunge: « Probabile tamen est plantam hanc natura sua (sic!) annuam esse: perennare autem in Aegypti desertis ob arenosam soli indolem qua fit ut radices longe lateque vagari cogantur ut aliquem humorem hauriant, et caules basi ariditate loci lignescant, quod etiam in aliis pluribus Aegypti plantis videre est, quae loco natali ob dictas causas perennes, cultura annuae ».

Lasciando impregiudicata la *causa* invocata dal De Visiani per spiegare il fatto, la *condizione* del fatto e cioè l'influenza dei suoli arenosi subdesertici nel trasformare una pianta annua in perenne, se veramente esistesse, avrebbe dovuto condurre ad una preponderante perennità nella flora degli stessi. Ciò che non sembra verificarsi nella cintura stepposa predesertica beneficata da pioggie invernali, ma solo nel genuino deserto, qualunque sia il suolo (*hammade*, *edeyen* ecc.), ed in coincidenza di condizioni climatiche estreme. Checchè sia di ciò, a noi qui preme di fare osservare che gli esemplari in fioritura avanzata raccolti sulla metà di Novembre presso Zuara appartengono ad una pianta a caudice legnoso, suffruticoso, senza alcun dubbio perenne (e che perciò ha attraversato per lo meno un paio di anni di vita resistendo, in tale congettura, a due inverni, due primavere e due estati!) e quelli di Macabez ad una pianta a radice annua appartenente ad una generazione autunnale già sessualmente matura attorno alla metà del Decembre e forse destinata anch'essa alla perennità, in condizioni del mezzo che ci restano perfettamente ignote. Qui aggiungiamo che, a spese del tipo stabilito dallo Sprengel, furono fondate due entità, *Matthiola linearis* Del. e *M. diffusa* Decsne, ricondotte a varietà di quello dai botanici recenti (2). La prima fu descritta e figurata come annua, la seconda è detta *spesso* perenne: quale parte avrà l'oscillante durata della vita nella determinazione dei caratteri delle due forme?

Fra i fatti biologici su cui richiamiamo l'attenzione dei botanici, qui citiamo la frequente disarticolazione cui vanno soggetti i

(1) R. De Visiani, *Plantae quaedam Aegypti ac Nubiae* ecc. Patavii, 1836, p. 25.
(2) Cfr. Muschler, *A manual Flora of Egypt*, vol. I (1912), p. 404.

fusti ed i rami di molte piante subdesertiche: donde il nome di « articulatae » col quale i sistematici hanno designato queste specie.

Nel materiale da noi raccolto lo abbiamo constatato in ***Anabasis articulata***, ***Halocnemum strobilaceum***, ***Salicornia fruticosa***, ***Statice pruinosa*** (tutte alofile), in ***Ephedra Alte***, ***Pithuranthos tortuosus*** ed ***Asparagus stipularis.*** Ma l' artropodismo (1) esiste anche più o meno accentuato in altre ***Ephedra***, in ***Haloxylon articulatum***, ***Tamarix articulata*** (queste due ultime tipiche alofite) ecc. A proposito dell' ***Anabasis***, il Massart (2) affaccia l'opinione che la disarticolazione dei rami adulti sia un mezzo escogitato dalla pianta per sbarazzarsi dall' eccesso di sali minerali che ha immagazzinato. Per quanto le alofite giungano ad assorbire, come è ben risaputo, una forte dose di sali, tuttavia è probabile che giunga un momento nel quale i sali introdotti si concentrino a tale grado da ostacolare il normale funzionamento dell' organismo e specialmente l'assimilazione clorofilliana. Donde l' emigrazione di questo materiale verso i vecchi fusti sul punto di disarticolarsi e donde una causa del loro abbandono. Causa probabile del fenomeno, che noi stimiamo prudente sia ulteriormente studiato ed approfondito ben sapendo quanto in fatto di biologia sia più facile il teleologizzare che il dimostrare!

L' elenco esposto nelle pagine seguenti contiene parecchi documenti fitogeografici. Sotto un certo punto di vista, due fra i più importanti sembrano a noi essere *Globularia Alypum* e *Gl. arabica.*

La prima entità era stata indicata per la Cirenaica dal Viviani e recentemente vi fu raccolta dal Taubert, ma queste indicazioni furono revocate in dubbio da Durand e Barratte. Il confronto della pianta crescente a Derna con quella già dal secondo di noi raccolta a Tobruk ci ha convinto che in Libia vi sono due entità perfettamente ben caratterizzate (per quanto molto affini) del genere, la prima corrispondente a *Gl. Alypum* e la seconda a *Gl. arabica,* constatata sin qui in Egitto ed Arabia, e di cui Béguinot vide nell' Erbario centrale di Firenze ricco materiale dei dintorni di Alessandria d' Egitto, di Mariotis, di Suez e dell' Arabia Petrea (regione

(1) Nome escogitato dal Delpino per designare la disarticolazione del peduncolo fiorale verso la sua metà in molte monocotiledoni. (Cfr. *Aggiunte alla teoria della classificazione delle Monocotiledoni* in « Mem. R. Accad. Sc. Ist. di Bologna, ser. 5ª, tom. X »).

(2) Massart, *Un voyage botanique au Sahara* in « Bull. Soc. R. de Bot. de Belgique », XXXVII (1898), p. 222.

del Sinai, Tebaide inferiore ecc.). Le due entità presentano nell'Africa del Nord netta area di esclusione (1), la prima, da quanto ci è noto, giungendo sino al massiccio cirenaico, la seconda non spingendosi oltre la Marmarica già turca attraverso stazioni intermediarie nella Marmarica egiziana (Muschler *Fl. Egypt*, II, p. 90) e possono essere interpretati quali indici di due correnti di emigrazione da almeno due diverse direzioni. E poichè *G. arabica* manca nei territori dell'opposta sponda, se ne può concludere che essa nella sua espansione ha seguito, come verosimilmente molte altre specie di origine orientale, una via di terra, nè è da escludere che in seguito si possa riscontrare anche nell' Altipiano di Barca.

Le esplorazioni fatte durante lo scorso anno dai botanici in Libia hanno condotto, oltre che ad incrementare l' inventario delle specie indigene, anche alla scoperta di piante sfuggite alla coltura (intensiva od occasionale) o fortuitamente introdotte (le così dette avventizie). Nella presente memoria ne elenchiamo quattro e cioè *Asparagusofficinalis, Mirabilis Jalapa, Amarantus gracilis* ed *Heliotropium curassavicum.* Crediamo opportuno dare un breve cenno di quest' ultima, che ci sembra la più interessante, anche perchè fu rinvenuta in due località che hanno tutti i caratteri di stazione naturale e, cioè, gli stagni salati presso la Punta Giuliana e Sidi Daud nel Bengasino. Essa fu scoperta, come esprime il nome, in un' isola delle Indie occidentali, ma cresce nelle « sandy seashores » e nel « dry saline soil » (1), lungo le coste dell' America boreale e centrale e qua e là nell' interno, non che nell' America del Sud e, naturalizzata, nell' Asia tropicale, nell' Australia, nell'Africa del Sud (ne vedemmo saggi del Capo di Buona Speranza!), avventizia in parecchi punti delle coste mediterranee (nell'Erb. centrale ed in quello Webb ne esistono saggi dell' isola di S. Lucia presso Narbona, di Montpellier, Cette, delle foci del Rodano a Port-de-Buc presso Martigues e dell' isola di Minorca). In Italia fu segnalato, pure come avventizio, nell' isola di S. Pietro presso la Sardegna (Cavara) ed a Trieste? (Thellung). Nell' Africa

(1) Qui avvertiamo che in Algeria si sono differenziate, a spese di *Glob. Alypum*, due piccole specie o sottospecie e cioè *Gl. vesceritensis* Batt. et Trab. e *Gl. eriocephala* Pom., la quale secondo Wettstein (*Globulariaceen-Studien*, in « Bull. Herb. Boiss., III, [1895] », considera alla stessa stregua di *Gl. arabica*, ma della quale non ci fu possibile esaminare sin qui alcun esemplare.

(1) Brittona Brown, *An illustraded Flora of the Northern United States, Canada a British Possesions*, etc., vol. III (1898), p. 52.

boreale la prima indicazione, per quanto ci consta, fu data per l'Algeria da Desfontaines (*Fl. Atl.*, I, p. 153), ed in seguito fu segnalato nel Marocco e nell' Africa tropicale (Thiselton-Dyer, *Fl. Trop. Afr.*, IV, 2, p. 35), nella Bassa Guinea, nel distretto di Mozambico ed a Chiloane nell'Est-Africa. Secondo il Planchon (1), essa sarebbe stata introdotta nella Francia merid. nella prima metà del secolo XIX con le zavorre delle navi, ma il Thellung (2), in considerazione che essa fu coltivata sin dal sec. XVIII nell'Orto botanico di Montpellier, non esclude che sia sfuggita da questo luogo. Certamente noi non prescindiamo da queste due possibilità, ma tenendo presente la sua vasta e frammentaria area e l'*habitat* della specie, i cui frutti possono cadere in preda alle correnti marine, non ci sentiamo del tutto di escludere la possibilità del trasporto a mezzo delle stesse, esprimendo l' augurio che ricerche sul galleggiamento e resistenza alla salsedine dei frutti, mettano in chiaro se tale nostra congettura abbia o no fondamento.

* * *

A queste brevi notizie facciamo seguire l'elenco delle specie avvertendo che sono precedute dall' * quelle non elencate nel nostro primo contributo e che invariato resta l' ordinamento sistematico. Sono precedute pure dall' * le località del tutto nuove per specie già note per la Libia, l' iniziale: V. designando le entità raccolte da A. Vaccari e l' iniziale: B. quelle collezionate da F. Béguinot.

1. *Adiantum Capillus Veneris* L. — Cir.: Derna frequente sulle rupi ombrose lungo l'*uadi* omonimo (29, VIII, 1912: V).

* 2. *Ephedra Alte* C. A. Mey. — Cir.: Derna sui colli calcarei presso la « Ridotta Lombardia » a c. 200 m. (I, XI, 1912: V.).

3. *Imperata cylindrica* (L.) P. B. — Trip.: * Misurata nelle dune marittime a Bu Sceifa (15 X 1912 : V.).

4. *Andropogon hirtus* L. var. *pubescens* (Vis.) Vis.: — Trip.: * Homs lungo la via del Mergheb (14, X, 1912 : V.).

* 5. *Pennisetum asperifolium* (Desf.) Kth. — Trip.: * Homs nelle arene marittime presso le rovine di Lebda (30, V, 1912 : V.). Questa

(1) Planchon, *Des modifications de la Flore de Montpellier depuis le XVI siècle jusqu' à nos jours.* Paris, ecc., 1864, p. 44.

(2) Thellung, *La Flore adventice de Montpellier.* Cherbourg, 1912, p. 418.

specie fu segnalata la prima volta per la Libia del Trotter (in « Bull. Soc. Ital., 1912 », p. 196) e precisamente per la sommità del M. Mergheb in una forma *leviuscula* Hack. vergente a *P. orientale* (sec. Hackel). La nostra stazione dimostra che essa vegeta anche in prossimità della spiaggia.

* 6. *P. dichotomum* (Forsk) Del. — Trip.: * Misrata nelle dune marittime a Ras Zurug (6, VII, 1912 : V.) — Nota solo per il Fezzan e vicini territori, è la prima volta che si raccoglie in Libia in vicinanza del mare.

7. *P. typhoideum* Rich. ap. Pers. — Coltivato di frequente e spesso inselvatichito nell' Oasi di Derna (19, XI, 1912 : V.), visto anche nell' oasi di Tripoli.

8. *Phalaris minor* Retz. var. *gracilis* (Parl.) Parl. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

* 9. *Aristida ciliata* Desf. — Trip.: * Penisola di Macabez nelle arene marittime (14, XI, 1912: V.). Specie nuova per la Libia!

10. *Lamarckia aurea* (L.) Moench. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

11. *Sphenopus divaricatus* (Gouan) Rchb. — Marm.: Tobruk costa nord presso lo stagno salso (V.).

12. *Aeluropus repens* (Desf.) — Trip.: * Misrata a Bu Sceifa presso la *sebchka* (12, IX, 1912 : V.). Specie, come ci ha convinto l' esame del ricco materiale conservato nell' Erb. centrale, alquanto polimorfa. Gli esemplari di Misrata differiscono da quelli dei dintorni di Tobruk per le foglie a lamina più breve, rigida, fortemente convolta, patenti e per i culmi fogliosi fin sotto la spiga, che appare sessile; ma crediamo trattarsi di variazioni individuali forse in rapporto a condizioni edafiche e stagionali.

* 13. *Lagurus ovatus* L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.)

14. *Sclerochloa memphytica* Nym. var *dichotoma* Bonn. ap. Bonn. et Barr. — Cir.: dintorni di Bengasi (Prim. 1912 : B.) ed ai pozzi di El Sabri (30, III, 1912:); Marm.: Tobruk (18, III, 1912: V.) — già segnalata nel nostro primo contributo come raccolta quivi nel Febbraio.

15. *Bromus madritensis* L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

16. *Br. rubens* L. α *typicus*: Ibid. (Prim. 1911: B.); var. *canescens* (Viv.) Coss.: Derna (18, IV, 1912: V.).

* 17. ***Br. scoparius*** L. var. ***humilis*** Lge = ***Br. humilis*** Cav. Ic. et descr. pl. VI, (1801), p. 65, tab. 589, f. 2 = ***Br. Cavanillesii*** Wk. in W. et Lge. Prodr. Fl. Hisp. I, (1861), p. 101. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.). La varietà, che riesce nuova per la Libia, dagli A. della Flora di Spagna è per lo più ritenuta quale specie: è, invece, sinonimizzata da Ascherson e Graebner (*Syn. Mitelleur.-Flora*, II, 1, p. 625), che scrivono, che essa « unterscheidet sich durch nichts von Typus der Art. ».

Gli esemplari libici corrispondono perfettamente a quelli di Algeciras (leg. Winkler: *Reise durch das südl. Spanien 1873*), e si distinguono dalla specie linneana per il minore sviluppo della pianta, per la infiorescenza più breve e più densa, per le spighette lanceolato-lineari più anguste e glabre. Si tratta, quindi, di un caso molto interessante di nanismo, cui solo ulteriori ricerche e confronti in posto ed indagini culturali potranno fare ulteriore luce.

18. ***Aegilops bicornis*** Jaub. et Spach. — Bengasi ad El Sabri (31, III, 1912, V.). Raccolta pure nel marzo a Tobruk, donde era stata da noi indicata nel Febbraio nel nostro primo nostro contrtbuto.

19. ***Brachypodium distachyum*** P. B. — Cir.: Derna (18, IV, 1912: V.).

20. ***Hordeum murinum*** L. — Dintorni di Bengasi (Prim., 1911: B).

21. ***Cyperus aegyptiacus*** Glox. var. ***parvulus*** Parl. Ibid. (Prim. 1911: B.). La var. è nuova per la Cirenaica.

* 22. ***C. rotundus*** L. — Cir.: Derna lungo l'*uadi* presso la foce (31, X, 1912: V.).

23. ***Triglochin Barrelieri*** Lois. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.): già da noi indicato nel primo contributo di El Sabri.

* 24. ***Juncus maritimus*** Lam. — Marm.: Tobruck nei luoghi paludosi marittimi (28, VIII, 1912: V.).

* 25. ***Scilla obtusifolia*** Poir. var. ***intermedia*** Guss. (pr. sp.) — Cir.: Derna frequente pei colli calcari aridi presso la « ridotta segnale », sulla riva sinistra dell' Humboch (9, XI, 1912: V.). Specie nuova per tutta la Libia.

26. ***Urginea maritima*** (L.) Bak. — Trip.: * Homs nelle arene marittime alla foce dell'*uadi* Lebda (7, VII, 1912: V.).

27. ***Allium roseum*** L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

* 28. ***Ornithogalum tenuiflorum*** Guss. var. ***trichophyllum*** (Boiss. et Heldr.) Boiss. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

* 29. *Smilax aspera* L. — Cir.: Derna sulle colline calcaree all' est della città (17, X, 1912: V.).

* 30. *Asparagus officinalis* L. — Bengasi coltivato nel giardino dei P. Giuseppini al Foiad (Prim. 1911: B.). Non è elencato nel Prodromo di Durand e Barratte nemmeno come pianta coltivata.

* 31. *A. stipularis* Forsk. — Marm.: Tobruk (28, VIII, 1912: V.). Esemplari sterili ma per la lunghezza e robustezza dei cladodi (Cfr. la tav. 339 della *Flora graeca* di Sibthorp e Smith sotto il nome di *A. horridus*) affatto corrispondente alla specie Forskaliana. Pure a Tobruk nel Giugno dello scorso anno fu raccolto, sterile, un *Asparagus* a cladodi fascicolati che, nel nostro primo contributo, abbiamo interpretato, sebbene con dubbio, per *A. aphyllus*, (cfr. la tav. 338 della *Flora graeca* s. c.,). Sulle colline ad est della città di Derna, Vaccari raccolse (17, X, 1912), individui in frutto di un *Asparagus* pure a cladodi isolati, ma più corti del tipo e che interpretiamo per la var. *brachyclados* Boiss. Insorge il dubbio che si tratti di una forma intermedia, tanto più che il carattere dei cladodi isolati o fascicolati, come deduciamo da saggi raccolti dal secondo di noi a Stampalia (isolotto Glino Nisi), sembra fluttuante. Boissier (*Fl. or.* V, p. 338) scrive che la fioritura di *A. stipularis* è primaverile e quella di *A. aphyllus* autunnale, ma gli esemplari in frutto di Derna lasciano supporre una antesi autunnale anche per quello e Durand e Barratte (*Prodr.* p. 238) assegnano i mesi di Settembre-Ottobre!

32. *Erythrostictus punctatus* Schlecht. — Dintorni di Bengasi, (Prim. 1911: B.).

33. *Colchicum Ritchii* R. Br. — Trip.: Tripoli nelle colline sabbiose ad Henni (16, XI, 1912: V.) e Zuara nelle colline sabbiose aride fra Abd-el-Samad e Regdaline (15, XI, 1912: V.). Gli esemplari in questione corrispondono a quelli raccolti nel Nov. 1912, pure ad Henni: se ne allontanano, invece, i saggi raccolti l' 1 novembre 1912 sui colli aridi calcarei sotto la ridotta «Calabria» a circa 200 m. di cui facciamo una var. *pusillum* Nob. caratterizzata per essere uni-biflora, leggermente isteranta, stenofilla, con perigonio più breve ed a tepali più stretti: caratteri di convergenza alle forme stenofille di *C. Cupani* Guss. da cui appena si distingue (cfr. il n. 594 di Ross *Herbarium siculum!*). È bensì vero che le foglie della pianta libica sono leggermente scabre al margine e quelle degli esemplari citati sono liscie, ma, a dedurre dalla diagnosi, anche tale carattere sarebbe fluttuante nella pianta sicula.

34. ***Pancratium maritimum*** L. — Trip.: * Homs nelle arene marittime lungo l' *uadi* Lebda (26, VII, 1912: V.). Esemplari in fiore: (già da noi citato di questo luogo in base a saggi con sole foglie); * Misrata presso Ras Zurug (27, XI, 1912).

* 35. ***Gladiolus segetum*** Ker-Gawl. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

* 36. ***Urtica urens*** L. — D. s.

37. ***Emex spinosa*** (L). Campb. — D. s. Col tipo nei luoghi arenosi più aridi cresce una var. *pusilla* Bég. et Vacc. in esemplari alti 2-5 cm., con fusto semplice e con foglie adulte tutt' affatto simili alle primordiali. È uno dei tanti casi di nanismo così frequente nella vegetazione del Bengasino!

38. ***Rumex tingitanus*** L. var. *lacerus* Boiss. — Tripoli al Cimitero Rabab fra Sciara Sciat ed Henni (22, III, 1912: V.). Già da noi ricordato di Henni in base a saggi raccolti il 20 Gennaio.

* 49. ***R. bucephalophorus*** L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

40. ***Polygonum aviculare*** L. — D. s. Non ancora segnalato per la Cirenaica.

* 41. ***P. maritimum*** L. — D. s. nelle arene marine (Prim. 1911: B.).

42. ***P. equisetiforme*** S. et Sm. — Trip.: * Zuara nelle dune sabbiose fra Abd-el-Samad e l' Oasi di Regdaline (15, XI, 1912: V.). Già ricordato nel nostro primo contributo per la Penisola di Macabez.

* 43. ***Amarantus retroflexus*** L. — Cir.: Derna lungo l' *uadi* (29, VIII, 1912: V.). Nuovo per la Cirenaica!

* 44. ***A. silvestris*** Desf. — Cir.: Derna ad occid. della città (19, XI, 1912).

* 45. *A gracilis* Desf. Tabl. éc. bot., p. 43 (1804) = *Chenopodium caudatum* Jacq. Coll. II, p. 235 (1788) et Ic. pl. rar. II, p. 12, t. 344 (1786-93) — non *A. caudatus* L.! = *Euxolus* Moq. in DC. Prodr. XIII, 2, p. 274 (1849). Cfr. quoad alia synon.: Thellung, Fl. adv. de Montpellier, p. 216 (1912). — Oasi di Tripoli lungo le vie presso Henni (16, XI, 1912). Pianta originaria delle regioni intertropicali dell' America, dell' Africa e delle Indie orientali, certamente avventizia in Libia, dove non fu sin qui constatata.

46. ***Beta vulgaris*** L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

47. *Chenopodium murale* L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B) ed a Derna lungo le vie (1, XI, 1912: V.).

48. *Atriplex mollis* Desf. — Marm.: Tobruk (29, VIII, 1912: V.) e quivi nei colli aridi calcarei della costa sud (30, X, 1912: V.); Trip: * Penisola di Macabez (14, XI, 1912: V.). Nuovo per la Tripolitania p. d.

49. *A. Halimus* L. — Marm.: Tobruk nei campi incolti della costa nord (29, VIII, e 29, X, 1912: V.).

* 50. *Salicornia fruticosa* L. — Bengasi alla Punta Giuliana (16, VIII, 1912: V.).

51. *Halocnemum strobilaceum* (Pall.) M. B. — Marm.: Tobruk nei luoghi salsi all' estremo ovest del golfo (28, VIII, 1912: V.) e nei colli aridi della costa nord (29, X, 1912: V.). Già quivi indicato nel nostro primo contributo per saggi raccolti nel Gennaio.

* 52. *Suaeda pruinosa* Lange. — Cir.: Derna sulle roccie calcaree lungo l'*uadi* omonimo (29, VIII, 1912: V.). Nuova per il distretto di Derna.

53. *Traganum nudatum* Del. — Marm.: Tobruk nella vallata della costa nord (28, VIII, 1912: V.).

* 54. *Salsola longifolia* Forsk. — Marm.: Tobruk nella vallata a nord-est presso lo stagno salso (28, VIII, 1912: V.) e lungo la costa nord (29, XI, 1912: V.); Trip.: * Penisola di Macabez (14, XI, 1912: V.). Nuova per la Tripolitania p. d. Confrontata con la *S. oppositifolia* Desf. indicata nel nostro primo contributo per le rovine di Lebda, confermiamo pienamente quanto scrivono Durand e Barratte nel Prodromo sulle differenze di queste due specie affini e spesso confuse.

55. *Noaea spinosissima* Moq. — Cir.: Derna sulle colline aride calcaree 1-200 m. (17, X, 1912: V.); Trip.: * Zuara ad Abd-el-Samad (16, XI, 1912; V.). Nuova per la Tripolitania p. d.

* 56. *Anabasis articulata* (Forsk.). Moq. ap. DC. — Marm.: Tobruk lungo la costa nord (29, X, 1912: V.); Cir.: Derna sulle colline calcaree alla ridotta « Pisa » a circa 200 m. (17, X, 1912). Non ancora segnalata pei dintorni di Derna.

57. *Polycarpon tetraphyllum* L. — Bengasi ad El-Sabri (30, III, 1912: V.).

* 58. *Paronychia argentea* Lam. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

* 69. ***Mirabilis Jalapa*** L. — Cir.: Derna lungo l'*uadi* e nell' Oasi coltivata e spesso subspontanea (19, XI, 1912: V.). Non riportata nel Prodromo di Durand e Barratte.

60. ***Silene colorata*** Poir. var. ***Olivieriana*** (Otth. in DC.) Rohrb. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

* 61. ***Tunica compressa*** (Desf.) F. et M. var. ***australis*** Batt. in Bull. Soc. Bot. Franc. XLVI (1899). p. 281 = ***Dianthella compressa*** Claus. var. ***australis*** Batt. Fl. de l'Alg. Suppl., a. 1910, p. 25. — Trip.: * Homs lungo la via che conduce sul M. Mergheb, (14, X, 1912: V.). Varietà di assai scarsa importanza sistematica, negli individui da noi studiati i calici essendo glabri o pelosi. La specie, come ci ha rivelato l'esame fatto dal primo di noi nell' Erb. centrale, si appalesa strettamente affine a ***T. illyrica*** (L.) Boiss., ed è da ulteriormente confrontare su adatto materiale con le varie forme ricondotte in questo ciclo dal Lanza (*Note sulla flora di Sicilia* in « Boll. R. Orto bot. di Palermo », IV, n. 1, [1905,] p, 32) e cioè: β ***paniculata*** Lanza; γ ***fasciculata*** Lanza (= ***F. armerioides*** Ser. in DC. e ***T. Sibthorpii*** Boiss.), δ ***stricta*** Lanza (= ***F. ochroleuca*** [S. et Sm.] Sibth.) ed ε ***cretica*** (Boiss.) Lanza. Sembra, quindi trattarsi di una entità di origine orientale, non comprendendo bene quanto scrive il Trotter (l. c.): « anche per questa specie l' area distributiva, che andava dal Marocco alla Tunisia, viene aspostarsi di molto verso oriente »: essa era già nota per i dintorni di Bengasi!

* 62. ***Spergularia Munbyana*** Pomel = ***Spergula Munbiana*** Dur. et Barr. — Bengasi presso i laghi salati (Prim. 1911: B. e 31, VIII, 1912: V.). Nuova per il distretto di Bengasi.

* 63. ***Portulaca oleracea*** L. — Oasi di Tripoli frequente nei coltivati ed incolti (16, XI, 1912: V.).

* 64. ***Tamarix gallica*** L. — Trip.: * Misrata nelle dune marine a Bu-Sceifa (15, X, 1912: V.).

* 65. ***Reaumuria vermiculata*** L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

66. ***Helianthemum Lippii*** Pers. var. ***ellipticum*** Boiss. = ***H. ellipticum*** Pers., Trotter ecc. — Marm.: Tobruk (28, VIII, 1912). Saggi in fiore e frutto, già quivi raccolti nel Genn.-Febbr. dello scorso anno.

67. ***H. virgatum*** Pers. var. ***vesicarium*** Dur. et Barr. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

68. ***Reseda propinqua*** R. Br. — D. s.

69. ***Matthiola humilis*** DC. var. ***cirenaica*** Dur. et Barr. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

70. ***Sisymbrium Irio*** L. — D. s.

71. ***Brassica Tournefortii*** Gouan — D. s.

72. ***Enarthrocarpus strangulatus*** Boiss. — D. s.

* 73. ***Malcolmia aegyptiaca*** Spr. — Trip.: * Zuara ad Abd-el-Samad (15, XI, 1912: V.) e nelle arene marittime della * Pen. di Macabez (11, XII, 1912: V.).

* 74. ***Lepidium Draba*** L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

75. ***Cakile maritima*** Scop. var. ***aegyptiaca*** (L.) Coss. — D. s.

76. ***Biscutella didyma*** L. α ***apula*** (L.) Coss. — D. s.: β ***obovata*** (Desf.) Bég. et Vacc. n. comb. È una forma non ancora segnalata per la Libia, che nei dintorni di Bengasi cresce col tipo, da cui si distacca per le siliquette completamente glabre. Corrisponde alla fig. DCXIV (835), delle *Ic. bot.* [Plantae criticae], di H. G. L. Reichenbach.

77. ***Didesmus bipinnatus*** (Desf.) DC. — D. s.

78. ***Papaver hybridum*** L. — D. s.

* 79. ***Hypecoum aequilobum*** Viv. Fl. Lib. spec. p. 7, tab. III, fig. 1. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.). Questo interessante endemismo fu scoperto dal Della Cella in Cirenaica, donde è citato dal Viviani senz' altra più precisa designazione di provenienza. Fu raccolto nel 1883 dal Ruhmer alla Punta Giuliana p. Bengasi e dall'agro bengasino provengono i saggi a noi comunicati da F. Béguinot. Avendo confrontato la pianta cirenaica con l' affine ***H. grandiflorum*** Benth., di cui l' Erb. gen. di Padova conserva parecchi saggi, specialmente della Grecia, confermiamo quanto scrivono nel Prodromo Durand e Barratte, sembrandoci che il carattere differenziale meglio scolpito risieda nei petali esterni che sono nettamente unguicolati in ***H. aequilobum*** e non attenuati in un cono largo e corto.

80. ***Adonis microcarpus*** DC. — Dintorni di Bengasi (c. s.). Esemplari in fiore e quindi determinazione dubbia.

81. ***Ranunculus asiaticus*** L. α ***vulgaris*** DC. — D. s.

* 82. ***Umbilicus intermedius*** Boiss. — Cir.: Derna (29, VIII, 1912: V.).

83. ***Ononis vaginalis*** Vahl α ***Viviani*** Bég. — Marm.: Tobruk nelle

arene marittime (25 VIII, 1912: V.). Già quivi indicata come raccolta in fiore il 24 Genn. nel primo nostro contributo.

84. *O. angustissima* Lam. — Trip.: * Macabez nelle arene della Penisola (14, XI, 1912: V.).

85. *Trigonella maritima* L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

* 86. *Medicago lappacea* Dsr. ap. Lam. — D. s.

87. *Hymenocarpus nummularius* (DC.) Boiss. — D. s. Determinazione dubbia poichè mancano legumi, ma questa specie è l' unica indicata per il Bengasino.

88. *Trifolium tomentosum* L. — D. s.

89. *Lotus argenteus* (Del.) Webb. — D. s. Già da noi indicato per i dintorni di El-Sabri.

90. *L. creticus* L. — D. s.

* 91. *L. pusillus* Viv. — D. s.

* 92. *L. ornithopodioides* L. — D. s. Nuovo per i dintorni di Bengasi.

* 93. *Scorpiurus muricatus* L. var. *levigatus* Boiss. — D. s.

94. *Astragalus hamosus* L. — D. s.

95 *Lathyrus Cicera* L. var. *angustifolius* Rouy Fl. de Franç., V, p. 258. — D. s. La varietà (cui pure vanno riferiti i saggi di Tobruk interpretati nel nostro primo contributo per il tipo), non compare nel Prodromo di Durand e Barratte, ma ad essa il Rouy (op. cit.) aveva ascritto fin dal 1899 gli esemplari distribuiti dal Ruhmer nel n. 129 della « Flora cyrenaica ».

* 96. *L. Aphaca* L. — D. s.

* 97. *Acacia Farnesiana* W. — Coltivata e subspontanea nell' Oasi di Tripoli (6, XI, 1912; V.).

* 98. *Athamanta Della-Cellae* Asch. et Barb. in Dur. et Barr. — Cir.: Derna sulle rupi presso il mare fuori del muro di cinta ad est della città (17, X, 1912). È la stazione più vicina al littorale!

99. *Scandix Pecten-Veneris* L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.),

100. *Torilis nodosa* (L.) Gaertn. — D. s.

101. *Orlaya maritima* Koch. — D. s.

102. *Daucus gummifer* Lam. — D. s. Già segnalato nel primo nostro contributo per la Punta Giuliana.

103. *Pituranthos tortuosus* (Desf.) Benth. et Hook. — Trip.: * Homs sul M. Mergheb a circa 200 m. (14, VIII, 1912: V.).

104. ***Linum decumbens*** Desf. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B).

* 105. ***Erodium Chium*** (Burm. f.) W. — D. s. Nuovo per il distretto di Bengasi.

106. ***E. glaucophyllum*** Ait. — * Penisola di Macabez nelle arene marittime (14, XI, 1912: V.). Fu indicato la prima volta per la Libia nel nostro primo contributo per esemplari raccolti dal secondo di noi presso Derna. Gli esemplari di Macabez, non ancora fioriferi, presentano foglie più grandi e meno incise lungo il margine di quelli di Derna, ma si tratta delle foglie primordiali.

107. ***E. hirtum*** W. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

108. ***Zygophyllum album*** L. — Marm: Tobruk nelle arene marittime (30, X, 1912: V. — noto vagamente per il Golfo di Bomba!); Cir.: Bengasi alla Punta Giuliana (16, X, 1912: V.).

109. ***Nitraria tridentata*** Desf. — Marm.: Tobruk nelle arene marittime (29, X, 1912: V.: nuovo per i dintorni di questa località!); Trip.: * Lebda (7, VII, 1912: V.).

* 110. ***Malva parviflora*** L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

* 111. ***Hibiscus esculentus*** L. — Cir.: Derna coltivato nell'Oasi (12, XI, 1912: V.).

* 112. ***Euphorbia helioscopia*** L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

* 113. ***E. Paralias*** L. — Bengasi nelle arene marittime (Prim. 1911: B.).

114. ***Mercurialis annua*** L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

115. ***Anagallis arvensis*** L. var. ***caerulea*** (Schreb.). — D. s.

* 116. ***Cyclamen Rohlfsianum*** Asch. in « Bull. Herb. Boiss. V, (1897), p. 528 et ap. Dur. et Barr. Fl. Lib. Prodr. p. 160, tab. XIII. — Cir.: Derna frequente nei colli aridi calcarei ad est della città (17, X, 1912: V.).

117. ***Rhus Oxyacantha*** L. — Trip.: * Homs nelle colline a ponente della città (14, X, 1912: V.). Già ricordato nel nostro primo contributo per questa località in base ad esemplari raccolti nell'Aprile.

* 118. ***Pistacia Lentiscus*** L. — Cir.: Derna frequente nei colli aridi calcarei a circa 200 m. (19, XI, 1912: V.).

119. ***Phillyrea media*** L. — Cir.: Derna nei colli aridi calcarei (17, X, 1912: V.).

* 120. ***Statice delicatula*** De Gir. in « Ann. Sc. Nat. 3.ª ser., II (1844), p. 327 ».

α typica = *S. globulariaefolia* a. var. *glauca* Boiss. Voy. Esp. I, p. 53, tab. 155 a (*non S globulariaefolia* Desf.). — Trip.: * Misrata a Bu-Sceifa nella *sebckha* (15, X, 1912: V.). Vi riferiamo pure la pianta già menzionata nel nostro primo contributo di Tobruk, assumendo pel tipo la forma a foglie grandi ovato-spatolate distintamente mucronate esattamente corrispondente alla figura citata del Boissier.

β *minor* Bég. et Vacc. n. comb. = *S. glob.* b. var. *minor* Boiss. op. cit. tab. 155 *b*. — Cir.: Derna sulle colline aride sassose lungo il mare a ponente del Faro (31, X, 1911: V.).

γ *subrotundifolia* Bég. et Vacc. n. var. *Ut in var.* β, *sed foliis ovato-subrotundis apice saepe retusis.* — Raccolta d. s., verosimilmente ricollegandosi con intermediari alla var. *minor*, l' una e l' altra rappresentando forme ridotte e quindi nane del tipo.

121. ***St. virgata*** W. — Bengasi nelle arene marittime a Punta Giuliana (31, VII, 1912: V.).

122. ***St. pruinosa*** L. — Bengasi d. s. (31, VIII, 1912: V.) e nei dintorni della città (Prim. 1911: B.).

123. ***Periploca levigata*** Ait. — Trip.: * Penisola di Macabez (14, XI, 1912: V.).

124. ***Anchusa aegyptiaca*** (L.) DC. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

125. ***Echium sericeum*** Vahl. — D. s. Già citato nel nostro primo contributo della Punta Giuliana.

* 126. ***Heliotropium villosum*** W. — Cir.: Derna (29, VIII, 1912: V.). Già ricordato d. s. per saggi raccolti sulla fine del Giugno.

* 127. ***H. curassavicum*** L. — Cir.: Bengasi lungo gli stagni salati a Punta Giuliana e Sidi Daud (31, VIII, 1912; V.).

* 128. ***Onosma cyrenaicum*** Dur. et Barr. Fl. Lib. prodr. pag. 169 = *O. echinata* Viv. Fl. Lib. spec. p. 11, tab. 26, fig. 3, (non Desf.) — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

129. ***Cressa cretica*** L. — Cir.: Bengasi nei pressi della laguna salata (31 VIII. 1912: V).

130. ***Solanum nigrum*** L. α? — Marm.: Tobruk (29, X, 1912: V.) Nuovo per la Marmarica.

var. *villosum* L. — Cir.: Derna nei campi incolti ad est della città (I, XI, 1912: V.).

131. *Datura Stramonium* L. — D. s. (29, VIII, 1912: V.). Già quivi segnalata nel nostro primo contributo per esemplari raccolti nel Marzo.

132. *Lycium europaeum* L. — Marm.: Tobruk (28, VIII, 1912: V.).

133. *Linaria triphylla* (L.) Mill. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.). Nuova per l' agro Bengasino.

134. *Kopsia Muteli* (Schultz.) Bég. — D. s.

135. *Thymus capitatus* (L.) Hoffm. et Lk. — Bengasi a Sidi Daud (31, VIII, 1912: V.).

* 136. *Satureja incana* Briq. in Engl. et Prantl Pflanzenfam. IV, III, A. p. 301 (1897), non Spreng.! = *Thymus incanus* S. et Sm. = *Calamintha incana* Boiss. — Cir.: Derna lungo l' *uadi* (VIII, 1912: V..

137. *S. conferta* (Coss.) Bég. et Vacc. — Cir.: Derna frequente sulle rupi calcaree delle colline fra l' Humboch ed il Bu-Msafer alla « Ridotta » (1, XI, 1912: V.).

138. *S. nervosa* Desf. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

* 139. *Salvia aegyptiaca* L. = *Thymus hirtus* Viv. Fl. Lib. Spec. p. 30, tab. XIV, fig. 1 — Trip.: * Homs sul M. Mergheb a 200 m. (14, X, 1912: V.). Nota sin qui solo per Yefren (Krause) e per la Grande Sirte (Della Cella sec. Viviani).

140. *S. lanigera* Poir. — Trip.: * Zuara ad Abd-el-Samad (15, XI, 1912: V.); Cir.: Bengasi (Prim. 1911: B.).

141. *Stachys rosea* (Desf.) Boiss. — Cir.: Derna nell' alveo del torrente Humboch sotto il Marabutto (19, XI, 1912: V.)

142. *Lamium amplexicaule* L. — Frequente nei dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.). Noto solo come raro pei dintorni di Derna.

143. *Ajuga Iva* (L.) Schreb. — Marm.: Tobruk nei campi incolti (29, X, 1912: V.).

144. *Globularia Alypum* L. — Cir.: Derna lungo l' *uadi* Humboch sotto il Marabutto (19. XI, 1912: V.).

145. *Plantago notata* Lag. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B).

146. *Pl. Lagopus* L. — D. s.

147. *Pl. crassifolia* Forsk. — Trip.: * Misrata a Bu-Sceifa nella *sebkha* (15, X, 1912: V.).

148. *Crucianella rupestris* Guss. — Cir.: Derna sulle rupi marittime ad ovest del Faro (31, X, 1912: V. — già raccolta nell' Aprile lungo l' *uadi*); Trip.: * Penisola di Macabez (14, XI, 1912: V.).

149. *Galium Vaillantia* Web. et Wigg. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

150. *Valerianella Petrovichii* Asch. ap. Rohlfs — D. s.

151. *Scabiosa arenaria* Forsk. — Cir.: Bengasi alla Punta Giuliana (31, VIII, 1912: V.).

* 152. *Citrullus Colocynthis* Schrad. — Trip.: * Zuara nelle dune sabbesse fra Abd-el-Samad e Regdaline (15, XI, 1912: V.) ed * Homs nei luoghi incolti lungo la via del Mergheb (14, X, 1912: V.).

153. *Pallenis spinosa* (L.) Cass. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

* 154. *Anthemis cyrenaica* Coss. in Bull. Soc. Bot. Franc. XIX (1872), p. 82; Durand e Barr. Fl. Lib. prodr. p. 139, tab. X. — D. s.

155. *Anacyclus alexandrinus* W. — D. s.

156. *Matricaria aurea* (L.) Boiss. — D. s.

157. *Chrysanthemum coronarium* L. — D. s.

158. *Artemisia Herba*-alba Asso — Cir.: Derna sui colli calcarei all' altezza di 1-200 m. (17, X, 1912: V.).

var. *laxiflora* Boiss. — Trip.: * Zuara frequente nelle dune sabbiose fra Abd-el-Samad e Regdaline (15, XI, 1912: V.) e nella * Penisola di Macabez (19, XI, 1912: V.). Forma glabrescente a fusti più esili, a rami allungati eretti o patenti e ad infiorescenza lassa (1) che si distacca abbastanza nettamente dalla pianta raccolta in Cirenaica e Marmarica: alla varietà va pure riferita quella di Gargaresc menzionata nel nostro primo contributo. Dato, però, il polimorfismo della specie, è probabile che le due forme non abbiano area propria e che siano collegate da intermediari.

* 159. *Achillea Santolina* L. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

(1) Pare sia forma affine, ma alquanto diversa, l'A. *Herba-alba* var. β *glabrescens* Boiss. Voy. Esp, p. 323, tab. XCIV, fig. *B.* Il tipo corrisponde alla descrizione di Asso (*Fl. Arrag.*, p. 117, tab. VIII, fig. 1), alla *A. arragonensis* Lam. (come in tanti altri casi il Lamark mutò arbitrariamente il nome!), alla *A. Herba-alba* var. α *incana* Boiss., op. cit., tab. XC IV, fig. *A.*, qui avvertendo che Willdenow (*Sp. plant.* III, p. 1816) giunge alla conclusione che il nome più vecchio del ciclo sarebbe *A. aethiopica* L. nome, osserva, da rigettare poichè la pianta non cresce in Etiopia. Nel materiale sin qui da noi raccolto e studiato non compare l'A. *Herba-alba* α *densiflora* Boiss. che sembra entità abbastanza ben caratterizzata a giudicare dagli esemplari della Persia austro-occid. fra Teheran ed Ispahan trasmessi dall'Haussknecht all'Erb. gen. Padovano sotto il nome di *A. Oliveriana e aff.*: località e sinonimo (*sed nomen anterius*!) riportati dal Boissier per la sua var. *condensata.* Così pure la var. *laxiflora* sarebbe stata descritta sotto i nomi di *A. Lippii* Jan in Bess., di *A. Sieberi* ed *A. Billardierana* Bess. delle quali non ci fu possibile esaminare le diagnosi.

160. *Senecio coronopifolius* Desf. — D. s. Nuovo per l' agro Bengasino.

161. *S. gallicus* Chaix ap. Vill. var. *laxiflorus* (Viv.) DC. — D. s.

162. *Calendula aegyptiaca* Pers. var. *cristagalli* (Viv.) Bég. et Vacc. — D. s.

* 163. *Inula crithmoides* L. — Marm.: Tobruk presso lo stagno salso nella penisola nord (30, X, 1912: V.). Nota vagamente per il Golfo di Bomba.

* 164. *I. viscosa* Ait. — Cir.: Derna lungo l' *uadi* (19, XI, 1912: V.).

* 165. *Warthemia candicans* (Del.) Boiss. — Marm.: Tobruk nei colli aridi calcarei della costa sud del golfo (28, X, 1912: V.); Cir.: Derna nei luoghi sassosi calcarei (29, VIII, 1912: V.).

* 166. *Carlina lanata* L. form. *acaulis* Bég. et Vacc. nov. *Differt a typo planta humili mono-vel bi-tri-cephala, cephalis omnibus subsessilibus solo adpressis.* — Cir.: Derna nei luoghi aridi sassosi presso la foce dell' *uadi* Humboch (1, XI, 1912: V.). La specie è nuova per la Libia, la forma rappresenta il grado estremo di basianzia ed è la espressione genuina della grande aridità della stazione dove essa vegeta.

* 167. *Atractylis serratuloides* Sieb. ex Coss. — Trip.: * Penisola di Macabez (14, XI, 1912: V.).

* 168. *Cichorium spinosum* L. — Cir.: Derna nei colli sassosi lungo il mare a ponente del Faro (31, X, 1912: V.).

169. *Spitzelia coronopifolia* (Desf.) Schultz-Bip. var. *pilosa* (Del.) Asch. e Schw. — Dintorni di Bengasi (Prim. 1911: B.).

170. *Sonchus oleraceus* L. — D. s.

171. *Launaea resedifolia* (L.) O. Ktze forma.... — D. s.

172. *Reichardia orientalis* (L.) Hochr. — D. s.

*
* *

Notizie sulle piante utile della Libia elencate in questo e nel precedente contributo.

In questa appendice riuniamo brevi notizie sopra una sessantina di specie da noi raccolte ed illustrate e che hanno o possono avere, a titolo diverso, un' utilità pratica ed un impiego nelle industrie e nei commerci. Al nome tecnico abbiamo aggiunto, quando ci fu possi-

bile, quello locale, onde renderle più facilmente riconoscibili. Sono le seguenti (1):

Juniperus phoenicea L. [Nom. volg.: **Habhagar** che, sec. Mentzel, si applica al Ginepro in genere.] — Arbusto od alberetto spontaneo nella Cirenaica e Marmarica, è un elemento della macchia e ritrovasi pure nei boschi della regione, formando, quindi, parte del suo patrimonio forestale.

Imperata cylindrica P. B. [Nom. volg.: **dis**]. — Secondo Krause i fornai di Tripoli si servono di questa graminacea, che raccogliemmo spontanea nelle dune di Macabez e Misrata, per riscaldare i loro forni.

Aristida pungens Desf. [Nom. volg.: **drin**, mentre la pianta tenera e verde viene chiamata **sbuth** o **sbeitt** e, quando secca, **dzimukh**]. — Graminacea importante come fissatrice naturale delle dune ed in quanto, secondo Foureau, sembra fornire una specie di grano, di cui in tempo di carestia si nutrono uomini ed animali. I giovani germogli vengono addentati dai cammelli.

Pennisetum typhoideum Rich. [Nom. volg.: **ksab, kassab, gassab** — quest' ultimo adoperato in Egitto per la canna da zucchero — **doukhn** ed **énéli** sec. Foureau]. — Lo vedemmo coltivato ed inselvatichito nelle oasi di Tripoli e di Derna: di esso, come è noto, se ne mangiano le cariossidi e serve anche come pianta da foraggio.

P. dichotomum Del. [Nom. volg.: **murukb**, oppure **mur' ukb**] — Graminacea comune ed infesta alle coltivazioni nelle oasi del Fezzan, nel paese dei Tuareghi, nell' oasi dell' Aïr sino a pozzi di Agadem, frequente sino ai confini della regione tropicale, venne per la prima volta da noi trovata in vicinanza del littorale e cioè presso Misrata. Gli involucri fruttiferi pungono gli uomini e gli animali, ma le cariossidi sono commestibili.

---

(1) Desunti in massima parte dalle seguenti opere: CHR. MENTZEL, *Index nominum plantarum multilinguis*. BEROLINI, 1682; P. ASCHERSON, *Elenco di nomi indigeni di alcune piante della Cirenaica* in « L' Esploratore » VI (1882), p. 3; ID. *Droghe, semi ed altri vegetali mandati al R. Museo botanico di Berlino..... da G. A. Krause.* « *Ibid.* » VIII (1884), p. 180; ID. in ROHLFS *Kufra.* Leipzig, 1881; F. FOUREAU, *Essai de catalogue des noms arabes et berbères de quelques plantes, arbustes et arbres algériens et sahariens.* Paris 1896; ID. *Documents scientifique de la Mission Saharienne* etc. Deuxieme fascicule. Paris, 1905; BOURBON del Monte S. Maria, L'*Oasi di Ghat e sue adiacenze.* Città di Castello, 1912; TROTTER in « Ricerche e studi agrologici sulla Libia », I. *La Zona di Tripoli.* Bergamo, 1912.

Cyperus rotundus L. [Nom. volg.: **sa 'ad**]. — Ciperacea alla cui radice si attribuiscono virtù terapeutiche.

Juncus acutus L. e *J. maritimus* Lam. — Chiamato il primo **dis** ed il secondo **smarr**, forniscono la materia prima per la industria delle stuoie.

Asparagus officinalis L. [Nom. volg: **Alsurfungi**, sec. Mentzel] — Gli esemplari di Asparago a noi comunicati erano coltivati a Bengasi nel giardino dei PP. Filippini al Foiad e tutto lascia credere che la coltura sia remunerativa, come si apprende da notizie recentissime per tentativi fatti nei dintorni di Homs.

Allium roseum L. [Nom. volg.: **ghazul, rasul**] — Aglio spontaneo molto frequente nella Libia e di cui si raccolgono e mangiano i fiori.

Aloe vera L. [Nom. volg.: **sbarr, suktri**]. — La vedemmo adoperata come siepe presso Misrata.

Asphodelus microcarpus Viv. [Nom. volg.: **belùs, ansal**]. — Il porrazzo è comune in tutta la Libia littoranea e, sec. Krause, ai tuberi è attribuita la virtù di impedire la gravidanza. Di *A. tenuifolius* Cav. [**tâzia** ed **iziana** sec. Foureau] si mangia la pianta ad uso di legume (Trotter).

Muscari comosum Mill. [Nom. vol.: **kitût, kêtût**]. — Del Cipollaccio si mangiano i bulbi e, nel mercato di Tripoli, se ne vendono mazzetti di foglie e di fiori (Trotter).

Urginea maritima Bak. [Nom. volg.: **ansib, far' on**]. — La Scilla, oltre che pianta spontanea, viene qua e là coltivata nei campi (Smith, Krause ecc.) per indicare la presa di possesso di un terreno ed a stabilire i confini fra due proprietà (Trotter).

Ficus carica L. [Nom. volg.: **kerura, karma**, i frutti freschi sono detti **kermuss**, i secchi provenienti dall' interno **kermuss iabes** o **scrih**].

Rumex tingitanus L. [Nom. volg.: **kummedha**]. — Rumice spontaneo di cui si mangiano le foglie.

Polygonum equisetiforme S. et Sm. — Secondo Ruhmer a Bengasi se ne costruiscono siepi.

Atriplex Halimus L. [Nom. volg.: **ghitaf, ghitaff, g' taf**, od anche, sec. Foureau, **guetaf** ed **aramas**]. — Chenopodiacea dei terreni salati che costituisce buon alimento per i camelli, montoni e cavalli. All'*A. mollis* si attribuiscono virtù analoghe a quelle dell'*Asphodelus microcarpus*.

Suaeda fruticosa Forsk. [Nom volg.: **ssabta** od anche, sec. Foureau, **souïd** e **tirbar**]. — Comune nei terreni salati del littorale e dell' interno, dovunque appetita dai camelli.

Traganum nudatum Del. [Nom. volg.: **dàmran, dhmrane,** sec. Foureau, anche **tarhart**]. — Cresce come le due precedenti ed è mangiata dai camelli, la cui appetenza per le piante dei terreni salati risulta evidente.

Portulaca oleracea L. — Spontanea e coltivata, la nostra porcellana prende nomi diversi e cioè: **bilêbsce,** a Ghat **alôgha,** se a foglie piccole, **bordagâlesc,** se a foglie grandi, a Sokna **tafrita,** a Ghadames **bideraghesc,** nel Fezzan **bindelogha** o **bighel.**

Mirabilis Jalapa L. — Coltivata come pianta ornamentale nei giardini di Derna, si è qua e là inselvatichita e come tale venne per la Libia raccolta la prima volta dal secondo di noi.

Silene succulenta Forsk. [Nom. volg.: **ghasul, rhasûl, rorhol**]. I rizomi di questa pianta spontanea nella zona costiera si adoperano, sec. Ruhmer, a Bengasi per il lavaggio delle lane.

Brassica Napus L. var. *oleifera* DC. — È il nostro navone selvatico o ravizzone trovato da Vaccari presso Bengasi. In Libia era nota la sola var. *rapifera* Metzg. che è la nostra rapa (vol.: **left**).

Lepidium sativum L. [Nom. volg.: **habb er resciad**]. — Coltivato ed inselvatichito, se ne vendono i semi a scopo medicinale a Tripoli (Trotter).

Acacia Farnesiana W. [Nom. volg.: **talha, bau,** il primo, più o meno modificato nella grafia, è applicato anche a due acacie gommifere e cioè *A. tortilis* Hayn. ed *A. arabica* W.]. Della gaggia vedemmo individui coltivati e naturalizzati nell' oasi di Tripoli come pianta ornamentale.

Retama Raetam Webb. [Nom. volg.: **rtem, rtemm, retém, ertem**]. — Questa Ginestra è usata, come altre Leguminose arbustive, a fare carbone ed i camelli, sec. Foureau, non ne mangerebbero che il fiore.

Ononis angustissima Lam. — Comune nei luoghi sabbiosi del littorale e, sec. Krause, si vende a Tripoli come foraggio.

Lawsonia alba Lam. [Nom. volg.: **henna, hena, hhènne, alhenna** ecc.]. — È largamente coltivata in Libia e noi la vedemmo in più luoghi nei campi dell' oasi di Tripoli. Usitata dagli arabi per tingere in rosso le unghie, la palma della mano e la pianta dei piedi,

nonchè per colorire la barba ai vecchi, le crimere dei cavalli e degli asini e tingere le sete e il legno. Ha anche proprietà astringenti e, vera panacea, è adoperata a sanare le ferite, curare la forfora ed i geloni e come abortivo.

Apium graveolens L. [Nom. volg.: **kraftes, kerafs, kerafés**]. Il sedano vedemmo coltivato a Derna.

Pituranthos tortuosus Bth. et Hook. [Nom. volg.: **guzzah?**] Ombrellifera frequente nella Libia littoranea ed impiegata dagli arabi per aromatizzare le vivande (Trotter).

Thapsia garganica L. var. *Sylphium* (Viv.) [Nom. volg.: **drias**] — Pianta caratteristica del paesaggio botanico dell'altipiano Cirenaico e che noi raccogliemmo nei colli sopra Derna. Vi si volle da alcuni riconoscere il famoso Silfio dei Greci (Laserpizio dei Romani) dalle multiformi virtù terapeutiche, ma l'identificazione è estremamente controversa ed i botanici più autorevoli si accordano ad incriminarla per un complesso di ragioni che sarebbe qui superfluo riportare. Durante la maturazione del frutto riesce nociva ai camelli: il succo è adoperato dagli arabi per medicare ferite ed ulceri ed internamente esercita azione purgativa.

Zizyphus Lotus L. [Nom. volg.: **ssidar, ssudr, sidr.**]. — Arbusto spontaneo, il cui frutto viene adoperato per la fabbricazione di una bevanda acidula di sapore gradevole. Che esso poi corrisponda al frutto del Loto dei Lotofagi è interpretazione controversa, alcuni propendendo ad identificarlo con la palma da dattero.

Rhus Oxyacantha L. [Nom. volg.: **gedari, sedari, sederi, argh, tainaght,** i frutti **drukh, dumakh, tibonghi**] — Arbusto indigeno a frutti commestibili ed a radice con corteccia adoperata per tingere in rosso e per la conceria: del legno se ne fa carbone ed è impiegato anche per costruzioni leggere.

Erodium hirtum W. (Nom. volg.: **temeri**]. — I tuberetti radicali sono commestibili, come per il primo ebbe a notare il nostro Della Cella.

Peganum Harmala L. [Nom. volg.: **harmal, hhàrmal**] — Zigofillacea indigena a virtù terapeutiche molto accreditate. I semi a Tripoli sono adoperati contro le cefalee (Trotter): in Cirenaica si ritiene che esso sbarazzi dai *genun* o cattivi geni (Haimann).

Haplophyllum tuberculatum A. Juss. [Nom. volg.: **sceseret er rit**]. — Rutacea indigena che noi abbiamo raccolta presso Bengasi e che è impiegata contro le coliche.

Gossypium herbaceum L. [Nom. volg.: **góton**]. — È il nostro cotone che noi vedemmo coltivato e qua e là inselvatico nell' oasi di Tripoli.

Hibiscus esculentus L. [Nom. volg.: **molukhia tarabulsia, mol. el gurún, bâmia, gheunaccia,** o, sec. Foureau, **guenaouïa, gombo** o **gombbo**]. — Lo vedemmo coltivato nell' oasi di Derna: i frutti immaturi sono eduli e si possono anche conservare con la disseccazione.

Ricinus communis L. [Nom volg.: **kher' ne, kherna,** od anche, sec. Foureau, **kherroua** e **khoula-khoula**]. — Lo vedemmo coltivato ed inselvatichito a Tripoli, Homs, Bengasi e Derna: in quest' ultima località, sec. Mamoli, esercitò per qualche tempo l' industria dell' olio purgativo un maltese.

Statice pruinosa L. e *S. Thouini* Viv. — Sono due piante spontane dei terreni salati, la prima nota sotto il nome di **gerèra** e la seconda di **sehenne** e che vengono mangiate dai cammelli.

Nerium Oleander L. [Nom. volg.: **defla, safsaf** od anche, sec. Foureau, **elel**]. — Il leandro raccogliemmo spontaneo lungo i ruscelli di Derna, ma si coltiva in molte oasi e nei giardini come pianta ornamentale.

Calotropis procera Dryand. [Nom. volg : **osciur, kronka, korunka** od anche, sec. Foureau, **toureha** e **tounfafia**]. — Alberetto tropicale che raccogliemmo ad Homs nelle rovine di Lebda. Possiede un succo lattiginoso, venefico ed irritante: il legno serve per fare palizzate, carbone per la fabbricazione della polvere da fuoco e, bollito, un decotto Il **kapok** è una sostanza filamentosa avvolgente i semi e fu adoperata un tempo per fabbricare tessuti ed ora si usa per riempire cuscini, ovatte ecc.

Alkanna tinctoria Tausch e *Withania somnifera* Dun. ap. DC — La prima ha radice con corteccia atta a produrre una sostanza colorante rossa e della seconda la corteccia della radice ha reputazione di narcotico, ma non sappiamo se adoperata dagli arabi.

Nicotiana glauca Graham. [Nom. volg.: **akkus mussa** ed **aggas embi**]. — Questa specie di tabacco vedemmo coltivata e subspontanea a Tripoli, Homs e Bengasi.

Datura Stramonium L. — Lo stramonio vedemmo allo stato di pianta naturalizzata presso Derna, ma non sappiamo se adoperata.

Ajuga Iva Schreb. [Nom. volg.: **sciandagura chendegoura**]. — È una Labiata che fu da noi raccolta spontanea a Derna e Tobruk e che, sec. Krause, si vende a Tripoli come medicamento.

Marrubium Alysson L. [Nom. volg.: **rúbia, róbia**]. — Altra Labiata spontanea che fornisce una polvere la quale, mescolata ad olio, dà una pomata adoperata nei dolori reumatici (Trotter).

Rosmarinus officinalis L. [Nom. volg. **klil**]. — Il rosmarino è spontaneo ed anche coltivato per usi culinari.

Phlomis phloccosa Don. [Nom. volg.: **sehera**]. — È una labiata caratteristica del paesaggio botanico della Cirenaica e Marmarica e spesso designata dai viaggiatori col nome di Salvia, cui rassomiglia. Sec. Minutilli, la pianta dà un succo dolciastro col quale gli indigeni fanno delle confetture. Di altre due labiate spontanee da noi raccolte, la *Salvia Verbenaca* L. (**ssag en nâgo**) sarebbe, sec. Rohlfs, mangiata dai beduini in tempo di carestia e *Teucrium Polium* L. (**gá ad, gêeda**) sarebbe, sempre secondo questo A., mangiata dai camelli ed impiegata come rimedio contro il vaiuolo.

Rubia tinctorum L. [Nom. volg.: **fuua, fua**]. — La robbia vedemmo naturalizzata presso Tripoli ed è quivi venduta per la materia colorante gialla.

Citrullus Colocynthis Schrad. [Nom. volg.: secondo Foureau **hady hadedy, tedyellet, alkod, halkat**]. — La coloquintide è forse la sola cucurbitacea che vegeta nel Sahara: in Libia la sua più larga diffusione cade nel Fezzan: tuttavia il secondo di noi l' ha raccolta anche in vicinanza della costa a Zuara ed Homs. Si attribuiscono proprietà terapeutiche alle foglie ed i frutti, privati della loro amarezza, sono eduli (Nachtigal).

Artemisia Herba-alba Asso [Nom. volg.: **scih, sci, scis, cheach, scheikh, arag, ághares**]. — Questa pianta, una delle composte più frequenti e caratteristiche della steppa, sia in pianura, come negli altipiani, è mangiata dai camelli, ridotta in polvere è impiegata come stomatica, le foglie disseccate sono fumate dagli arabi. Le galle cotonose prodotte da un dittero sono usate a guisa di esca. Della Famiglia delle Composte hanno, inoltre, qualche impiego, fra le specie da noi raccolte, la *Centaurea dimorpha* Viv. (**blal**) ed il *Chrysanthemum coronarium* L. (**ghenhenan**) come foraggere, la *Hyoseris radiata* L. ed il *Tragopogon porrifolius* (**debah el kheil**) commestibili e la *Matricaria aurea* Boiss. (**fleia, greisa**) come medicinale.

MEMORIE

DELLA

SEZIONE DI LETTERE

Cav. CHIAFFREDO HUGUES

COMMEMORAZIONE

DEL SOCIO

Maggiore Cav. TANCREDI FOGLIANI (*)

Die Huldigung, die diese Zeile bringt,
Hat oft das Herz im Stillen dargebracht (1)
REINHOLD KLOTZ.

Per 46 anni il compianto nostro Socio, Cav. Tancredi Fogliani, fu a noi largo di amicizia; cosa di cui, dice il Segneri, non può darsi al mondo nè la più preziosa, nè la più salutare, nè la più santa: e però abbiamo premesso al cenno biografico che segue i versi del Professore Klotz, i quali esprimono il sentimento di gratitudine che vive e vivrà sempre in noi insieme con la memoria del carissimo Amico.

*
* *

Tancredi Fogliani di antica, cospicua ed agiata famiglia di Cucciago, paesello della plaga comasca, nacque li 21 Febbraio 1829 a Pescarolo nel Cremonese; ove il degnissimo suo genitore, che era ingegnere, risiedeva per lavori riguardanti la sua professione.

Compiuto il corso liceale, il nostro Collega studiava legge a Pavia infino all' anno 1848. Nel 1848 lasciava la università per correre ai campi di battaglia, e combatteva nelle file di una compagnia di giovani raccolti e capitanati dal suo prelodato Genitore: il quale, amando ardentemente la terra natia, ne ispirò l' affetto nei figli con antica religione; e fu carcerato per sue ardite poesie satiriche e politiche, apparse nell' *Uomo di Pietra* notissimo giornale di Lombardia.

(*) Letta alla R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena nell' adunanza generale del 18 Novembre 1911.

(1) *Silenziosamente il cuore più volte ha reso l' omaggio espresso in queste righe.*

Nel 1849, mentre suo Padre combatteva fra i difensori di Venezia, Tancredi Fogliani combatteva nelle file dei volontari in Lombardia; e infine nel febbraio del 1853 il nostro Socio insorgeva in Milano insieme col Piolti de' Bianchi; quando pochi animosi speravano di rinnovare il prodigio delle *cinque giornate.*

Ricordando la sommossa del 1853, il nostro Collega correva col pensiero ad una giovane, che fu un vero angelo salvatore per molti Lombardi riottosi al giogo straniero. La giovane, che morì ventenne di etisia, era figlia del colonello ungherese Cebatz; il quale comandava un reggimento a Milano.

Il Cebatz, valendosi della sua influenza nei tribunali militari, ottenne che per un giovane congiurato condannato a morte la pena fosse ridotta a pochi anni di prigionia; e la famiglia del giovane patriotta, per riconoscenza, ospitò a Cucciago per alcuni anni la inferma figlia del colonnello.

Il nostro Collega vedeva spessissimo nel paesello di Cucciago la giovane ungherese, la quale ispirava in tutti simpatia per la sua gentilezza e per la sua infermità che non lasciava dubbio rispetto alla prossima fine.

Tornata a Milano la signorina Cebatz non dimenticò il Tancredi di Cucciago; e quando, nella casa del colonnello di lei padre, alti impiegati o ufficiali austriaci decretavano l'arresto di qualche patriota, la giovane ungherese prontamente di nascosto inviava un biglietto al nostro Collega residente a Milano. Il nostro Socio ne avvisava tosto il Piolti; il quale, valendosi di messi fidatissimi, riusciva non poche volte a procurare la fuga del condannato, rendendo vane le ricerche della polizia.

Ancora pochi mesi prima di morire, il nostro Collega, al secondo de' suoi degnissimi Figli ricordava con viva gratitudine la straniera, che salvò molti giovani i quali sarebbero stati dannati al capestro, o ad asprissima prigionia.

Nel Febbraio del 1853, reo di morte per aperta ribellione, il nostro Socio si salvò rifugiandosi in Piemonte: ove, occupandosi nella pubblicazione di un dizionario latino e collaborando insieme col Camerini alla edizione del pregevolissimo dizionario italiano del Tommaseo, attese in Torino il giorno, in cui Vittorio Emanuele II. rispose commosso al grido di dolore delle regioni italiche frementi sotto il giogo dello straniero.

Riprendeva il Fogliani le armi nel 1859, arruolandosi nell'esercito insieme con un suo fratello, mentre altri due suoi fratelli entravano nelle file dei Garibaldini: e, dopo pochi mesi di servizio militare il nostro socio era nominato sergente furiere. Un soldato, volontario nello stesso reggimento, vide un giorno sopra un tavolone della caserma un Virgilio ed una Bibbia; e gridò « chi è il padrone di questi libri? »

Il soldato era il coltissimo Vittorio Imbriani; il padrone dei libri era il nostro Collega! Il Virgilio era tutto coperto di note del Fogliani, il quale sapeva a memoria la Eneide; la Bibbia era un prezioso ricordo di Ropolo, il tenente dei bersaglieri che ebbe un duello pochi mesi prima della campagna del 1859 con un ufficiale austriaco, e che morì combattendo nel 1859 a Palestro. Il soldato e il furiere strinsero tosto una amicizia indissolubile; e la ultima lettera scritta dal moribondo letterato napoletano (lettera in cui era stoicamente preannunciata la fine imminente) fu diretta al Fogliani.

Nel 1860 il nostro Collega ebbe la promozione a sottotenente nella fanteria; e fu inviato prima a Parma alla Scuola di tiro, poscia alla Scuola Militare di Modena, come insegnante di storia e di geografia. Appena ebbe l'insegnamento a Modena cominciò a pubblicare le opere che lo resero notissimo, e gli cattivarono la stima degli studiosi e dei più illustri letterati.

In una semplice commemorazione è necessità notare di volo le opere minori e richiamare l'attenzione sopra gli scritti che particolarmente valgono a far conoscere la originalità mentale, la coltura filosofica e il carattere eccezionale del nostro collega. Per conseguenza svolgiamo alcune considerazioni unicamente rispetto a tre opere: il regolamento di disciplina, gli Appunti di Storia e gli Scritti riguardanti Federico II di Prussia.

Opera veramente magistrale è il sovraccennato regolamento di disciplina dell' Esercito italiano.

S. E. il Ministro Ricotti nell' anno 1872 conscio della necessità di introdurre modificazioni nel regolamento del Re Carlo Alberto, regolamento che era stato modificato solo lievemente da Alfonso Lamarmora nel 1850, commise al nostro Collega la cura della forma per il nuovo regolamento divisato.

S. E. il Ministro Ricotti anzitutto discusse a lungo col nostro Socio rispetto alle modificazioni vagheggiate. Nelle varie conferenze

il Fogliani svelò una maturità di idee genialissime intorno alle questioni disciplinari; e per conseguenza il saggio e accorto Ministro troncò ogni discussione; e disse al nostro Collega: non occorre che noi discutiamo ulteriormente in proposito; Ella ritorni a Modena, mediti e componga il regolamento secondo le parrà opportuno; venga poscia a Roma e riprenderemo le nostre conferenze.

Con febbrile attività il nostro Collega ideò e scrisse il nuovo regolamento in pochi mesi; e ritornò a Roma.

Il Ministro Ricotti subito comprese tutta la elevatezza del vagheggiato ideale, tutta la conoscenza del cuore umano, tutta la profondità delle considerazioni che avevano prodotto il coscienzioso lavoro; e il nuovo regolamento, indubbiamente, il più liberale, il più appropriato al tempo odierno, ebbe quindi in Italia vita per la sapienza del nostro Collega, e per il senno di un Ministro, il quale per la sua molta preveggenza non si cattivò sempre le simpatie di cui era degno.

Saltuariamente noi dal regolamento, dagli allegati relativi e dalle relative monografie, attingeremo elementi per dare qualche idea del valore che ha militarmente, socialmente, filosoficamente il lavoro del nostro Collega.

Delle modificazioni introdotte nel nuovo regolamento, alcune riguardano la forma estrinseca, altre riguardano la forma intrinseca ossia l' ordine delle idee e lo spirito che informa tutte le prescrizioni del regolamento medesimo.

Modificazioni riguardanti la forma estrinseca furono la separazione assoluta fra il regolamento di disciplina e quello di servizio interno; dovendo il regolamento di disciplina trattare dei doveri di tutti i militari indistintamente, e il regolamento di servizio invece per necessità variare, e quindi essere distinto per le varie armi.

Altra notevole innovazione estrinseca consiste nell' avere raccolto nel Regolamento propriamente detto le Massime supreme, e di carattere diremmo immutabile, perchè essenziali alla costituzione stessa dell'esercito, relegando invece in distinti allegati amessi al regolamento le disposizioni per la loro natura in tutto o in parte mutabili.

Così il regolamento è reso in certo modo perpetuo nella sua parte essenziale mentre è lasciata aperta la via ad introdurre nelle particolari disposizioni tutte quelle innovazioni, che la esperienza, i tempi, i casi, possono per avventura consigliare.

Di maggiore peso sono i cambiamenti nella parte sostanziale del Regolamento; poichè si trattava prima di eliminare da esso tutto ciò che non riguardava propriamente la disciplina militare; in secondo luogo di ordinare razionalmente tutto il rimanente, ossia di stabilire un principio logico supremo, che fosse come la base del tutto, e da cui tutte le parti ricevessero luce e vigore, deducessero cioè la loro ragione e il loro grado di importanza, e quindi il loro posto nella classificazione.

La meta suprema, alla quale mirò il nostro Collega nel comporre il Regolamento fu il far cessare il dissidio fra l' uomo di pensiero e l' uomo di azione. Per dimostrare come tale meta sia conseguibile Egli si valse di considerazioni storiche e morali in sommo grado appropriate.

Nel modo antico dice il nostro Socio i guerrieri principali erano grandi pensatori in politica al pari che in guerra; ed erano per ogni rispetto i primi personaggi del loro tempo. Di tal modo, per citare alcuni pochi esempi soltanto di un popolo, noi troviamo che i tre più fortunati uomini di stato che la Grecia abbia prodotto furono Solone, Temistocle ed Epaminonda : i quali tutti erano strenni guerrieri. Archita che diede un nuovo indirizzo alla filosofia pitagorica, e Melisso che sviluppò la filosofia eleatica, erano ambedue chiari generali, famosi del pari nella letteratura e nella guerra. Fra gli oratori più eminenti Pericle, Alcibiade, Demostene ed Eschine erano tutti membri della professione militare come Eschilo e Sofocle. Il più filosofo di tutti gli storici greci fu certamente Tucidide; ma egli, come Senofonte e Polibio, occupò alti posti militari; e in varie occasioni riuscì a mutare le sorti della guerra.

Paul Louis Courier in Francia e Ugo Foscolo in Italia, entrambi militari ed entrambi sommi maestri di stile, l' uno di prosa l' altro di poesia, erano militari. Erano militari Foy storico ed oratore e Armand Carrel storico e giornalista. Erano militari il Colletta, il Benedetti e il Lomonaco; e ai tempi nostri quei due tipi antichi di Cesare Balbo e di Massimo d' Azeglio: e quindi è ragionevole concludere che la cultura delle lettere anzichè scapitare si avvantaggia dell' esercizio delle armi; e che ben disse un tale che la penna deve essere temperata con la spada.

Alle considerazioni storiche il Fogliani aggiunge, come già abbiamo accennato, le considerazioni morali.

Il soldato, dice il nostro autore, non è che il cittadino perfetto; il quale fa speciale professione di consacrare ed al bisogno sacrificare sè stesso a difesa della patria e della giustizia. Chi desidera far quattrini si dia al commercio, all' industria, a quella professione che può tornare più fruttuosa: ma chi si consacra alla scienza, alle arti belle deve direttamente e principalmente cercare le soddisfazioni, che risultano dall' esercizio delle proprie facoltà fisiche intellettuali e morali a benefizio altrui. Tutti si deve vivere; questo è vero, come vive il prete dell' altare, quantunque S. Paolo ci tenesse a far vedere che esso viveva dell' umile lavoro delle sue mani: ma, quando si abbia quella modesta indennità che sopperisca ai bisogni fisici, non si deve aspirare ad altro che alle soddisfazioni dell' intelletto e del cuore, che infine sono le più nobili, e le più grandi e le più durevoli della umana natura.

Chi si ponesse in mente di voler proporre comodità e ricchezze alla professione militare otterrebbe precisamente l' effetto contrario a quello propostosi. Per questa arte, come per le scienze, per le lettere, per le arti non c' è che una sola vera ed efficace protezione; e questa consiste in ciò che forma l' aria, la luce, la vita dell'anima, ossia consiste nella libertà.

Non v' è assurdo più grave del pareggiamento che da taluno si fa tra la classe militare e gli altri impiegati; e nella pratica può condurre a funeste conseguenze generando idee false e pretese irragionevoli. In tutti gli altri impieghi è effettivamente retribuito e pagato il lavoro che si presta: ma non è così nella professione militare Ciascun vede che non sono cose che si paghino il coraggio, il valore, la pazienza, l'abnegazione, la sottomissione costante dell'animo all'impero della disciplina, le ferite, la morte.

Dunque, se negli altri impieghi si compensa il lavoro e questo compenso deve essere determinato secondo le leggi della pubblica economia cioè secondo la ricerca e la offerta, nella professione militare al contrario non è data che una idennità per il tempo che vi si impiega: e questa idennità non deve essere proporzionata che ai bisogni; e i bisogni non sono valutati che dietro la estimazione di ciò che è indispensabile perchè il militare possa compiere il suo dovere; ed appunto questa sproporzione fra ciò che si fa e il compenso che si riceve costituisce la dignità di questa professione e la differenza essenziale fra essa e le altre.

Con molta chiarezza il Fogliani tratta pure dei diritti e doveri dell' inferiore verso il superiore e del superiore verso l' inferiore: diritti e doveri che da una parte e dall' altra hanno per unico scopo di rafforzare quanto è possibile e rendere più pronta ed efficace la cooperazione delle parti al tutto.

Viola dice il nostro Autore la subordinazione l' inferiore che ricusa la obbedienza dovuta al superiore, o gli manca del dovuto rispetto, o in qualsiasi modo tende con parole o con fatti a scalzarne l'autorità: e la viola pure il superiore che altera i rapporti stabiliti dalla subordinazione, sia con l' accollare ad un suo inferiore tranne il caso di assoluta necessità gli incarichi e le responsabilità che spettano a lui in virtù del grado che occupa, sia con l' intromettersi ad esercitare esso, per un eccessivo e malinteso amore del bene del servizio, quelle attribuzioni che propriamente appartengono all' inferiore in virtù del grado che esso occupa.

La meta cui mira il nostro Socio appare indirettamente anche in un bellissimo discorso inaugurale, nel quale parlò dell' Ammiraglio Mocenigo, che fu alunno del Collegio di S. Carlo e morì combattendo contro i Turchi nella battaglia dei Dardanelli li 19 Luglio del 1657.

« Le diversità, che esistono per legge di natura nel campo intellettuale, diceva il Fogliani ai suoi alunni, non esistono nel campo morale. Qui tutti sono pari; e quando ciascuno compie il proprio dovere, l' ultimo dei marinari il più umile fantoccino sono uguali all' Ammiraglio e al generale in capo, del cui nome si intitolano le vittorie. I padri vostri a prezzo di tormenti di prigionie, di esilii, di ferite, di morti vi hanno lasciata una Italia unita e libera: ma la libertà è come il mare, il più potente affratellatore delle terre e della umanità, il datore della ricchezza e della salute; ma il mare ha le sue tempeste e non dona i suoi tesori se non a chi ha braccia robuste e cuore saldo da poterlo padroneggiare. Tale è il regime della libertà che non vuole gente avvezza a sedere in piume e a poltrire sotto coltre; ma vuole energia di corpo, di mente, di cuore, e l'anima del pari come il braccio gagliarda ».

La nostra opinione rispetto alla efficacia del nuovo regolamento di disciplina, ossia rispetto al suo valore nella società odierna, apparirà dalle considerazioni che seguono.

Hannosi, noi pensiamo, nel mondo correnti di idee che si espandono con la intensità e la violenza di una tempesta. Hannosi invece lente infiltrazioni di idee, che modificano gradatamente un mezzo sociale senza cattivarsi l' attenzione, non solo delle masse ma anche di quella parte del pubblico che è la più studiosa e intelligente.

Il regolamento di disciplina appartiene alla seconda serie delle idee sovraccennate; e però non fu, fuori del campo militare, giudicato il regolamento secondo il suo valore rispetto alle sue conseguenze seriissime per tutta la vita civile, politica e militare della nazione. In 39 anni decorsi dalla pubblicazione del nuovo regolamento, unicamente nell' ultimo decennio si ebbero occasioni per vederne gli effetti; ma solamente rispetto alla vita interna dello Stato.

La occupazione delle regioni libiche rivela ora pienamente il valore delle nuove prescrizioni militari; e porge la prova che furono queste largamente concepite; e che sono in sommo grado rispondenti alle esigenze delle milizie odierne.

I nostri ufficiali avevano già rivelata la loro virtù di poter tollerare con maravigliosa calma gli insulti delle irose masse tumultuanti. Ora rivelano luminosamente la virtù di rimanere in campo tetragoni ai più furiosi assalti.

Se nel morire, come immaginavano gli antichi, ebbe il compianto Collega la prescienza e la preveggenza del futuro, potè morire consolato: perchè avrà veduto rigermogliare la magnanimità ed il valore antico a Tripoli, a Bengasi, ad Homs, a Derna, a Tobruk, a Prevesa: avrà veduto i figli della nuova Italia libera e unita col loro eroismo attestare al mondo che l' iridato vessillo degnamente aleggia dominatore nelle terre africane, sopra le quali per secoli sfolgorarono imperiose le aquile romane.

Opera veramente esimia è pure la pubblicazione che il nostro Autore modestamente intitolò « Appunti di Storia ».

Nelle pagine dense di profonde considerazioni il Socio giudica gli avvenimenti con serenità insuperabile; e non cade mai nel difetto di volere con soverchio rigore assoggettare sempre dogmaticamento a principii preconcetti gli eventi umani, mentre ha la facoltà di sceverare sempre nel fenomeno sociale l' elemento temporaneo dal permanente.

Spigliato e vario nella architettura del periodo, brioso nelle concezioni, non volgare nello stile, trascina il lettore con singolare vigoria.

Per amore di brevità noi ci limitiamo a presentare la sola pagina in cui lumeggia le condizioni della letteratura nei tre secoli di decadenza che si ebbero in Italia dopo il quattrocento, e nota come la libertà del pensiero non sia stata sempre uguale nelle varie nazioni.

« Quando, dice il Fogliani, alla metà del secolo XV fu fatta la scoperta della stampa che doveva cambiare la faccia alla terra e assicurare per sempre alla umanità il progresso, la scienza, la libertà, quella cultura che prima dall' Italià filtrava a rivi negli altri paesi vi si riversò a torrenti; e il Risorgimento da italiano diventò europeo, e quindi mondiale. Allora anche oltre le Alpi si fondarono, principalmente in Germania e in Francia, colonie di dotti, di Umanisti, ardenti di studiare le lingue e le letterature classiche, e di propagare dovunque la coltura; dotti, che ben presto furono in grado di emulare i dotti italiani.

Gli Umanisti tedeschi di costume più semplice, e se vuolsi più rozzo, ma di sentimento civile e religioso più serio e più profondo, nella lettura dei classici anteposero alla forma lo studio delle idee. Di qui venne quella profonda e vasta preparazione morale e intellettuale delle menti settentrionali.

La massima parte degli Umanisti italiani addetti alle corti erano segretari e ambasciatori dei principi e delle città: essi componevano le lettere, che i principi si mandavano l' un l' altro, e pronunciavano discorsi nelle circostanze solenni; erano insomma arnesi di corte, e quindi assai più che ad istruire miravano a piacere e a dilettare; e gareggiando fra loro a chi meglio scrivesse in latino non si preoccupavano che della scelta delle parole, dello stile corretto puro ed elegante, ciceroniano o virgiliano, e della composizione artistica del discorso. Di qui spenta ogni originalità, di qui sostituito lo studio esclusivo delle parole e della frase allo studio delle cose, la rettorica surrogata alla eloquenza separato il sentimento dalla parola, la lettura dall' azione, la forma dal pensiero. Di qui il disdegno superbo della lingua volgare in tutto il secolo XV, come se per il popolo non ci avessero ad essere lettere, e queste fossero appannaggio soltanto delle corti: di qui le vilissime adulazioni ai potenti

principi da cui ottenevano protezione e donativi, e de' quali in ricambio con belle frasi mantellavano i delitti e la tirannide; e quindi in proporzione della coltura e della eleganza sempre più raffinata degli ingegni fatta più profonda la abbiezione dei caratteri.

Ciò spiega la differenza che poi vi fu tra la storia civile e politica degli uni e degli altri paesi nei tre secoli che seguirono: cioè lo stabilimento della Riforma religiosa, e quindi della libertà intellettuale e poi politica nei paesi di origine Germanica: e la schiavitù intellettuale e politica delle razze Latine, le quali ora soltanto si vengono risollevando ».

Il limitato tempo concesso ad una commemorazione ci obbliga a richiamare tosto rapidamente la attenzione intorno al carattere e alla coltura del compianto Amico, e intorno alle sue occupazioni negli anni della virilità e della vecchiaia.

Nel 1866 il Fogliani durante la campagna fu sempre fra gli ufficiali componenti il quartiere generale di La Marmora; e, terminata la guerra, tornò all' insegnamento nella Scuola Militare.

Fu poscia il Fogliani per due anni a Roma, ove dal Ministero fu nominato Direttore della Rivista Militare. Dopo la promozione a maggiore fu infine il Fogliani ascritto prima alla milizia mobile, e poscia alla riserva.

Appena fu ascritto alla milizia mobile il nostro Collega appagò il suo desiderio di tornare a Modena, ove simpatie e amicizie lo attraevano irresistibilmente; e il Collegio di San Carlo gli affidò l' insegnamento delle lettere italiane nel liceo insieme con l' ufficio di preside. Con intensa cura, con larghezza ed altezza di pensiero veramente eccezionali attese il nostro Socio al sovraccennato insegnamento, finchè la malferma salute più non gli permise di sottostare al peso delle cure didattiche.

Come Foscolo e Paul Louis Courier, il Fogliani fu infine letterato e militare per amore dei classici e della terra natia; non per fermo divisamento di voler compiere una regolare carriera.

Incurante degli onori, non volle mai far valere le sopportate fatiche ed i pericoli corsi per la redenzione italica; e visse sempre vita semplice, modesta, esemplare nel santuario della adorata Famiglia e nel cenacolo degli intimi amici.

Era il Fogliani conoscitore profondo delle letterature italiana, francese, e latina, ed aveva per Foscolo e per Federico il Grande di Prussia una ammirazione illimitata.

L' autore del Carme alle grazie con la classicità veramente greca del pensiero e della forma e con la fierezza inflessibile dell' animo esercitava un fascino indicibile sopra il nostro Socio. Non minore, fascino esercitava il coltissimo monarca prussiano, amico di Voltaire, eroico sovrano di minuscolo Stato che osava tener fronte agli eserciti dei più potenti monarchi europei coalizzati per annientarlo, principe studiosissimo, che alla vigilia di una battaglia decisiva nella quale avrebbe giuocato vita e trono scriveva lettere irose perchè non gli era stata inviata una nuova grammatica greca pubblicata da pochi giorni.

Tali predilezioni valgono a rivelare i sentimenti, che fervevano nell' animo nobilissimo del nostro Collega, più assai delle poco rispondenti nostre frasi; e però le abbiamo accennate.

Fu il Fogliani costante oltre ogni dire nelle amicizie. Herder dice che delle contratte amicizie alcune presto vanno scemando, ed hanno fine come le ombre mattinali; altre invece come le ombre serali sempre vanno crescendo, e solo tramontano con la fiamma vitale. Tale asserzione del filosofo tedesco si presentava alla nostra mente ricordando la commovente cordialità del nostro Collega quando ancora negli ultimi anni di sua vita incontrava un vecchio amico. Il suo sorriso turbava il ritmo di cuori senili, che credevansi temprati e tetragoni a qualsivoglia emozione.

Nudrito di classicismo il Fogliani parlando, scrivendo, combattendo, sempre svelava come Alfieri un animo insaziabilmente avido di libertà, insofferente di ogni pressione, sdegnoso di ogni adulazione, inchinevole unicamente ai caratteri inflessibili, schietti e dignitosi.

Tali doti dell' animo rendevano l' uomo simpatico in sommo grado. Correndo col pensiero a non dimenticabili serate letterarie di anni omai lontani, alle quali degnavasi presiedere il Carducci che spessissimo recavasi a Modena per ricerche nella biblioteca estense, ricordiamo la compiacenza del grande Poeta per opinioni del nostro Socio sempre elevate sempre espresse con insuperabile schiettezza; e indubbiamente non dimenticheremo mai tutto il calore, diremmo tutta la irruenza, con cui il Vate classico abbracciò il Fogliani per

una nuova arditissima classificazione riguardante i letterati di qualsivoglia tempo.

Per la accumulata erudizione, per il gusto affinato negli aurei scrittori, per la memoria sempre tenacissima, per il criterio sano e saldamente radicato nello studio dei grandi pensatori, il nostro Collega era fonte di cognizioni preziose, veramente inesauribile.

Di Fogliani si poteva dire ciò che Goethe disse di Herder: non è possibile parlare con lui senza acquistare qualche nuova cognizione.

Un trattato di geografia pregevolissimo, un dizionario latino, parecchie mirabili monografie riguardanti Federico il grande, una pubblicazione riguardante i Sepolcri di Foscolo, articoli moltissimi in diarii e in riviste rimangono a testificare la svariata operosità del caro Estinto.

Quando ogni comune italico studierà con intelletto di amore la vita de' suoi figli che lottarono ed operarono come soldati e come scrittori per la indipendenza patria, la semplice e modesta figura di Tancredi Fogliani, tutta vibrante per ideali generosi e virili, emergerà intera per la virtù di qualche studioso avente la necessaria lena per commemorarla degnamente.

RELAZIONE

DEL

SEGRETARIO GENERALE DELLA R. ACCADEMIA

FERRARI-MORENI CONTE GIORGIO

SUGLI

ATTI ACCADEMICI DELL'ANNO 1909-1910 (1)

Onorando Presidente, Egregi Colleghi.

Il vecchio Segretario generale anche nella inaugurazione dell' anno accademico 1910-1911, ha l' onore di darvi relazione degli atti dell' Istituto relativamente allo scorso anno.

Cinque volte vi riuniste dal 20 novembre 1909 al 28 gennaio 1910 in adunanza generale; dapprima per nominare una commissione di 5 Soci incaricati di modificare lo statuto accademico vigente sino dal 18 marzo 1860, poscia per udire il diligente ed applaudito referto della Commissione stessa, nel quale furono esposti i criteri e le massime stabilite e seguite nelle proposte modificazioni, ed ascoltare la lettura del testo del nuovo statuto e infine per discuterne gli articoli e approvarne l' insieme.

Il 9 dicembre 1909 fu tenuta altra adunanza generale per inaugurare l' anno accademico 1909-10. Secondo la consuetudine fu dato conto degli atti dell' anno antecedente 1908-09 ed esposta ed approvata l' azione amministrative finanziaria dell' Istituto nel detto periodo di tempo.

Si provvide poi alle vacanze di alcune cariche accademiche, e furono nominati tre soci attuali (2) un corrispondente (3) ed un onorario (4).

(1) Letta in Adunanza generale del 29 novembre 1910.
(2) Dott. Giulio Bariola, Prof. Carlo Ferrai, Prof. Siro Solazzi.
(3) Prof. Giuseppe Sforza.
(4) Prof. Luigi Bianchi.

Ed ora brevemente dirò delle memorie lette dagli Accademici nelle sei adunanze di Sezione che ebbero luogo nell' anno passato. E prima delle comunicazioni fatte dai Colleghi matematici:

Il socio UGO AMALDI in 2 sedute trattò dei « Gruppi continui infiniti di trasformazione puntuale dello spazio ordinario, e comunicò uno studio del prof. Italo Amaldi » « Sul quadrangolo piano ».

Il socio FRANCESCO NICOLI lesse una sua nota intitolata « Rappresentazione intuitiva degli spazi punteggiati dell'ennesimo grado ».

Tra gli Accademici cultori della scienza medica il Socio M. L. PATRIZI, in due diverse adunanze, presentò con tracciati annessi, una nota dal titolo « Un nuovo risultato nella tecnica dei riflessi vascolari e l' ipotesi somatica delle emozioni » e due suoi lavori intitolati « Nuovo testo mentale, un indice autografico e incosciente del potere inibitore ». Il punto di mira dell' attenzione e la localizzazione dell' espressione motrice. Ed a nome del laureando G. Manni una nota su: « La simultaneità del lavoro muscolare votontario unilaterale o simmetrico » corredandola in seduta con dimostrazione sperimentale.

Il socio prof. C. FERRAI, riferì i risultati di « Ricerche sullo stato del sangue nell' avvelenamento da acido pirogallico ». A nome poi dei Dottori B. Baecchi, P. Rossi, e C. Ragazzi presentò lavori sulle « Variazioni delle proprietà biologiche del siero di sangue in alcune intossicazioni sperimentali » sul « Contenuto in Adrenalina delle capsule surrenali in alcuni avvelenamenti sperimentali » sulle « Variazioni del potere opzonico del siero di sangue in alcune intossicazioni sperimentali ».

Il socio prof. G. OVIO presentò tre note dal titolo: « La formula dell' ingrandimento del foro stenopeico — Sulla proiezione della imagine — Sull' angolo visivo ». In altra seduta comunicò poi un suo « Secondo contributo allo studio della prospettiva dal lato oculistico.

A nome dei Dottori G. Garofani, U. Tirelli e C. Ferrarini, il Socio prof. A. MAGGIORA comunicò nuove « Osservazioni intorno alle proprietà biologiche, del virus del tifo essudativo, e alla forma nervosa cronica del tifo stesso. »

In altro campo scientifico udiste il referto del socio prof. C. BONACINI, « Su alcuni lanci di palloni piloti eseguiti nell' Osservatorio geofisico di Modena, e il socio prof. D. PANTANELLI vi parlò dei petroli dell' Emilia, indicando le loro proprietà e determinando

la proporzione dei prodotti principali che si possono ricavare da quel prezioso liquido.

Alla classe poi de' lavori letterari appartengono queste altre comunicazioni. Del carteggio degli italiani col botanico Carlo Clusio conservato nella Biblioteca Leidense trattò il socio prof. G. B. De Toni. Il socio prof. P. Sabbatini narrò le vicende per cui un' epigrafe in memoria del matematico Giuseppe Tramontini dettata dall' insigne latinista e archeologo Michele Ferrucci rimase inedita. Il socio E. P. Vicini presentò una monografia sopra antichi statuti notarili modenesi contenuti in un prezioso codice miniato del secolo XIV, che si custodisce presso l' Archivio Notarile di questa città. Una nota del prof. U. Renda su « Le Rime volgari di Antonio Tebaldo contenute nei Codici Estensi fu infine presentata dal socio prof. V. Santi.

Nelle nostre adunanze vennero poi ricordati, deplorandone la morte, i colleghi prof. comm. **Giovanni Bezzi** che cessò di vivere il 10 febbraio ultimo scorso, e l' on. Avvocato Prof. **Lodovico Ferrarini** improvvisamente mancato alla vita il 22 maggio prossimo passato. Il primo fu degnamente commemorato nell' adunanza di sezione del 26 febbraio dal Socio prof. comm. G. Cesari. Alla memoria dell' altro rese un tributo di rimpianto e di onore il Presidente dell' Accademia in seduta del 22 giugno e ne illustrò ampiamente l' opera come insegnante e come scienziato il socio prof. B. Dusi nell' ultima adunanza tenuta il 29 di detto mese. Questa ultima adunanza accademica di sezione, è bene il notarlo, a differenza delle altre, ebbe luogo nella Sala Magna del Collegio S. Carlo, la Direzione del quale, seguendo antiche tradizioni, gentilmente concesse. Ma durante le vacanze l'Accademia perdette anche il suo dotto e stimato socio corrispondente **Giovanni Setti**. Nella ancor verde età di 54 anni in Rocchetta di Guiglia il 10 agosto prossimo passato finì la sua mortale troppo breve carriera. Letterato illustre, docente stimato ed amato, cittadino chiarissimo uomo buono e retto; la sua scomparsa fu compianta da quanti lo conobbero. Le molte ed importanti pubblicazioni del prof. cav. G. Setti in materia di filologia, archeologia classica e letteratura greca restano a prova del suo ingegno e della sua operosità.

Oltre la perdita dei tre nominati nostri Colleghi, Soci attuali, dobbiamo deplorare anche quella di un insigne nostro Socio onorario, di **Giovanni Schiapparelli**. Senatore del Regno, onore della scienza ita-

liana ed astronomo di fama mondiale: mancò alla vita in Milano il 4 luglio 1910. Fu ascritto nel 1887 alla nostra Accademia per la quale nutrì sempre stima ed amore, dimostrato dalla premura con cui mandava alla nostra biblioteca i preziosi lavori che andava pubblicando. Alle solenni estreme onoranze rese all' illustre scienziato in Milano la Presidenza curò che fosse rappresentata l' Accademia modenese affidandone l' incarico al Presidente del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Dei cari ed illustri Colleghi defunti grata perdurerà fra noi la memoria.

Alte onorificenze ottennero poi alcuni nostri soci. Il Senatore Giacomo Ciamician celebre scienziato professore di chimica nell' Università di Bologna fu pochi mesi fa nominato *honoris causa* dottore dell' Università Scozzese di Glasgow.

E il consiglio dell' Ordine civile di Savoia, radunatosi il 25 corr. mese sotto la presidenza dell' on. Luzzati ha deliberato di proporre al Re la nomina a cavaliere dell' Ordine di Savoia insieme ad altri del prof. Giacomo Ciamician.

Al Socio prof. Ugo Amaldi docente di geometria analitica e proiettiva alla nostra Università fu assegnato un premio dall' Istituto Scientifico Letterario di Milano nella solenne adunanza annuale del gennaio 1910.

E il socio prof. comm. Giovanni Generali Direttore della Scuola di medicina veterinaria nella nostra Università collocato a riposo fu nominato Grand' Ufficiale dell' Ordine della Corona d' Italia.

Il socio permanente prof. cav. uff. Dante Pantanelli fu chiamato a far parte del R. Comitato Geologico istituito presso il Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio.

Il nostro Vice Segretario generale prof. cav. Venceslao Santi distinto cultore di studi storici fu meritamente ascritto all' ordine cavaleresco della Corona d' Italia.

Nella circostanza poi che l' Italia riconoscente celebrava, nel giorno decimo del p. p. agosto il centenario della nascita di Camillo Cavour, il Santi, nel giornale la *Provincia*, opportunamente pubblicava un articolo intitolato: « Camillo Cavour e l' Accademia di Scienze Lettere ed Arti in Modena ». Richiama il Santi a memoria che l' Accademia nella adunanza generale del 28 Marzo 1860, nella quale veniva approvato un nuovo più liberale statuto del sodalizio,

nominò socio onorario il Cavour, e che questi li 14 aprile con lettera ringraziò del nobile titolo conferitogli. Il nostro Istituto non potè a lungo fregiarsi del nome dell' illustre statista, che il 6 giugno 1861 cessò di vivere. Tanta jattura com' era naturale fu altamente deplorata dall' Accademia.

In adunanza di Sezione tenuta il 12 giugno di detto anno il socio prof. Lodovico Bosellini esaltò i meriti del defunto socio onorario, e nell' Adunanza del 30 del detto mese il Presidente cav. Carlo Malmusi con nobili parole lamentò e rimpianse la perdita dell' eminente diplomatico, proponendo, a conclusione del suo discorso, che l' effigie di Camillo Benso Conte di Cavour fosse collocata nella sala delle adunanze accademiche. La proposta fu accolta con unanime acclamazione dagli Accademici, e poi messa in atto. Qui ancora, egregi Colleghi, vedete l' immagine dell' illustre nostro Socio onorario, e sotto di essa potete leggere l' affettuosa iscrizione che ricorda il rimpianto dei nostri antecessori per la morte del grande italiano.

Il materiale librario scientifico dell' Accademia si è venuto nello scorso anno aumentando per lo scambio degli Atti, Memorie e Rendiconti a noi inviati da Istituti Italiani ed esteri nostri corrispondenti, a quali abbiamo recentemente spedito il Volume VIII delle nostre Memorie e presto spediremo il IX. Sono già iniziate le stampe dei Volumi X e XI.

La Presidenza, interpretando il desiderio dei Soci di vedere sollecitamente pubblicate le loro Memorie, ha continuamente eccitato il Tipografo ad eseguire tutto il lavoro che esso con i suoi limitati mezzi può fare, e si va escogitando il modo di ottenere che possibilmente ogni Memoria comunicata all' Accademia venga immediatamente stampata. Questo scopo più facilmente si raggiungerà quando, terminata la 3.ª Serie, verranno introdotte nella stampa dei volumi della 4.ª opportune modificazioni.

La collezione dei libri filosofici a noi legata dal fu nostro Socio Giovanni Caroli è stata ultimamente aumentata con l' invio fatto di 182 libri ed opuscoli da suo figlio Enrico, il quale inoltre mandò in dono all' Accademia un ritratto di suo padre pregevole dipinto del prof. Achille Talarico, pittore napoletano.

Sono notevoli altri fatti accaduti nel decorso anno. Il primo si è la visita fatta da S. E. l' on. Credaro Ministro della Istruzione Pubblica nel Settembre decorso al Collegio di San Carlo e alla resi-

denza e biblioteca dela nostra Accademia ivi ospitata. L' altro riguarda l' amministrazione economica: l' assegno accademico fu dal Governo aumentato di mille lire, mettendo però a carico dell' Accademia lo stipendio del suo bidello. L' altro d' assai maggior importanza riflette il decoro del nostro antico Istituto.

Voi già sapete, Egregi Colleghi, che il Consiglio di Stato approvò senza alcuna modificazione il nuovo nostro Statuto e che S. M. il Re appose la sua firma non solo al Decreto di approvazione dello statato (2 giugno 1910) ma anche al Decreto (7 settembre 1910) col quale i Soci attuali e permanenti vengono nominati Soci effettivi

E così questa Reale Accademia ha riacquistato il grado che le compete per le sue antiche e recenti benemerenze verso le scienze le lettere e le arti.

Perchè poi il nostro Istituto possa conservarsi nella sua floridezza è necessario, Egregi Colleghi, che la vostra operosità non venga meno, e che nella elezione di tutte le cariche accademiche e nella nomina di nuovi Soci, che siete chiamati a fare questa sera, procediate con l' intenzione che la vostra scelta cada su persone che diano affidamento della loro attiva e proficua collaborazione non solo alla direzione e amministrazione dell' Accademia; ma pur anche alla continuazione del fecondo lavoro scientifico letterario ed artistico che contenuto nei poderosi volumi delle Memorie accademiche mantenga ed accresca la fama del nostro Istituto.

RELAZIONE

DEL

SEGRETARIO GENERALE DELLA R. ACCADEMIA

FERRARI-MORENI CONTE GIORGIO

SUGLI

ATTI ACCADEMICI DELL'ANNO 1910-1911 (1)

Onorando Presidente, Egregi Colleghi.

Prestate anche questa volta benigna attenzione alle parole colle quali vengo ad esporre il riassunto degli Atti dell' Accademia e gli avvenimenti che la riguardano riferibilmente all'anno decorso **1910-1911.** E prima dirò di quanto si riferisce alle tre adunanze generali. La riforma statutaria accademica avvenuta nello scorso anno, della quale feci cenno nella mia ultima relazione annuale, ha avuto uno strascico: il riconoscimento cioè di un errore materiale occorso nel testo del nuovo statuto e precisamente all' art. 27 nel quale si cita l' art. X invece del XI dello statuto vecchio. Si è chiesta al Ministero la correzione dell' errore; ma non ancora si è ottenuta risposta definitiva che non potrà certamente mancare in senso favorevole, dietro gli schiarimenti dati in proposito al Ministero.

La detta riforma rese necessaria la rinnovazione di tutte le cariche, e quella del Presidente prof. cav. uff. Francesco Nicoli fu approvata con R. Decreto del 5 gennaio 1911.

Nella seconda adunanza generale fra altro fu letta dal socio prof. CARLO BONACINI una dotta e bella commemorazione dell' illustre astronomo Giovanni Schiaparelli.

E nella terza finalmente il socio prof. cav. PIO SABBATINI commemorò degnamente il compianto socio prof. cav. Luigi Olivi.

(1) Letta nell' Adunanza generale del 2 dicembre 1911.

Tre furono le adunanze generali e tre furono le adunanze di Sezione tenute nel 1910-1911. Se scarso può sembrare il loro numero, presero però parte in quelle tre riunioni otto Accademici che sopra undici diversi argomenti presero la parola.

Il Presidente prof. Nicoli con sua lettera letta nell' Adunanza del 25 gennaio p. p. dal Direttore di Sezione prof. Vassale commemorò il centenne patriota capitano Francesco Prampolini, ai funerali del quale egli rappresentò la nostra Accademia; e in altra adunanza del 17 giugno u. s. comunicò come il nostro Istituto prendesse parte per mezzo de' propri rappresentanti alle feste onorarie e commemorative dei Senatori Capellini e Pacinotti e di Carlo Matteucci, rispettivamente celebrate a Bologna, a Pisa e a Forlì.

In materia giuridica il Socio prof. Siro Solazzi presentò due suoi lavori; il primo sul tema « Di alcuni punti controversi nella dottrina romana dell' acquisto del possesso per mezzo di rappresentanti » l' altro sul tema: « L' errore del procuratore e il concetto giustinianeo della rappresentanza ».

Parecchie memorie furono lette relative all' arte sanitaria e alla materia medica.

Il Socio prof. Arnaldo Maggiora, a nome del dott. Romano Maggiora, riferì intorno a « Ricerche batteriologiche e endemiologiche su l' infezione pestosa nell' uomo e nei ratti; il Socio prof. Vassale, a nome dei dottori A. Massaglia e M. Tirelli presentò una relazione su « L' epidemia colerica di Cerignola nell' anno 1910 illustrata da fotografie e diagrammi » e il Socio prof. Giuseppe Sperino comunicò un lavoro del prof. R. Simonini sul tema: « Radiografia dello scheletro nell' atrofia muscolare idiopatica infantile ».

Due Accademici si occuparono inoltre di Oculistica. Dal Socio prof. Giuseppe Ovio fu presentato uno studio su « L' imagine ciclopica nello specchio piano » e il Socio prof. Giuseppe Albertotti in un suo studio anatomo patologico trattò del « Micro e macrottalmo congenito.

Riguardo alla Fisica il Socio prof. Carlo Bonacini descrisse poi un Eliofanometro a selezione da lui ideato, dove la registrazione è triplice, cioè avviene separatamente per la parte ultravioletta, per la luminosa e per la ultrorossa della radiazione solare.

Tutte queste Memorie si riferiscono alle Scienze; ma il prof. Albertotti in una sua comunicazione trattò anche un argomento lette-

rario. Diede egli lettura di alcune note riguardanti la vita di Giulio Cesare Cordara dei conti di Calamandrana, ed espose sommariamente il contenuto di 500 lettere del Cordara al Cancellieri, ch'egli fece trascrivere dagli originali esistenti a Londra nel ***British Museum.*** Colà pure si trovano 300 lettere del Tiraboschi al Cancellieri che completano la corrispondenza Cancellieri-Tiraboschi (1776-1704) della quale la Biblioteca Estense possiede una parte cioè le lettere scritte dal Cancellieri al Tiraboschi.

Taluni de' nostri Colleghi, fuori di Modena ebbero onorifici incarichi, diedero prova del loro valore scientifico e furono elevati ad eminenti uffici.

Il prof. G. B. De Toni fu nominato dal Ministero della Istruzione pubblica a far parte della Commissione incaricata a fare studi su Leonardo da Vinci.

Il prof. Ferdinando Iacoli venne eletto membro corrispondente del Comitato nazionale per la storia del risorgimento italiano per tutto il territorio frignanese.

Il prof. Carlo Bonacini per acclamazione fu chiamato, assieme al comm. Giacomo Boni, al Col. Pizzighello e al Principe Ruffo, alla presidenza del Congresso fotografico italiano apertosi in Castel S. Angelo a Roma nello scorso Aprile.

Il prof. Silvio Canevazzi fu nominato a far parte della Commissione incaricata a dirimere alcune difficoltà sorte nello studio dei lavori nel porto di Napoli.

Il prof. Ugo Amaldi al Congresso pel progresso delle Scienze tenuto in Roma nel p. p. ottobre riferì sullo sviluppo della geometria in Italia durante un cinquantennio della vita nazionale, rilevando come in questo campo il genio italiano abbia costruito un corpo di dottrina che conferisce alla nostra scuola geometrica un primato universalmente riconosciuto.

In fine il senatore conte Adeodato Bonasi sino dal 1867 appartenente a questa Accademia, già presidente di sezione al Consiglio di Stato con decreto del 28 settembre u. s. è stato promosso a presidente del Consiglio stesso, e nel giorno 10 del p. p. novembre il Bonasi fu insediato con solenne cerimonia nell'alto ufficio.

Non parmi poi passare sotto silenzio un avvenimento importante che riguarda due nostri soci defunti. Contardo Ferrini già professore nella Università di Modena e poscia in quella di Pavia, universal-

mente stimato come il maggiore romanista dell' epoca non rifulse soltanto come scienziato, ma ancora come uomo di profonda fede e sommamente virtuoso. La sua viva religiosità, le sue eminenti virtù hanno dato ragione di promovere in Roma la causa di beatificazione del grande scienziato moderno: causa che specialmente interessa il mondo milanese. Parte principalissima nella promozione di questa causa l' ha avuto il compianto nostro Socio Luigi Olivi professore esso pure nel nostro Ateneo ed intimo amico del Ferrini.

La nostra biblioteca ebbe durante l' anno decorso notevole incremento per il cambio ricevuto de' nostri volumi colle pubblicazioni degli Istituti scientifici italiani ed esteri corrispondenti, il numero de' quali si è accresciuto. Fra i libri ed opuscoli a noi pervenuti, dei quali sarà reso conto nel bollettino bibliografico, che farà parte del medesimo volume accademico, ricorderò qui solamente gli ultimi sei volumi della edizione postuma delle opere del senatore Tullo Massarani, e l' opera in quattro volumi del Generale Giovanni Cavalli.

Il Presidente, come già accennai, v' informò della partecipazione dell' Accademia alle feste indette ad onore dei Senatori Capellini e Pacinotti e Carlo Matteucci; ma dessa inoltre fu rappresentata al XIV Congresso storico della Società subalpina tenuto in Torino, e si associò all' Accademia Torinese delle Scienze per onorare Amedeo Avogadro alla memoria del quale fu inaugurato un monumento nel giorno 24 del p. p. settembre.

L' Accademia suddetta fece voti diretti ad ottenere dal Ministero dell' Istruzione pubblica la ristampa in edizione economica delle opere del Galileo, e promosse dal Governo il ricupero del manoscritto Udinese « Lex Romana Raetica Curiensis » illegalmente andato all' estero. E ai giusti voti dell' Istituto Torinese aderì pienamente la nostra Presidenza.

Due commemorazioni di avvenimenti millenarii furono nel 1911 celebrate in Francia: la prima a Rouen in ricordo della fondazione del Ducato di Normandia; l' altro a Cluny in memoria della fondazione di quella celebre Abbazia. Ai congressi riunitisi per dette feste commemorative non intervennero rappresentanti dell' Accademia, questa però ebbe cura di manifestare per lettere la propria adesione ai Comitati promotori delle commemorazioni Francesi.

Per cambio di residenza i Soci effettivi Carta, Lugaro e Dionisi, passati il primo alla Braidense di Milano e gli altri rispettivamente

alle Università di Torino e Palermo sono stati ascritti alla classe dei soprannumerarii; ma ciò non ostante fanno ancor parte del nostro consorzio, del quale si resero benemeriti, e al vantaggio del quale vogliam sperare non verrà meno la loro cooperazione.

Non è così de' nostri due Colleghi il prof. cav. Luigi Olivi e il prof. cav. maggiore Tancredi Fogliani venuti a morte il primo presso Treviso il 7 marzo, l' altro in Modena il 23 settembre del corrente anno 1911. Luigi Olivi fu largamente e affettuosamente commemorato dal prof. cav. Pio Sabbatini nell' adunanza generale tenuta il 13 maggio u. s. Del Fogliani prode soldato, buon letterato, da 39 anni ascritto a questa Accademia, nell' ultima nostra generale riunione parlò eloquentemente il prof cav. Chiaffredo Hugues. E ben a ragione fu detto che l' Hugues ebbe un argomento per lui molto opportuno per parlare da par suo, e che il Fogliani non poteva avere un rievocatore migliore dell' amico diletto, che con vibrante, alata, commossa parola seppe interessare l' uditorio, e sollevarlo ad una spirituale altissima ricreazione.

Per ciò credo superfluo soggiungere alcun chè in omaggio dei due compianti Colleghi de' quali con tanto affetto e tanta competenza il Sabbatini e l' Hugues illustrarono le opere ed elogiarono le virtù.

E con questo, Egregi Collegi, credo di aver compiuto il mio dovere. Che se nel segnalare la vostra attività e negli accenni alle vicende accademiche avete notato qualche deficienza vogliatemi con benevolenza avere per iscusato.

APPENDICE

MEMORIE E NOTE

DI

AUTORI NON APPARTENENTI ALL' ACCADEMIA

ISTITUTO DI RÖNTGENOLOGIA DELL' OSPEDALE E DELLE CLINICHE DI MODENA
(Direttore R. BALLI)

Dott. GUSTAVO FERRARI
ASSISTENTE

Sulla saldatura dell' *os occipitis* coll' *atlas*

IMAGINI RADIOGRAFICHE

Approfittando di un recente ed importante mezzo di indagine, quale è quello che ci viene fornito dall' esame radiografico, ho voluto studiare in quattro casi di saldatura dei condili dell' occipitale colle massi laterali dell' atlante come si comporti la trama ossea intermedia, persuaso dell' interesse di una tale ricerca sotto i punti di vista anatomico e radiologico, potendo essa oltrechè condurci a meglio conoscere la disposizione della sostanza ossea in questa trama, darci risultati tali da riuscire di guida al radiologo, qualora egli debba interpretare speciali ombre in radiogrammi dell' articolazione occipito - atlantoidea. A ciò sono stato indotto anche dall' opportunità in cui mi trovo di poter facilmente usufruire di alcuni esemplari facenti parte di una ricchissima collezione di scheletri di criminali posseduta dal Chiarissimo Prof. Sperino, della nostra Università, al quale invio fin d' ora i più sentiti ringraziamenti per le cortesie usatemi.

Non esistono a mia conoscenza lavori di radiografia sull' argomento in parola; la saldatura dell' occipitale colla prima vertebra cervicale è però ben nota, e non è fra le anomalie più rare: (MORGAGNI, BOCKSHAMMER, SANGALLI, SCHIFFNER, FUSARI, TITONE, etc.). Legge, esaminando 1770 crani di individui morti nel circondario di Camerino, solo 11 volte l' ebbe ad osservare, in un rapporto quindi del 0,12 %. Sembra che si abbia più di frequente nei pazzi e nei criminali, tantochè Varaglia e Silva in 60 crani di delinquenti trovarono la saldatura dell' occipitale coll' atlante due volte (3,3 %.); io su 300 crani di criminali maschi, 3 volte (1 %).

Autori speciali si occuparono della causa di una tale anomalia; da alcuni venne invocata la causa patologica, da altri (ALBRECHT e LACHI) fu ammessa una sacralizzazione vertebrale, una tendenza cioè a saldarsi dei pezzi della colonna cervicale analogamente a quanto si fa per la porzione sacrale; altri infine ne fecero una conseguenza di vera e propria anomalia di sviluppo. Ma sulla eziologia della saldatura non è mio compito entrare.

La tecnica usata non fu la stessa per le tre osservazioni.

Le radiografie nei primi tre esemplari (Osservazione I, II e III e fig. I-II e III) furono eseguite a cranio rovesciato e disposto in modo che il piano

dell' articolazione occipito-atlantoidea concidesse coll' orizzontale. Una lastra venne applicata subito al davanti dell' arco anteriore dell' atlante, il tubo dal lato dell' occipite a livello del piano della base, con radio-limitatore disposto orrizzontalmenie in modo che il raggio normale venisse a passare fra l' occcipite e l' atlante all' altezza del piano di fusione, fra i condili e ad uguale distanza da essi.

Nel quarto esemplare, invece, (Osservazione IV) non appartenente alla suddetta raccolta di delinquenti, ma rinvenuto con parecchi altri negli scavi fatti per le fondamenta dell' odierna Clinica Dermosifilopatica (1), ho creduto opportuno, per meglio osservare le particolarità, e più facilmente adattare la lastra ai singoli punti, di eseguire un taglio frontale in modo da dividere il foro occipitale in due semicerchi, uno anteriore l' altro posteriore. La radiografia qui annessa (Osservazione IV, fig. IV) rappresenta il segmento anteriore datoci dalla sezione frontale condotta a traverso i condili dell' occipite e le masse laterali dell' atlante. La lastra radiografica venne applicata sulla superficie di sezione, il tubo, con radiolimitatore orizzontale, come nelle osservazioni precedenti al lato opposto.

Debbo tuttavia aggiungere che trattandosi di una regione molto incomoda da essere riprodotta, allo scopo di più esattamente valutare la disposizione del tessuto nella linea di saldamento, varie altre proiezioni furono eseguite. Le conclusioni quindi di questa mia memoria sono il risultato dell' osservazione di tutte le radiografie eseguite alcune delle quali ommetto per semplificare.

In tutti i casi furono usati tubi semimolli, con scintilla equivalente di 15-20 cent..

Osservazione I. — (N. 29 del catalogo). S. D., contadino, condannato a 6 anni, 11 mesi e 10 giorni di reclusione per omicidio; morto in seguito a tubercolosi polmonare. Età anni 21, statura m. 1,78. Indice craniense 67,64. Dolicocefalo.

Si nota fusione dell' atlante coll' occipitale. Tale fusione è completa in corrispondenza dei condili e delle masse laterali. È appena visibile, all'esame esterno, il limite di divisione fra le due superfici. La fusione interessa, inoltre, la metà destra degli archi anteriore e posteriore; è incompleta nel resto. Le due metà dell' arco posteriore non si continuano, cosicchè esso risulta interrotto sulla linea mediana per circa un centimetro, disposizione questa che fu già presa in considerazione da Humprhy, Allen, Romiti, Lachi, Zoja, e da essi attribuita ad arresto di sviluppo. La faccetta articolare inferiore di destra dell' atlante è ellissoidale col maggior diametro diretto trasversalmente; a sinistra è pressochè circolare. Per la fusione dell' atlante coll' occipitale il *sulcus arteriae vertebralis* di destra è trasformato

(1) R. Balli, *Crani umani rinvenuti nel sottosuolo Modenese.* Comunicazione fatta alla Società dei matematici e naturalisti di Modena, il 9 Maggio 1905.

in foro; a sinistra la metà corrispondente dell'arco dista di 4 mm. dall'occipite e perciò notasi solamente il solco per il passaggio dell'arteria suddetta. Il foro occipitale misura in lunghezza cm. 3,7, in larghezza cm. 3.

Fra le altre particolarità degne di nota, in questo cranio, di forma pressochè ellissoidale, è da rilevarsi la presenza di un unico foro parietale evidente e situato a destra a un cent. dalla sutura sagittale, la presenza, nell'apofisi basilare dell'occipite, di un piccolo canalino basilare mediano a fondo cieco. Nulla di caratteristico nella sella turcica, come risulta dalle ricerche di Busi e Balli (1), che si servirono di tali esemplari per osservazioni radiografiche sulla sella stessa, se si toglie la presenza di sporgenze ossee evidentissime sul dorso della lamina quadrilatera.

Dall'esame radiografico (fig. I) risulta che la conformazione interna dei condili dell'occipite e delle masse laterali dell'atlante saldati è rappresentata alla periferia da uno strato di tessuto osseo compatto dello spessore di uno o due mm. ed al centro da tessuto spugnoso. Non esiste, in questo esemplare, alcuna linea di demarcazione interna fra le due superfici saldate, cosicchè non si ha nessun indice, all'esame del tessuto spugnoso, per poter stabilire quale sia la parte che spetta alle masse laterali e quale quella che spetta ai condili dell'occipitale.

Osservazione II. — (N. 122 del catalogo) T. R., agricoltore condannato ad anni 16 e mesi 8 di reclusione per omicidio, morto in seguito a tubercolosi polmonare, età anni 35, statura m. 1,71. Indice craniense 73,33. Dolicocefalo.

Notasi fusione dell'atlante coll'occipitale. La fusione è limitata ai condili colle superfici glenoidee fra le quali, anche ad un esame esterno, non è possibile stabilire la linea di divisione. La fusione interessa anche la metà destra dell'arco anteriore colla corrispondente regione occipitale. L'arco posteriore qui è completo. La faccetta articolare destra dell'atlante è elissoidale, l'altra quasi circolare. Il foro occipitale misura cm. 2,8 × 2,9.

Fra le altre particolarità notiamo, in questo cranio, di forma sferoidale, la presenza di un unico foro parietale e situato a destra. La sella turcica null'altro presenta di caratteristico che la lamina quadrilatera, la quale è notevolmente strozzata in rapporto della porzione media del corpo e provvista dorsalmente di una spina ben manifesta.

Nel radiogramma (fig. II) i condili dell'occipitale, saldati alle masse laterali dell'atlante, presentano presso a poco le stesse caratteristiche rilevate nel caso precedente. Qui pure notasi alla periferia dei segmenti saldati un tessuto compatto, assai esile però: internamente invece un tessuto spugnoso molto ben evidente. Non si ha una linea di demarcazione interna fra le masse laterale e i condili. È però degno di nota il fatto che il tessuto areo-

(1) A. Busi e R. Balli, *Saggio di uno studio di anatomia normale descrittiva e radiografica della sella turcica e dei suoi annessi.* Comunicazione fatta alla Società Medico-Chirurgica di Modena il 4 Giugno 1910. « Bollettino della Società-Medico-Chirurgica di Modena » 1910-1911.

lare dell'apofisi trasversa, d'ambo i lati, manda in questo esemplare delle gittate ossee esilissime che si perdono nel tessuto spugnoso delle masse laterali dell'atlante, rinforzando le trabecole ossee di questo segmento.

Osservazione III. — (N. 210 del catalogo) L. C. possidente, condannato ad anni 10 di reclusione per lesioni. Età anni 63. Statura m. 1,63. Indice craniense: 76,16. Dolicocefalo.

In questo caso la fusione dell'atlante coll'occipitale è completa; la linea di divisione fra le due ossa è appena segnata della presenza di due fori pressochè circolari in corrispondenza dell'arco anteriore, l'uno a destra della linea mediana più grande, l'altro a sinistra piccolissimo; l'arco posteriore invece si confonde, senza alcuna linea di demarcazione colla porzione corrispondente dell'occipite. Di necessità i due solchi per il passaggio dell' arteria vertebrale, fra le due ossa sono trasformati in orifizi. Il foro intertrasversario destro dell' atlante non è completo. Il foro occipitale misura in lunghezza cm. 3,1, in larghezza cm. 3.

Fra le altre particolarità da menzionarsi, in questo cranio, di forma ovoidale, notiamo che i fori parietali sono rappresentati da esilissimi forellini; molto profondo e talvolta trasformato in un vero canale osseo il solco per l'arteria meningea media.

Nel radiogramma (fig. III), notasi qui pure fra le masse laterali dell'atlante e i condili dell'occipitale un evidente tessuto spugnoso e non si avverte alcuna linea che indichi il limite della pregressa saldatura fra le due superfici.

Osservazione IV. — Sconosciuto. Indice craniense 76,1. Mesocefalo. L'atlante è fuso coll'occipitale, e la fusione è completa in corrispondenza delle masse laterali, pur notandosi ad un esame esterno la linea di divisione fra le due superfici. L'arco anteriore è staccato; l'arco posteriore, molto ridotto in volume, è interotto per un cm. circa nella linea mediana; è saldato nella sua metà destra, libero nella metà sinistra; a destra esiste un solco per l'arteria vertebrale, a sinistra invece un foro. La faccetta glenoidea inferiore di sinistra è più grande della destra. L'apofisi basilare è corta e stretta. Nelle grandi ali dello sfenoide notansi a destra due orifizi, a sinistra uno solo, i quali comunicano coll'interno della cavità cranica. Il foro occipitale misura in lunghezza cm. 3,3; la larghezza non si potè misurare pel deterioramento subito dal cranio in questo senso.

La forma del cranio ricorda la elissoidale, è leggermente cuneato con ristrettezza sentita alle pareti laterali, più specialmente in rapporto coll'*asterion,* dove presenta una specie di infossamento. La sutura sagittale, la coronale, la lambdoidea, la frontosfenoidale mancano. Dei fori parietali uno solo, molto ampio, trovasi nel centro della sutura sagittale ossificata a 9 mm. dalla coronale pure ossificata, ed uno più piccolo sulla parietale ossificata di sinistra alla distanza di 3 cm. dal primo.

Come più sopra esposi, in questo esemplare fu condotta una sezione, secondo un piano frontale perpendicolare al piano del foro occipitale, e passante per le masse laterali dell'atlante, nei punti cioè dove era più completa la fusione. Del segmento anteriore fu eseguita la radiografia (fig. IV).

Nel radiogramma di questo esemplare, si osservano ancor meglio i particolari più sopra indicati. Il tessuto compatto che attornia i condili dell'occipitale fusi colle masse laterali dell'atlante è ben evidente e in certi punti assai spesso. Lo spessore massimo di tale tessuto corrisponde alla linea di divisione fra i due segmenti, come si può rilevare sullo scheletro e sul radiogramma; introflettendosi esso a mo' di sprone a traverso il tessuto spugnoso viene a delimitare anche all'interno più o meno nettamente i due segmenti. Il tessuto spugnoso dei condili e delle masse laterali dell'atlante si continua con quello della porzione basilare dell'occipitale.

In nessuno dei tre esemplari risulta, come taluno afferma, che nei condili le lamelle della spongiosa iradiino nel foro condiloideo anteriore.

Tali osservazioni ci permettono di raccogliere i seguenti dati radiografici, alcuni dei quali trovano riscontro nei dati già fornitici dalla anatomia sistematica; gli uni servono di conferma agli altri e ambedue si completano nella ricerca:

I. La fusione dell'occipitale coll'atlante può essere completa od incompleta.

II. I condili dell'occipitale possono fondersi colle masse laterali dell'atlante in modo che ad un esame esterno si possa più o meno seguire il limite di tale fusione.

III. Quando i condili dell'occipitale fusi colle masse laterali dell'atlante *non lasciano* ad un esame esterno scorgere nessuna traccia di pregressa saldatura, anche internamente manca fra questi due segmenti un limite di divisione, epperò il tessuto spugnoso ed il tessuto compatto dei condili si continuano in modo uniforme ed ininterotto rispettivamente coi tessuti spugnoso e compatto delle masse laterali.

IV. Quando i condili occipitali fusi colle masse laterali dell'atlante *lasciano* ad un esame esterno scorgere traccia di pregressa saldatura, anche internamente notasi fra i due segmenti un limite di divisione costituito da una specie di tessuto compatto, che si addentra più o meno profondamente, epperò in rapporto di questo punto il tessuto spugnoso dei condili e delle masse laterali rimane come strozzato.

Coll'enunciare i dati fornitici da queste osservazioni, non intendo stabilire leggi alle quali soggiacciano tutti i casi di fusione occipito-atlantoidea; probabilmente parecchie altre varietà si riscontreranno: sarebbe interessante, quindi, che studi analoghi in altri casi venissero pubblicati, e possibilmente di altre regioni del corpo, a complemento delle conoscenze anatomiche, a vantaggio della interpretazione radiologica.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. I. —	Imagine	radiografica	dell' osservazione	I.
» II. —	»	»	»	II.
» III. —	»	»	»	III.
» IV. —	»	»	»	IV.

APPENDICE

MEMORIE E NOTE

DI

AUTORI NON APPARTENENTI ALL' ACCADEMIA

ISTITUTO DI RÖNTGENOLOGIA DELL' OSPEDALE E DELLE CLINICHE DI MODENA
(Direttore R. BALLI)

Dott. GUSTAVO FERRARI
ASSISTENTE

Sulla saldatura dell' *os occipitis* coll' *atlas*

IMAGINI RADIOGRAFICHE

Approfittando di un recente ed importante mezzo di indagine, quale è quello che ci viene fornito dall' esame radiografico, ho voluto studiare in quattro casi di saldatura dei condili dell' occipitale colle massi laterali dell' atlante come si comporti la trama ossea intermedia, persuaso dell' interesse di una tale ricerca sotto i punti di vista anatomico e radiologico, potendo essa oltrechè condurci a meglio conoscere la disposizione della sostanza ossea in questa trama, darci risultati tali da riuscire di guida al radiologo, qualora egli debba interpretare speciali ombre in radiogrammi dell' articolazione occipito - atlantoidea. A ciò sono stato indotto anche dall' opportunità in cui mi trovo di poter facilmente usufruire di alcuni esemplari facenti parte di una ricchissima collezione di scheletri di criminali posseduta dal Chiarissimo Prof. Sperino, della nostra Università, al quale invio fin d' ora i più sentiti ringraziamenti per le cortesie usatemi.

Non esistono a mia conoscenza lavori di radiografia sull' argomento in parola; la saldatura dell' occipitale colla prima vertebra cervicale è però ben nota, e non è fra le anomalie più rare: (MORGAGNI, BOCKSHAMMER, SANGALLI, SCHIFFNER, FUSARI, TITONE, etc.). Legge, esaminando 1770 crani di individui morti nel circondario di Camerino, solo 11 volte l' ebbe ad osservare, in un rapporto quindi del 0,12 %. Sembra che si abbia più di frequente nei pazzi e nei criminali, tantochè Varaglia e Silva in 60 crani di delinquenti trovarono la saldatura dell' occipitale coll' atlante due volte (3,3 %.); io su 300 crani di criminali maschi, 3 volte (1 %).

Autori speciali si occuparono della causa di una tale anomalia; da alcuni venne invocata la causa patologica, da altri (ALBRECHT e LACHI) fu ammessa una sacralizzazione vertebrale, una tendenza cioè a saldarsi dei pezzi della colonna cervicale analogamente a quanto si fa per la porzione sacrale; altri infine ne fecero una conseguenza di vera e propria anomalia di sviluppo. Ma sulla eziologia della saldatura non è mio compito entrare.

La tecnica usata non fu la stessa per le tre osservazioni.

Le radiografie nei primi tre esemplari (Osservazione I, II e III e fig. I-II e III) furono eseguite a cranio rovesciato e disposto in modo che il piano

dell' articolazione occipito-atlantoidea concidesse coll' orizzontale. Una lastra venne applicata subito al davanti dell' arco anteriore dell' atlante, il tubo dal lato dell' occipite a livello del piano della base, con radio-limitatore disposto orrizzontalmenie in modo che il raggio normale venisse a passare fra l' occipite e l' atlante all' altezza del piano di fusione, fra i condili e ad uguale distanza da essi.

Nel quarto esemplare, invece, (Osservazione IV) non appartenente alla suddetta raccolta di delinquenti, ma rinvenuto con parecchi altri negli scavi fatti per le fondamenta dell' odierna Clinica Dermosifilopatica (1), ho creduto opportuno, per meglio osservare le particolarità, e più facilmente adattare la lastra ai singoli punti, di eseguire un taglio frontale in modo da dividere il foro occipitale in due semicerchi, uno anteriore l' altro posteriore. La radiografia qui annessa (Osservazione IV, fig. IV) rappresenta il segmento anteriore datoci dalla sezione frontale condotta a traverso i condili dell' occipite e le masse laterali dell' atlante. La lastra radiografica venne applicata sulla superficie di sezione, il tubo, con radiolimitatore orizzontale, come nelle osservazioni precedenti al lato opposto.

Debbo tuttavia aggiungere che trattandosi di una regione molto incomoda da essere riprodotta, allo scopo di più esattamente valutare la disposizione del tessuto nella linea di saldamento, varie altre proiezioni furono eseguite. Le conclusioni quindi di questa mia memoria sono il risultato dell' osservazione di tutte le radiografie eseguite alcûne delle quali ommetto per semplificare.

In tutti i casi furono usati tubi semimolli, con scintilla equivalente di 15-20 cent..

Osservazione I. — (N. 29 del catalogo). S. D., contadino, condannato a 6 anni, 11 mesi e 10 giorni di reclusione per omicidio; morto in seguito a tubercolosi polmonare. Età anni 21, statura m. 1,78. Indice craniense 67,64. Dolicocefalo.

Si nota fusione dell' atlante coll' occipitale. Tale fusione è completa in corrispondenza dei condili e delle masse laterali. È appena visibile, all'esame esterno, il limite di divisione fra le due superfici. La fusione interessa, inoltre, la metà destra degli archi anteriore e posteriore; è incompleta nel resto. Le due metà dell' arco posteriore non si continuano, cosicchè esso risulta interrotto sulla linea mediana per circa un centimetro, disposizione questa che fu già presa in considerazione da Humprhy, Allen, Romiti, Lachi, Zoja, e da essi attribuita ad arresto di sviluppo. La faccetta articolare inferiore di destra dell' atlante è ellissoidale col maggior diametro diretto trasversalmente; a sinistra è pressochè circolare. Per la fusione dell' atlante coll' occipitale il *sulcus arteriae vertebralis* di destra è trasformato

(1) R. Balli, *Crani umani rinvenuti nel sottosuolo Modenese.* Comunicazione fatta alla Società dei matematici e naturalisti di Modena, il 9 Maggio 1905.

in foro; a sinistra la metà corrispondente dell'arco dista di 4 mm. dall'occipite e perciò notasi solamente il solco per il passaggio dell'arteria suddetta. Il foro occipitale misura in lunghezza cm. 3,7, in larghezza cm. 3.

Fra le altre particolarità degne di nota, in questo cranio, di forma pressochè ellissoidale, è da rilevarsi la presenza di un unico foro parietale evidente e situato a destra a un cent. dalla sutura sagittale, la presenza, nell'apofisi basilare dell'occipite, di un piccolo canalino basilare mediano a fondo cieco. Nulla di caratteristico nella sella turcica, come risulta dalle ricerche di BUSI e BALLI (1), che si servirono di tali esemplari per osservazioni radiografiche sulla sella stessa, se si toglie la presenza di sporgenze ossee evidentissime sul dorso della lamina quadrilatera.

Dall'esame radiografico (fig. I) risulta che la conformazione interna dei condili dell'occipite e delle masse laterali dell'atlante saldati è rappresentata alla periferia da uno strato di tessuto osseo compatto dello spessore di uno o due mm. ed al centro da tessuto spugnoso. Non esiste, in questo esemplare, alcuna linea di demarcazione interna fra le due superfici saldate, cosicchè non si ha nessun indice, all'esame del tessuto spugnoso, per poter stabilire quale sia la parte che spetta alle masse laterali e quale quella che spetta ai condili dell'occipitale.

OSSERVAZIONE II. — (N. 122 del catalogo) T. R., agricoltore condannato ad anni 16 e mesi 8 di reclusione per omicidio, morto in seguito a tubercolosi polmonare, età anni 35, statura m. 1,71. Indice craniense 73,33. Dolicocefalo.

Notasi fusione dell'atlante coll'occipitale. La fusione è limitata ai condili colle superfici glenoidee fra le quali, anche ad un esame esterno, non è possibile stabilire la linea di divisione. La fusione interessa anche la metà destra dell'arco anteriore colla corrispondente regione occipitale. L'arco posteriore qui è completo. La faccetta articolare destra dell'atlante è elissoidale, l'altra quasi circolare. Il foro occipitale misura cm. $2,8 \times 2,9$.

Fra le altre particolarità notiamo, in questo cranio, di forma sferoidale, la presenza di un unico foro parietale e situato a destra. La sella turcica null'altro presenta di caratteristico che la lamina quadrilatera, la quale è notevolmente strozzata in rapporto della porzione media del corpo e provvista dorsalmente di una spina ben manifesta.

Nel radiogramma (fig. II) i condili dell'occipitale, saldati alle masse laterali dell'atlante, presentano presso a poco le stesse caratteristiche rilevate nel caso precedente. Qui pure notasi alla periferia dei segmenti saldati un tessuto compatto, assai esile però: internamente invece un tessuto spugnoso molto ben evidente. Non si ha una linea di demarcazione interna fra le masse laterale e i condili. È però degno di nota il fatto che il tessuto areo-

(1) A. BUSI e R. BALLI, *Saggio di uno studio di anatomia normale descrittiva e radiografica della sella turcica e dei suoi annessi*. Comunicazione fatta alla Società Medico-Chirurgica di Modena il 4 Giugno 1910. « Bollettino della Società-Medico-Chirurgica di Modena » 1910-1911.

lare dell'apofisi trasversa, d'ambo i lati, manda in questo esemplare delle gittate ossee esilissime che si perdono nel tessuto spugnoso delle masse laterali dell'atlante, rinforzando le trabecole ossee di questo segmento.

Osservazione III. — (N. 210 del catalogo) L. C. possidente, condannato ad anni 10 di reclusione per lesioni. Età anni 63. Statura m. 1,63. Indice craniense: 76,16. Dolicocefalo.

In questo caso la fusione dell'atlante coll'occipitale è completa; la linea di divisione fra le due ossa è appena segnata della presenza di due fori pressochè circolari in corrispondenza dell'arco anteriore, l'uno a destra della linea mediana più grande, l'altro a sinistra piccolissimo; l'arco posteriore invece si confonde, senza alcuna linea di demarcazione colla porzione corrispondente dell'occipite. Di necessità i due solchi per il passaggio dell'arteria vertebrale, fra le due ossa sono trasformati in orifizi. Il foro intertrasversario destro dell'atlante non è completo. Il foro occipitale misura in lunghezza cm. 3.1, in larghezza cm. 3.

Fra le altre particolarità da menzionarsi, in questo cranio, di forma ovoidale, notiamo che i fori parietali sono rappresentati da esilissimi forellini; molto profondo e talvolta trasformato in un vero canale osseo il solco per l'arteria meningea media.

Nel radiogramma (fig. III), notasi qui pure fra le masse laterali dell'atlante e i condili dell'occipitale un evidente tessuto spugnoso e non si avverte alcuna linea che indichi il limite della pregressa saldatura fra le due superfici.

Osservazione IV. — Sconosciuto. Indice craniense 76,1. Mesocefalo. L'atlante è fuso coll'occipitale, e la fusione è completa in corrispondenza delle masse laterali, pur notandosi ad un esame esterno la linea di divisione fra le due superfici. L'arco anteriore è staccato; l'arco posteriore, molto ridotto in volume, è interotto per un cm. circa nella linea mediana; è saldato nella sua metà destra, libero nella metà sinistra; a destra esiste un solco per l'arteria vertebrale, a sinistra invece un foro. La faccetta glenoidea inferiore di sinistra è più grande della destra. L'apofisi basilare è corta e stretta. Nelle grandi ali dello sfenoide notansi a destra due orifizi, a sinistra uno solo, i quali comunicano coll'interno della cavità cranica. Il foro occipitale misura in lunghezza cm. 3,3; la larghezza non si potè misurare pel deterioramento subito dal cranio in questo senso.

La forma del cranio ricorda la elissoidale, è leggermente cuneato con ristrettezza sentita alle pareti laterali, più specialmente in rapporto coll'*asterion*, dove presenta una specie di infossamento. La sutura sagittale, la coronale, la lambdoidea, la frontosfenoidale mancano. Dei fori parietali uno solo, molto ampio, trovasi nel centro della sutura sagittale ossificata a 9 mm. dalla coronale pure ossificata, ed uno più piccolo sulla parietale ossificata di sinistra alla distanza di 3 cm. dal primo.

Come più sopra esposi, in questo esemplare fu condotta una sezione, secondo un piano frontale perpendicolare al piano del foro occipitale, e passante per le masse laterali dell'atlante, nei punti cioè dove era più completa la fusione. Del segmento anteriore fu eseguita la radiografia (fig. IV).

Nel radiogramma di questo esemplare, si osservano ancor meglio i particolari più sopra indicati. Il tessuto compatto che attornia i condili dell'occipitale fusi colle masse laterali dell'atlante è ben evidente e in certi punti assai spesso. Lo spessore massimo di tale tessuto corrisponde alla linea di divisione fra i due segmenti, come si può rilevare sullo scheletro e sul radiogramma; introflettendosi esso a mo' di sprone a traverso il tessuto spugnoso viene a delimitare anche all'interno più o meno nettamente i due segmenti. Il tessuto spugnoso dei condili e delle masse laterali dell'atlante si continua con quello della porzione basilare dell'occipitale.

In nessuno dei tre esemplari risulta, come taluno afferma, che nei condili le lamelle della spongiosa iradiino nel foro condiloideo anteriore.

Tali osservazioni ci permettono di raccogliere i seguenti dati radiografici, alcuni dei quali trovano riscontro nei dati già fornitici dalla anatomia sistematica; gli uni servono di conferma agli altri e ambedue si completano nella ricerca:

I. La fusione dell'occipitale coll'atlante può essere completa od incompleta.

II. I condili dell'occipitale possono fondersi colle masse laterali dell'atlante in modo che ad un esame esterno si possa più o meno seguire il limite di tale fusione.

III. Quando i condili dell'occipitale fusi colle masse laterali dell'atlante *non lasciano* ad un esame esterno scorgere nessuna traccia di pregressa saldatura, anche internamente manca fra questi due segmenti un limite di divisione, epperò il tessuto spugnoso ed il tessuto compatto dei condili si continuano in modo uniforme ed ininterotto rispettivamente coi tessuti spugnoso e compatto delle masse laterali.

IV. Quando i condili occipitali fusi colle masse laterali dell'atlante *lasciano* ad un esame esterno scorgere traccia di pregressa saldatura, anche internamente notasi fra i due segmenti un limite di divisione costituito da una specie di tessuto compatto, che si addentra più o meno profondamente, epperò in rapporto di questo punto il tessuto spugnoso dei condili e delle masse laterali rimane come strozzato.

Coll'enunciare i dati fornitici da queste osservazioni, non intendo stabilire leggi alle quali soggiacciano tutti i casi di fusione occipito-atlantoidea; probabilmente parecchie altre varietà si riscontreranno: sarebbe interessante, quindi, che studi analoghi in altri casi venissero pubblicati, e possibilmente di altre regioni del corpo, a complemento delle conoscenze anatomiche, a vantaggio della interpretazione radiologica.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig.	**I.** —	**Imagine**	**radiografica**	**dell' osservazione**	**I.**
»	**II.** —	»	»	»	**II.**
»	**III.** —	»	»	»	**III.**
»	**IV.** —	»	»	»	**IV.**

Fig. I

Fig. II

Fig. III

Fig. IV

INDICE DEL VOLUME X

PARTE SECONDA

Relazione degli Atti accademici.

Anno 1910-1911.

Opere pervenute alla R. Accademia
nell'anno 1909-1910.

Memorie della Sezione di Scienze.

Memorie della Sezione di Lettere.

Appendice.